เรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๖

โดย

พระวรพากย์พจนสินธุ

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๕,๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๙๐

เล่มละ ๖.๕๐ บาท

พิมพ์จำหน่ายที่บริษัทประชาช่าง จำกัด
ตลาดน้อย พระนคร

คำนำ

หลัง มหายุทธสงคราม ครั้งที่ สอง ทุก ประเทศได้พยายามบูรณะ และส่งเสริมความเจริญทั้งในทางวัตถุและจิตต์ใจ โดยฉะเพาะในด้านการศึกษาของอารยประเทศนับว่าก้าวไปไกลทีเดียว ประเทศเพื่อนบ้านใกล้เคียงของเรา อาทิ เช่นจีนก็ได้ปรับปรุงการศึกษาเป็นการใหญ่ ไม่แต่ชนซึ่งอยู่ภายในประเทศเท่านั้น แม้แต่จีนซึ่งอยู่โพ้นทะเลทั้งหลาย รัฐบาลจีนก็ยังถือเป็นภาระกิจที่จะต้องรับผิดชอบ ในเรื่องการ ศึกษาเล่าเรียนแก่คนในชาติของเขา ทั้งนี้ก็เพราะการศึกษาเป็นบ่อเกิดแห่งความเฉลียวฉลาดที่มนุษย์ทุกวันนี้ จะต้องแข่งขันกันทุกวิถีทาง ใครมีสมองดีย่อมไปได้ไกลกว่า ข้าพเจ้ามีความเห็นพ้องกับพระดำริของพระวรวงศ์เธอพระองค์เจ้าธานีนิวัติ อดีตเสนาบดีกระทรวงศึกษาธิการว่าข้าราชการใน กระทรวงศึกษาธิการ และ นอก กระทรวงควรช่วยกันแต่งตำราศิลปวิทยาเป็นภาษาไทย ให้มาก ที่สุดที่จะเป็นได้ เพราะตำราภาษาไทยเท่าที่มีอยู่ในปัจจุบันนี้นับว่าไม่เพียงพอกับปริมาณของนักเรียนเลย.

บริษัทประชาช่าง จำกัด ควรได้รับอนุโมทนาในกุศลกรรมด้านการศึกษาของประเทศไทย พะยานหลักฐานอันนี้คือ พณ ฯ เดือน บุนนาค. รัฐมนตรีว่าการกระทรวงศึกษาธิการ ได้กล่าวตอบสมาชิกสภาผู้แทนราษฎร เมื่อคราวที่ฝ่ายค้านเสนอญัตติขอเปิดอภิปรายทั่วไปเมื่อวันที่ 19–22 พฤษภาคม พ.ศ. 2490 ในหัวข้อเรื่องการศึกษา ตอนหนึ่งมีใจความสำคัญดังนี้ "ในด้านเอกชนที่มีส่วนช่วยเหลือในทางพิมพ์ตำรา อย่างสำคัญก็คือ บริษัทประชาช่าง จำกัด ซึ่งนับว่าเป็นการผ่อนภาระของกระทรวงศึกษาธิการได้ไปทางหนึ่ง" เนื่องด้วยเหตุดังกล่าวแล้ว เมื่อผู้จัดการบริษัทได้ขอร้องให้ข้าพเจ้าเรียบเรียงตำราเรขาคณิตขึ้น ข้าพเจ้าจึงรับทำด้วยความเต็มใจ โดยเห็นแก่ประโยชน์ส่วนรวมเป็นหลักสำคัญ.

ข้าพเจ้าได้นำเอาประวัติหรือบ่อเกิดแห่งวิชาเรขาคณิตมากล่าวไว้ เพื่อนักเรียนจะได้ทราบถึงความเป็นมาของวิชาคณิตศาสตร์แขนงนี้ และความยากลำบากของนักปราชญ์ที่ต้องเผชิญต่อความไม่เห็นพ้องด้วยของ

ผู้มีอำนาจในบ้านเมือง ฯลฯ อันเป็นเครื่องประดับความรู้ให้นักเรียน เกิดความนึกคิด หาเหตุผลไปด้วยในตัว หวังว่าแบบเรียนเรขาคณิตชั้นมัธยมปีที่ 6 ของข้าพเจ้านี้ คงจะทำความพอใจให้แก่ท่านครู, อาจารย์ตลอดจนนักเรียนทั้งหลายโดยทั่วกัน.

วรพากย์พจนสินธุ์

บัญชีเรื่อง.

ความเป็นมาของวิชาเรขาคณิต.

เส้นสัมผัสวงกลม.

หน้า

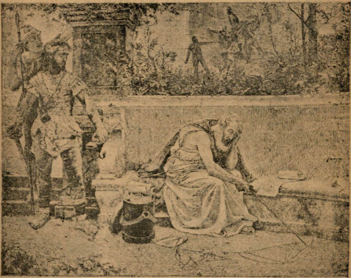
วงกลมสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยม.

เกี่ยวกับวงกลมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า.

ภาคที่ 4.

เกี่ยวกับสี่เหลี่ยมจตุรัส และสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งสัมพันธ์กับส่วนของเส้นตรง.

หน้า



วาระสุดท้ายของอาร์คิมีดีส

อาร์คิมีดีส (Archimedes, 250 ปีก่อนคริสตกาล) นักประดิษฐ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก คิดว่าสิ่งที่ตนคิดค้นขึ้นได้นั้นไร้ค่า และคงไม่ได้รับการยกย่องเป็นวิทยาการที่แท้จริง แม้กระนั้นก็ตาม ชาวกรีกได้นำเอาวิชาที่ท่านผู้นี้คิดค้นไปใช้ได้ผล คือ สามารถป้องกันนครซีราคุส์ (Syracuse) ให้พ้นจากเงื้อมมือของชาว

โรมันได้ถึงสามปี ทั้งนี้เพราะอาร์คิมิดีสนอกจากจะเป็นผู้คิดสร้างอาวุธต่างๆ ที่ใช้ในสงครามสมัยนั้นแล้ว ยังมีเรื่องเล่าสืบมาว่าเป็นผู้คิดเผากองทัพโรมัน โดยใช้วิธีซึ่งใช้กระจกรวมแสง เมื่อกรุงเอเธนส์แตกแล้วตัวอาร์คิมิดีสเองก็ได้ถูกทหารโรมันฆ่าตาย มิใช่ในขณะทำการรบ แต่ในขณะที่กำลังคิดและเขียนบทพิสูจน์ลงบนพื้นทราย ภาพนี้เป็นภาพวาดศตวรรษที่ 17 แสดงให้เห็นถึงอาร์คิมิดีสกำลังนั่งขีดเขียนทรายอย่างที่นักปราชญ์ในครั้งกระโน้นได้ปฏิบัติกันอย่างเพลิดเพลิน จนมิรู้ว่าวาระสุดท้ายของตนกำลังคืบคลานมาถึงแล้ว.

ประวัติย่อของวิชาเรขาคณิต.

ไขคำ. Geometry เป็นคำรวมของคำกรีกสองคำ คือ Ge = แผ่นดิน Metron = วัด.

รวมศัพท์ Geometry แปลตามตัวว่า "การวัดพื้นที่ดิน" ซึ่งในสมัยโน้นใช้หมายความถึงการวัดที่ดินริมฝั่งแม่น้ำไนล์.

ประวัติย่อ. วิชาเรขาคณิตเริ่มอุบัติขึ้นในประเทศอียิปต์ราว3000ปีก่อนคริสตกาล ฮีโรโดตัส(Herodotus) ได้บันทึกไว้ว่าวิชาเรขาคณิตเท่าที่เกิดขึ้นในอียิปต์ก่อน ก็เนื่องจากความจำเป็นของชาวอียิปต์ที่จะต้องหาวิธีวัดฝั่งแม่น้ำไนล์ ที่ถูกน้ำเซาะเข้าไปทุกปี เพื่อสะดวกแก่การปักปันเขตต์ที่ดินใหม่เพื่อประโยชน์ในการเก็บภาษีของรัฐบาล.

วิชาเรขาคณิตของชาวอียิปต์ได้จารึกไว้ในกระดาษที่ทำด้วยต้นปาปีรุส (Papyrus) ซึ่งเวลานี้รัฐบาลอังกฤษได้เก็บรักษาไว้ในพิพิธภัณฑ์ ผู้ที่รวบรวมตำราเรขาคณิตของอียิปต์คนแรกนี้ชื่อว่า อามีส์ (Ahmes) เกิดราว 1700 ปีก่อนคริสตกาล และตามที่ผู้บันทึกได้บันทึกไว้ จึงทำให้เรารู้ว่า วิชาเรขาคณิตนี้เป็นวิชาที่เกิดขึ้นในอียิปต์ราว 3000 ปีก่อนคริสตกาล.

วิชาเรขาคณิตของชาวอียิปต์ ในตอนแรกมักเกี่ยวไปในทางปฏิบัติ(Practical Geometry)ภายหลังชาวกรีกจึงนำวิชานี้ไปหาทางพิสูจน์ให้เห็นจริงตามเหตุผล ซึ่งมักหนักไปในทางทฤษฎี (Theoritical Geometry.) ต่อมาวิชานี้จึงได้แพร่เข้าไปในหมู่ชาวฮินดู

และอาหรับ แล้วจึงแพร่เข้าไปในยุโรป ตามเวลาที่คำนวณย่อๆ ได้ดังนี้ คือ.

ก. เกิดในอียิปต์ราว 3000–1500 ปีก่อนคริสตกาล.

ข. แพร่เข้าไปในกรีกราว 600–100 ปีก่อนคริสตกาล.

ค. แพร่เข้าไปในหมู่ชาวฮินดูราว ค.ศ. 500–1100.

ง. แพร่เข้าไปในอาหรับ ราว ค.ศ. 800–1200.

แล้วจึง

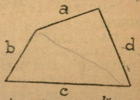
จ. แพร่เข้าไปในยุโรป ราว ค.ศ. 1200.

ในราว ค.ศ 1120 พระชาวอังกฤษชื่อ อาธลาด (Athelard) ได้ปลอมองค์เป็นผู้นับถือศาสนามะหะหมัดเข้าไปในแคว้นคอโดบา (Cordoba) ประเทศสเปญ และหลังจากที่ได้ขะโมยต้นฉบับของยุคลิดซึ่งในขณะนั้นจารึกไว้เป็นภาษาอาหรับได้แล้วก็นำมาแปลออกเป็นภาษาลาติน และแพร่หลายอยู่ในใจกลางทวีปยุโรปกาลล่วงมาถึงปี ค.ศ. 1453 เมื่อพวกเตอร์กยึดกรุงคอนสะแตนติโนเปิลได้ ตำราเรขาคณิตของนักปราชญ์ชาวกรีกอื่นๆ จึงได้ปรากฏขึ้น และได้แพร่หลายมาทางเอเซียและไปทางยุโรป ดังที่ปรากฏอยู่แก่เราท่านทุกวันนี้.

บทพิสูจน์เรขาคณิตและนามผู้คิด
เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม
และรูปหลายเหลี่ยม.

ชาวอียิปต์โบราณ. ชาวอียิปต์ได้คิดวิธีวัดพื้นที่ริมฝั่งแม่น้ำไนล์ หรือวิธีวัดพื้นที่นาสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยนำด้านตรงข้าม ของรูปสี่เหลี่ยม มารวมกัน หารด้วยสอง แล้วจึงคูณกันออกทีหนึ่งเป็นเนื้อที่ที่ต้องการ ดังรูป

$$\text{เนื้อที่} = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$$



การคำนวณเนื้อที่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่านี้ ทำให้เกิดความคิดต่อมาที่จะหาเนื้อที่ ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมคางหมู ต่อไป และตามคัมภีร์ไบเบิลได้ให้หลักฐานไว้ว่า โยเซฟ ในตอนเยเนซีส (Genesis) ได้ซื้อนารูปสี่เหลี่ยม จากชาวอียิปต์ในคราวข้าวยากหมากแพงให้กษัตริย์ฟาโรห์ โดยอาศัยวิธีวัดตามกฎ ของการหาเนื้อที่ ของชาวอียิปต์ข้างบนนั้น.

ชาวอียิปต์มีความสนใจเป็นพิเศษในวิชาเรขาคณิตภาคปฏิบัติ เพราะวิชานี้เป็นวิชาสำคัญสำหรับใช้ในการก่อสร้างสมัยโบราณ เช่นการสร้างโบสถ์ วิหาร ฯลฯ ช่างก่อสร้างในสมัยนั้นได้รับสมญาว่า "นักขึงเชือก" (Rope-stretcher) ทั้งนี้เพราะโดยอาศัยเชือก ช่างเหล่านี้สามารถ แบ่งครึ่งมุม สร้างมุมฉาก (โดยขึงเชือกเป็นปม แล้วขดเป็น รูปสามเหลี่ยมให้มี ด้านยาว 3 4, 5 ตามลำดับ) และสามารถสร้างรูปเรขาคณิตต่างๆ

กรีก. เธเลส (Thales 600 ปีก่อนคริสตกาล) ได้คิดบทพิสูจน์เหล่านี้ขึ้นได้ คือ:

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน. (บทพิสูจน์ ที่ 3).

2. ถ้าสามเหลี่ยม สองรูป มีด้าน สองด้าน เท่ากันและมุมในระหว่างด้านเท่ากันเท่ากันด้วยแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ. (บทพิสูจน์ที่ 4).

3. มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน. (บทพิสูจน์ที่ 5).

4. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก. (บทพิสูจน์ ที่ 16).

5. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันมุมต่อมุม ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมทั้งสองจะได้ปฏิภาคกัน (บทพิสูจน์ ที่ 62).

บทพิสูจน์นี้ เกิดจาก ความคิด ของ เธเลส ที่จะวัดความสูงของปิรามิดโดยสังเกตเงาของไม้ที่ปัก เมื่อเงาของไม้ยาวเท่ากับไม้ที่ปัก เธเลสก็สามารถบอกความสูงของปิรามิดโดยอาศัยเงาแทน ซึ่งการวัดแบบนี้ถือว่าเป็นต้นกำเนิด ของ สามเหลี่ยม คล้าย (Similar triangles.)

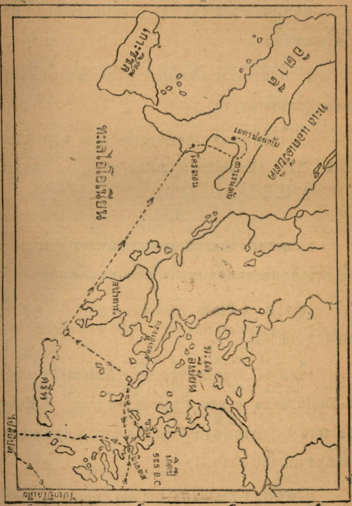
ปิธากอรัส. (Pythagoras 525 ปีก่อนคริสตกาล) เนื่องจากนักปราชญ์ผู้นี้ มีชื่อเสียง ในทาง ให้กำเนิดบทพิสูจน์ ที่ว่า "จตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก ย่อมเท่ากับจตุรัสบนด้านอีกสองด้านรวมกัน" (บทพิสูจน์ ที่ 29) ซึ่งบทพิสูจน์นี้ได้ตั้งตามชื่อของผู้คิดคือของปิธากอรัส นักเรียนจึงควรรู้ประวัติของท่านผู้นี้ไว้บ้าง:

ประวัติย่อ. ปิธากอรัส เกิดที่ซาโมส์ (Samos ดูแผนที่) ราว 525 ปีก่อนคริสตกาล ได้เริ่มสนใจในงานของเธเลส ปิธากอรัสได้ไปศึกษาและท่องเที่ยว

ไปในอียิปต์ และปิธากอรัสเลยไปถึงบาบิโลเนียเป็นเวลาหลายปี กลับมาซาโมส์พร้อมด้วยความหวังที่จะตั้งโรงเรียน แต่เนื่องด้วยความป่าเถื่อนของโปลิเครตีส (Polycrates) เจ้าผู้ครองนคร ปิธากอรัสจึงตั้งโรงเรียนไม่สำเร็จและได้อพยพไปตั้งถิ่นฐานอยู่ที่ แมกนา เกรเซีย (Magna Graecia) ในตอนใต้ของอิตาลี เขาได้ประสพความสำเร็จ ในการตั้งโรงเรียน ขึ้นที่ โครตอน (Croton ดูแผนที่) ในโรงเรียนนั้น ปิธากอรัสได้วางแนวสอนวิชา ปรัชญา คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์สากล พร้อมทั้งวิทยาการอื่นๆ ปรากฏว่ามีนักเรียนมาสมัครเรียนกันเป็นจำนวนมาก.

โรงเรียนนี้ได้เจริญขึ้นอย่างรวดเร็วผิดคาดหมาย นอกจากวิชาดังกล่าวแล้ว ยังมีการสอนเกี่ยวกับวัฒนธรรมของชนชาวอียิปต์ขั้นสูง การอบรมวิชาแผนกนี้เองทำให้ พรรคประชาธิปัตย์ (Democratic party) ในอิตาลีไม่พอใจ จึงถืออำนาจ สั่งปิด และทำลายโรงเรียนเสีย ตัวปิธากอรัสเองต้องหนีจากโรงเรียนไปอยู่ที่ตาเรนตัม (Tarentum) และได้ถูกฆ่าตายณ เมตาปอนตัม (Metapontum).

แผนที่แสดงเส้นทางเดินของปิธากอรัส.



บทพิสูจน์เกี่ยวกับรูปหลายเหลี่ยมที่ปิธากอรัสคิดได้ยกมาดังนี้คือ.

1. วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสให้เท่ากับเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

2. วิธีแบ่งเส้นตรงออกตามอัตราส่วน AB : AX = AX : XB (Extreme & mean ratio) ดังรูป

A ————————X———————— B

3. อัตราส่วนของรูปหลายเหลี่ยมทั้งหลายย่อมเท่ากับอัตราส่วนของจตุรัสบนด้านใดด้านหนึ่งที่สมกัน.

เปลโต. (Plato เกิดที่กรุงเอเธนส์ ราว 380 ปีก่อนคริสตกาล).

เป็นผู้ตั้ง "สิ่งที่เห็นจริงแล้ว" (Axioms) "กฎ" (Definitions) และ "รูปที่เห็นจริงแล้ว" (Postulates) บางอันซึ่งเป็นรากฐานของวิชาเรขาคณิตดังที่ทราบกันอยู่แล้ว.

ยูโดซัส. (Eudoxus ราว 380 ปีก่อนคริสตกาล).

เป็นผู้คิดกฎปฏิภาคในวิชาเรขาคณิต และวิธพิสูจน์เรขาคณิตโดยอาศัยทฤษฎีของเขตต์จำกัด (Method of limits) และโดยอาศัยทฤษฎีของเขตต์จำกัดนี้เองยูโดซัสจึงสามารถพิสูจน์ได้ว่า "อัตราส่วนของเนื้อที่ของวงกลม สองวง ย่อมเท่ากับอัตราส่วน ของจตุรัส บนเส้นผ่าศูนย์กลาง".

ยูคลิด. (Euclid เกิดที่อเลกซานเดรีย 280 ปีก่อนคริสตกาล).

เป็นผู้รวบรวม ตำราเรขาคณิตไว้ใน หนังสือ สิบสามเล่ม และเป็นผู้ให้กำเนิด "บทแทรก" ในวิชาเรขาคณิต.

อโปลโลนิอุส. (Apollonius 225 ปี ก่อนคริสตกาล).

เป็นผู้ให้กำเนิด "เงาตรง" (Projection) เส้นตัด (Transversals) และเป็นผู้ให้กำเนิดวิชา Projective Geometry.

ฮีโร. (Hero เกิดที่อเลกซานเดรีย ราว 125 ปีก่อนคริสตกาล.)

เป็นผู้ให้กฎเกี่ยวกับเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม คือ.

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(ฮีโร่ คิดกฎผิดอันหนึ่ง คือ $\triangle = \frac{1}{2}a\,(b+c)$ ซึ่งทฤษฎีนี้ถ้าว่ากันว่าอาจจะเอามาจากกฎการหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าของชาวอียิปต์ก็ได้).

ชาวโรมัน. แม้ว่าชาวโรมันจะเป็นผู้เชี่ยวชาญในทางก่อสร้าง แต่ก็ปรากฏว่ามิสู้สนใจในวิชาเรขาคณิตของชาวกรีกเท่าใดนัก และถึงแม้ชาวโรมันจะคุ้นเคยกับวัฒนธรรมของชาวกรีกมากเพียงใดก็ตาม แต่ก็ยังคงเชื่อถือกฎในทางคณิตศาสตร์เก่าๆ อยู่เสมอ และบางกฎก็ไม่ทราบว่าคิดขึ้นเองหรือไปเอามาจากไหน เช่นกฎการหาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า แต่ก็พอสืบทราบได้ว่ามีรากฐานมาจากอียิปต์โบราณ แต่กฎผิดๆ บางอันของชาวโรมัน เช่น:-

เนื้อที่สามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีด้านยาว $a = \frac{13a^2}{30}$ หรือ $\frac{1}{2}(a+a)^2$ หรือ $\frac{1}{2}a^2$ ไม่ทราบว่าชาวโรมันไปเอากฎเหล่านี้มาจากไหน.

เกี่ยวกับเนื้อที่ของวงกลม.

เธเลส (Thales). สำหรับวงกลม เธเลส์ได้คิดทฤษฎีเหล่านี้ขึ้นได้ คือ:

1. เส้นผ่าศูนย์กลางย่อมแบ่งครึ่งวงกลม.

2. มุมในครึ่งวงกลมย่อมเท่ากับหนึ่งมุมฉาก. (บทพิสูจน์ที่ 45).

ฮิปโปเครติส. (Hippocrates ราว 420 ก่อนคริสตกาล) เป็นผู้คิดบทพิสูจน์เกี่ยวกับวงกลมได้มากที่สุด.

ชาวอียิปต์. ได้ตั้งกฎเนื้อที่ของวงกลม

$$= 64/81 \ (\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง})^2.$$

และคำนวณค่าของ $\pi = 3.1604$.

ชาวยิวและบาบิโลเนีย. เป็นผู้กำหนดค่าของ $\pi = 3$.

อาร์คิมิดีส. (Archimedes เกิดในเกาะซิซิลี ราว 250 ปีก่อนคริสตกาล).

อาศัยการสร้างวงกลมให้ล้อมรอบและบรรจุภายในรูปหลายเหลี่ยมตรง (ด้านเท่ามุมเท่า) อาร์คิมิดีส สามารถพิสูจน์ให้เห็นได้ว่า ค่าที่แท้จริงของ π อยู่ระหว่าง $3\frac{1}{7}$ ถึง $3\frac{10}{71}$ หรือระหว่าง 3.14285 กับ 3.1408

ชาวฮินดู. ชาวฮินดูได้กำหนดค่าของ π เท่ากับ 3, $3\frac{1}{8}$, $\sqrt{10}$.

อารยะพัทธ์. (Arybahatta ค.ศ. 530) ได้กำหนดค่าของ π ไว้ใกล้ความจริงที่สุด คือ 3.1416.

ในสมัยปัจจุบัน ค่าของ π ได้กำหนดไว้ละเอียดที่สุดถึงทศนิยม 707 ตำแหน่ง.

กฎ ค่าของ $\pi = \dfrac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง}}$ ผู้นี้ ยูเลอ (Euler ค.ศ. 1750) นักคำนวณชาวเยอรมันเป็นผู้ตั้งขึ้น.

หมายเหตุ. เมื่อนักเรียนได้ทราบความเป็นมาของวิชานี้แล้วก็ย่อมเข้าใจ คำที่วงเล็บไว้หลังบทพิสูจน์ต่างๆ ในหนังสือ Hall & Stevens. ว่า "(ยุคลิดเล่มที่.....บทที่.....)" นั้นคืออ้างถึงตำราที่ท่านยุคลิดรวบรวมไว้เป็นสำคัญ.

เรขาคณิตชั้นมัธยมปีที่ ๖

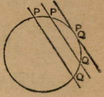
เส้นสัมผัสส์วงกลม.

นิยามและความสำคัญในชั้นแรก.

ตร 1. เส้นตัดวง (Secant) ของวงกลม คือเส้นตรงที่มีความยาวไม่จำกัด ลากตัดเส้นรอบวงของวงกลมสองแห่ง.

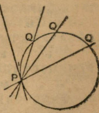
2. เส้นสัมผัสส์วง (Tangent) ถ้าค่อย ๆ เคลื่อนเส้นตัดวงออกไปให้พ้นเส้นรอบวง ก็จะเห็นได้ว่าจุดสองจุดนั้นจะค่อย ๆ เคลื่อนเข้ามาใกล้กันทุกที ๆ, ผลที่สุดจุดทั้งสองนั้นจะเข้ามาทับกัน หรือเป็นจุด ๆ เดียวกัน, เส้นตัดวงนั้นก็จะเรียกว่า เส้นสัมผัสส์วงกลม หรือเรียกย่อ ๆ ว่าเส้นสัมผัสส์วง, การที่เส้นตัดวง ไปตัดวงกลมแต่เพียงจุดเดียวเช่นนี้เรียกว่า สัมผัสส์. จุดนั้นเรียกว่า จุดสัมผัสส์ เช่น:-

(i) ให้เส้นตัดวง ตัดวงกลมที่จุด P และ Q, และสมมติให้เส้นตัดวงนี้เคลื่อนที่ห่างออกไปจากจุดศูนย์กลาง, และขนานกับเส้นในตำแหน่งเดิม; แล้วจุดทั้งสองคือ P และ Q จะค่อยๆ เคลื่อนเข้าใกล้กันทุกที ในที่สุดก็จะทับกัน.



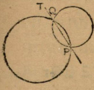
เมื่อ P และQ กลายเป็นจุด ๆ เดียว, เส้นตรงจ เส้นนี้ก็กลายเป็นเส้นสัมผัสวงที่จุดนั้น.

(ii) ให้เส้นตัดวง ตัดวงกลมที่จุด P และ Q, และสมมติให้เส้นตัดวงนี้หมุนไปรอบจุด P โดยใช้จุด P เป็นจุดตายตัว, จุด Q จะค่อยๆ เคลื่อนไปตามเส้นรอบวงใกล้ P. เข้ามาทุกทีๆ ในตำแหน่งสุดท้าย, เมื่อ Q มาทับ P, เส้น PQ จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P.

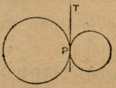


เมื่อเส้นตัดวงสามารถตัดวงกลมได้สองจุดเท่านั้น ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า เส้นสัมผัสวงมีจุดๆเดียวเท่านั้นที่ร่วมอยู่บนเส้นรอบวง, จุดนี้คือจุดสัมผัส, ซึ่งเป็นจุดสองจุดทับกัน. แล้วเราก็ให้นิยามเส้นสัมผัสวงได้ดังนี้:

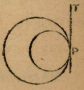
3. **เส้นสัมผัสวงกลม** คือเส้นตรงซึ่งพบเส้นรอบวงที่จุดเดียวเท่านั้น; และถึงแม้จะต่อไปเท่าไรก็ตามจะไม่ตัดเส้นรอบวงอีก.



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

4. ให้วงกลมสองวงตัดกัน (ดังในรูปที่ 1) ที่จุด P และ Q และให้วงกลมวงเล็กหมุนไปรอบจุด, ซึ่งเป็นจุดตายตัว, ดังนั้นจุด Q ก็จะเคลื่อนเข้าใกล้จุด P. แล้วในตำแหน่งสุดท้ายคือเมื่อ Q ทับ P (ดังในรูปที่ 2 และ 3), วงกลมทั้งสองนี้เรียกว่า สัมผัส ซึ่งกันและกันที่จุด P.

เมื่อวงกลมสองวงไม่สามารถตัดกันมากกว่าสองจุด, ดังนั้นวงกลมสองวง ซึ่งสัมผัสกันและกันจะไม่มากกว่าหนึ่งจุด, คือที่จุดสัมผัส ซึ่งจุดทั้งสองทับกัน. ดังนั้นวงกลมที่กล่าวว่า **สัมผัส** ซึ่งกันและกันก็เมื่อวงกลมนั้นพบกัน, แต่ไม่ใช่ตัดกัน.

หมายเหตุ เมื่อวงกลมวงหนึ่งพบกับวงกลมอีกวงหนึ่งภายนอก, ดังในรูปที่ 2, ก็กล่าวว่า วงกลม **สัมผัสภายนอก**, เมื่อวงกลมหนึ่งพบกับอีกวงกลมหนึ่งภายใน, ก็กล่าวว่าวงกลม **สัมผัสภายใน.**

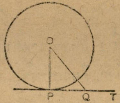
ความจริงที่ได้มาจากนิยาม 2 และ 4.

ถ้าตามรูปที่ 1, TQP เป็นคอร์ดร่วมของวงกลมสองวง ซึ่งวงหนึ่งให้หมุนรอบจุด P, เมื่อจุด Q ทับจุด P, แล้วเส้น TP จะผ่านจุดทั้งสองที่ทับกับของวงกลมหนึ่ง ๆ, ดังในรูปที่ 2 และ 3, และดังนั้นก็กลายเป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมวงหนึ่ง ๆ แล้ว.

วงกลมสองวงที่สัมผัสกันจะมีเส้นสัมผัสร่วมเส้นหนึ่ง ที่จุดสัมผัสของวงกลมทั้งสองนั้น.

บทพิสูจน์ที่ 46

เส้นสัมผัส เมื่อ สัมผัส วงกลม ที่จุด หนึ่งจุดใด ของวงกลมแล้วย่อมตั้งได้ฉากกับเส้นรัศมีที่ลาก มายังจุดสัมผัส.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O เป็น จุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง มี PT เป็นเส้น สัมผัสวง สัมผัสวงกลมที่จุด P.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า PT ตั้งฉากกับรัศมี OP.

พิสูจน์ ให้ Q เป็นจุดๆ หนึ่งบน PT, ลากเส้น OQ.

เพราะว่า PT เป็นเส้นสัมผัสวง ทุกๆจุดบนเส้น PT เว้นแต่จุด P ย่อมอยู่ภายนอกวงกลม.

∴ OQ ยาวกว่ารัศมี OP.

ไม่ว่า Q จะอยู่ในที่ใด ๆ บน PT, ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า OQ ยาวกว่า OP เสมอ.

∴ OP เป็นเส้นที่สั้นที่สุด.

ดังนั้น OP ตั้งฉากกับ PT. (บทแทรกที่ 1 บ.พ.12).

ซ.ต.พ.

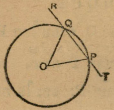
บทแทรกที่ 1 เพราะว่ามีเส้นตั้งฉาก ลากไปยัง OP ที่จุด P ได้เส้นเดียวเท่านั้น, จึงกล่าวได้ว่า เส้นสัมผัสวง เส้นเดียวและเส้นเดียวเท่านั้น ที่สามารถลากไปยังจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้บนเส้นรอบวง.

บทแทรกที่ 2 เพราะว่ามีเส้นตั้งฉาก ลากไปยัง PT ที่จุด P ได้เส้นเดียวเท่านั้น, จึงกล่าวได้ว่า, เส้นตั้งฉากที่ลากไปยังเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส ย่อมผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม.

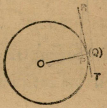
บทแทรกที่ 3 เพราะว่ามีเส้นตั้งฉากลากจากจุด O ไปยัง PT ได้เส้นเดียวเท่านั้น, จึงกล่าวได้ว่า เส้นรัศมีที่ลากไปตั้งได้ฉากกับเส้นสัมผัส ย่อมผ่านจุดสัมผัส.

บทพิสูจน์ที่ 46 (ใช้วิธี Method of Limits)

เส้นสัมผัสเมื่อสัมผัสวงกลม ที่จุดหนึ่งจุดใดของวงกลมหนึ่งแล้ว ย่อมตั้งได้ฉากกับรัศมีที่ลากมายังจุดสัมผัสนั้น.



รูปที่ 1



รูปที่ 2

สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมี P เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่บนเส้นรอบวง.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นสัมผัสวงที่จุด P จะตั้งได้ฉากกับรัศมี OP.

พิสูจน์ ให้ RQPT (รูปที่ 1) เป็นเส้นตัดวงตัดวงกลมที่จุด Q และ P.

ลาก OQ, OP.

$\because$ $OP = OQ$,

$\therefore$ มุม $OQP = OPQ$; (บ. พ. 5)

มุมที่ต่างก็ประกอบสองมุมฉากกันนั้น ย่อมเท่ากัน;

นั่นคือ, มุม $OQR =$ มุม OPT,

และเป็นจริงเสมอไป ถึงแม้ว่า Q จะอยู่ใกล้ P.

ให้เส้นตัดวง QP หมุนรอบจุด P ดังนั้น จุด Q จะเข้ามาใกล้ และในที่สุดจะทับ P; และในตำแหน่งสุดท้าย,

(1) เส้นตัดวง RT จะกลายเป็นเส้นสัมผัสวงที่จุด P,

(2) OQ ทับกับ OP;

รูปที่ 2

และเพราะว่ามุม OQR กับมุม OPT ต่างก็เป็นมุมที่เท่ากันและเป็นมุมประชิดกัน.

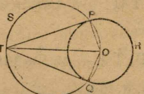
$\therefore$ OP ตั้งได้ฉากกับ RT.

ซ. ต. พ.

หมายเหตุ วิธีพิสูจน์ที่ใช้อยู่ในที่นี้ เรียกว่า **Method of Limits.**

บทพิสูจน์ที่ 47

จากจุดภายนอกของวงกลมสามารถลากเส้นสัมผัสวงไปยังวงกลมได้สองเส้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ PQR เป็นวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O, และ T เป็นจุดภายนอกของวงกลม.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า มีเส้นสัมผัสวงสองเส้นที่ลากจากจุด T ไปยังวงกลม PQR.

สร้าง ลากเส้น OT, เขียนวงกลม TSO โดยใช้ OT เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง. จะตัดวงกลม PQR ที่จุด P และ Q. ลากเส้น TP, TQ, OP, OQ,

พิสูจน์ เพราะว่ามุม TPO และมุม TQO ต่างก็เป็นมุมในครึ่งวงกลม.

∴ มุม TPO = มุม TQO ต่างก็เป็นมุมฉาก; (บ.พ. 41)

∴ TP, TQ ต่างก็ตั้งได้ฉากกับรัศมี OP, OQ ตามลำดับ.

ดังนั้น TP, TQ ต่างก็เป็นเส้นสัมผัสวงที่ P และ Q. (บ.พ. 46)

ซ.ต.พ.

บทแทรก เส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากจากจุดภายนอกของวงกลม ย่อมเท่ากัน, และที่จุดศูนย์กลางนั้นย่อมตรงกันข้ามกับเส้นสัมผัสนั้นย่อมเท่ากันด้วย.

ใน △ TPO และ TQO,

∵ มุม TPO = มุม TQO ต่างก็เป็นมุมฉาก;
TO เป็นด้านร่วม,
OP = OQ รัศมีของวงกลมเดียวกัน;

∴ TP = TQ, (บ.พ. 18).

และมุม TOP = มุม TOQ. (บ.พ. 18).

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับเส้นสัมผัสสองวง

(เกี่ยวกับคำนวณและสร้าง)

1. จงเขียนวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ซึ่งมีรัศมี 5.0 ซม. และ 3.0 ซม. จงเขียนคอร์ดจำนวนหนึ่งในวงกลมวงแรกและให้สัมผัสวงกลมวงที่สอง. จงคำนวณและวัดความยาวของคอร์ดทั้งหลาย และให้เหตุผลด้วยอีกว่าเพราะเหตุใดจึงเท่ากัน.

2. ในวงกลมซึ่งมีรัศมียาว 1.0" จงเขียนคอร์ดจำนวนหนึ่งซึ่งยาวคอร์ดละ 1.6". จงพิสูจน์ให้เห็นว่าคอร์ดทั้งหมดนี้สัมผัสวงกลม, ซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลมแรก และหาความยาวของรัศมี.

3. วงกลมสองวงซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน มีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว 10.0 ซม. และ 5.0 ซม. ตามลำดับ: จงหาความยาวของคอร์ดในวงกลมใหญ่ และเส้นสัมผัสวงกลมเล็กให้ถึงมิลลิเมตร, และตอบโดยการวัด.

4. ตามรูปของบทพิสูจน์ที่ 47, ถ้า OP = 5", TO = 3" จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงที่ลากจากจุด T. เขียนรูป (มาตราส่วน 2 ซม. ต่อ 5 นิ้ว), และวัดมุมที่จุด 0 ซึ่งกางรับเส้นสัมผัสวงให้เป็นองศา.

5. เส้นสัมผัสวงทั้งสองที่ลากจากจุด T ไปยังวงกลมซึ่งมีรัศมี 0.7 นิ้ว ยาวเส้นละ 2.4 นิ้ว. จงหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุด T. จงเขียนรูปและสอบดูผลด้วยการวัด.

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

6. จุดศูนย์กลางของวงกลมใด ๆ ซึ่งสัมผัสเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน ย่อมอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นทั้งสองนั้น.

7. AB และ AC เป็นเส้นสัมผัสวง สองเส้นของวงกลม ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง; จงพิสูจน์ว่า AO แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด BC ที่ลากต่อจุดสัมผัส.

8. ตามในรูปของบทพิสูจน์ที่ 47 ถ้าลากเส้น PQ, จงพิสูจน์ว่ามุม PTQ เป็นสองเท่าของมุม OPQ.

9. วงกลมวงหนึ่งมีเส้นสัมผัสวงขนาน สองเส้น ลากไปตัดเส้นสัมผัสวงเส้นที่สาม มุมที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งกาง รับส่วนที่ถูก ตัดของคอร์ดที่ สามย่อม กางเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

10. เส้น ผ่าศูนย์ กลาง ของ วงกลม ย่อม แบ่ง ครึ่ง คอร์ดทั้งหลายซึ่งลาก ขนานกับเส้นสัมผัสวงที่สัมผัสที่จุดปลายข้างใดข้างหนึ่งของเส้นผ่าศูนย์กลางนั้น.

11. จงหาโลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลม ทั้งหลาย ซึ่งสัมผัส ตรงจุด ที่กำหนดให้บนเส้นตรงที่กำหนดให้.

12. จงหาโลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลม ทั้งหลาย ซึ่งต่างก็สัมผัสเส้นขนานสองเส้น.

13. จงหาโลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลม ทั้งหลาย ซึ่งต่างก็ สัมผัส เส้นตรงสองเส้น ที่ตัดกัน และมีความยาวไม่จำกัด.

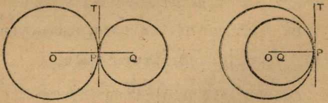
14. รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่ล้อมรอบวงกลม, ผลบวกของด้านตรงกันข้ามคู่หนึ่งย่อมเท่าผลบวกของด้านตรงกันข้ามอีกคู่หนึ่ง.

จงเขียนและพิสูจน์บทกลับของโจทย์ข้อนี้.

15. ถ้าเขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานล้อมรอบวงกลม มุมทั้งสองที่จุดศูนย์กลางซึ่งกางรับด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมนั้น รวมกันเข้าจะเท่ากับ 2 มุมฉาก.

บทพิสูจน์ที่ 48

ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกัน, จุดศูนย์กลางทั้งสองกับจุดสัมผัสย่อมอยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวง สัมผัสกันที่จุด P.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า O,P และ Q อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

พิสูจน์ ลากเส้น OP, QP.

เมื่อวงกลมสัมผัสกันที่จุด P, ก็มีเส้นสัมผัสร่วมได้เส้นหนึ่งที่จุดสัมผัส.

สมมติให้ PT เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมทั้งสองที่จุด P.

แต่ OP และ QP เป็นรัศมีซึ่งต่างก็ลากไปยังจุดสัมผัส,

$\therefore$ OP และ QP ต่างก็ตั้งได้ฉากกับ PT; (บ.พ. 46)

$\therefore$ OP และ QP เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน. (บ.พ.2)

นั่นก็คือจุด O,P และ Q อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

ซ. ต. พ.

บทแทรกที่ 1 ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม ทั้ง สองย่อมเท่ากับ ผลบวกของ รัศมีของวงกลมทั้งสองนั้น.

บทแทรกที่ 2 ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกัน ภายในระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองย่อมเท่ากับผลต่างของรัศมีของวงกลมทั้งสองนั้น.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับจุดสัมผัสของวงกลม
(เกี่ยวกับการคำนวณและการสร้าง)

1. จงเขียนวงกลมสองวงรัศมี 1.7 นิ้ว และ 0.9 นิ้ว ตามลำดับ. ให้มีจุดศูนย์กลางห่างกัน 2.6 นิ้ว วงกลมทั้งสองนี้จะสัมผัสกันที่ไหน และทำไมจึงสัมผัสกันที่นั่น ?

ถ้าวงกลมสองวงซึ่งมีรัศมีดังข้างบนนั้น มีจุดศูนย์กลางห่างกัน 0.8 นิ้ว,

จงพิสูจน์ว่าวงกลมทั้งสองนี้สัมผัสกัน. การสัมผัสครั้งนี้ต่างกับคราวแรกอย่างไร และทำไมจึงต่างกัน ?

2. จงเขียนสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีด้าน $a = 8$ ซม., $b = 7$ ซม., $c = 6$ ซม. เอา A,B และ C เป็นจุด

ศูนย์กลางเขียนวงกลมรัศมี 2.5 ซม., 3.5 ซม. และ 4.5 ซม. ตามลำดับ, และพิสูจน์ให้เห็นว่าวงกลมเหล่านี้สัมผัสกันเป็นคู่ ๆ.

3. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, มุม C, เป็นมุมฉาก ด้าน $a = 8$ ซม. และ $b = 6$ ซม.; และเขียนวงกลมโดยใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 7 ซม. ถ้าใช้ B เป็นจุดศูนย์กลาง จะต้องเขียนวงกลมมีรัศมีเท่าไร ? จึงจะสัมผัสวงกลมแรก.

4. A และ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่ตายตัวและสัมผัสกันภายใน. ถ้า P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมอีกวงหนึ่ง สัมผัสวงกลมใหญ่ภายในและวงกลมเล็กภายนอก, จงพิสูจน์ว่า

AP+BP คงตัวเสมอ.

ถ้าวงกลมที่ตายตัวมีรัศมียาว 5.0 ซม. และ 3.0 ซม. ตามลำดับ, แล้วสอบดูผลด้วยวิธีวัดโดยกำหนดจุด P ให้อยู่ในที่ต่าง ๆ.

5. AB เป็นเส้นที่ยาว 4 นิ้ว, และ C เป็นจุดกึ่งกลาง. บน AB, AC, CB เขียนครึ่งวงกลม. จงแสดงให้เห็นว่าวงกลมที่บรรจุในที่ว่าง ซึ่งล้อม รอบ ด้วยครึ่งวงกลมทั้งสามนั้น ย่อมมีรัศมียาว $\frac{2}{3}$ นิ้ว.

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

6. เส้นตรงซึ่งลากผ่านจุดสัมผัสของวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลาง A และ B, และตัดเส้นรอบวงที่จุด P และ Q ตามลำดับ; จงพิสูจน์ว่ารัศมี AP และ BQ ขนานกัน.

7. วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก, มีเส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านจุดสัมผัส และไปตัดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง; จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัส ณ ที่ปลายทั้งสองของเส้นนี้ย่อมขนานกัน.

8. จงหาโลกัส ของจุด ศูนย์ กลางของ วงกลมทั้งหลาย

i ซึ่งสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ที่จุดๆหนึ่ง;

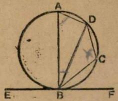
ii ซึ่งมีรัศมีเท่าที่กำหนดให้ และสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้.

9. เอาจุดที่กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมให้สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ จะเขียนวงกลมนี้ได้กี่รูป ?

10. จงเขียนวงกลมซึ่งมีรัศมี *a* ให้สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ซึ่งมีรัศมี *b* ที่จุดกำหนดให้ด้วย. จะเขียนวงกลมนี้ได้กี่รูป ?

บทพิสูจน์ที่ 49. (ยุคลิดเล่มที่ 3 บท 32)

มุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นสัมผัสวงของวงกลมวงหนึ่งกับคอร์ด ซึ่งลากจากจุดสัมผัสย่อมเท่ากับมุมในส่วนของวงกลมแย้งตามลำดับ.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ EF สัมผัสวงกลม ABC ที่จุดB, และให้ BD เป็นคอร์ด ซึ่งลากจากจุดสัมผัส B.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

(i) มุมFBD = มุม BAD อยู่ในส่วนของวงกลมแย้ง;

(ii) มุม EBD = มุม BCD อยู่ในส่วนของวงกลมแย้ง.

สร้าง จากจุด B ลากเส้นผ่าศูนย์กลาง BA, และ C เป็นจุดๆ หนึ่งบนส่วนโค้ง ที่ไม่มี A อยู่.

ลากเส้น AD, DC, CB.

พิสูจน์ ∵ มุม ADB เป็นมุมในครึ่งวงกลม ย่อมเป็นมุมฉาก, (บ.พ. 41)

∴ มุม DBA + มุม BAD = 1 มุมฉาก. (บ.พ. 16)

แต่เพราะว่า EBF เป็นเส้นสัมผัส, และ BA เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง,

∴ มุม FBA เป็นหนึ่งมุมฉาก.

∴ มุม FBA = มุม DBA + มุม BAD.

เอามุมร่วม DBA ออกเสียทั้งสองข้าง,

ดังนั้น มุม FBD = มุม BAD, ซึ่งอยู่ในส่วนของวงกลมแย้ง.

∵ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมที่วงกลมล้อมรอบ

∴ มุม BCD = เป็น มุม ประกอบ สอง มุมฉาก ของมุม BAD (บ.พ. 40)

= เป็น มุม ประกอบ สอง มุม ฉากของมุม FBD

= มุม EBD;

∴ มุม E B D = มุม B C D, ซึ่งเป็นมุมในส่วนของวงกลมแย้ง.

ซ.ต.พ.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 49.

1. ตามรูปในบทพิสูจน์ที่ 49 ถ้ามุม F B D $= 72^\circ$ จงหาค่าของมุม B A D, B C D, E B D.

2. จงใช้บทพิสูจน์นี้ พิสูจน์ให้เห็นว่าเส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากจากจุดภายนอกของวงกลม ย่อมยาวเท่ากัน.

3. วงกลมสองวงสัมผัสกันที่จุด A, มีคอร์ด A P Q, A X Y ลากผ่านจุด A: จงพิสูจน์ว่า P X และ Q Y ขนานกัน.

ให้พิสูจน์ในเมื่อ (i) สัมผัสกันภายใน;

(ii) สัมผัสกันภายนอก.

4. A B เป็นคอร์ดร่วมของวงกลมสองวง, ซึ่งเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งผ่านจุด O, ซึ่งเป็นจุดศูนย์

กลางของวงกลมอีกวงหนึ่ง: พิสูจน์ว่า O A แบ่งครึ่งมุมซึ่งอยู่ระหว่างคอร์ดร่วมกับเส้นสัมผัสสองวงซึ่งสัมผัสวงกลมแรกที่จุด A.

5. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B; และ P, เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง, มีเส้นตรง P A C, P B D ลากไปตัด วงกลม อีกวงหนึ่งที่จุด C และ D: พิสูจน์ว่า CD ขนานกับเส้นสัมผัสที่จุด P.

6. ถ้ามีคอร์ดซึ่งลากจาก จุดสัมผัส ที่เส้นสัมผัสลากไปสัมผัส วงกลม, จากจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งใดส่วนโค้งหนึ่งที่ถูกคอร์ดตัดออก มีเส้นตรงลากไปตั้งฉากกับเส้นสัมผัสและคอร์ด เส้นตั้งฉากทั้งสองนี้ย่อมเท่ากัน.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับ Method of Limits.

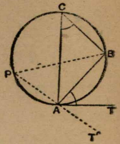
1\. 1. จงพิสูจน์ บทพิสูจน์ ที่ 49 ด้วยวิธี Method of Limits.

ให้ A C B เป็นส่วนของวงกลมซึ่งมี A B เป็นคอร์ด.

และให้ P A T, เป็นเส้นตัดวงที่ผ่านจุด A. ลากเส้น PB.

ดังนั้นมุม BCA = มุม BPA; (บ.พ. 39)

มุมทั้งสองนี้จะเท่ากันเสมอไปถึงแม้ว่า P จะเคลื่อนเข้าใกล้ A.



ถ้า P เคลื่อนไปทับกับ A, ดังนั้นเส้นตัดวง P A T' จะกลายเป็นเส้นสัมผัสวง AT, และมุม BPA จะกลายเป็นมุม B A T.

∴ มุม BAT = มุม BCA, ซึ่งเป็นมุมในส่วนของวงกลมแย้ง.

2. อาศัยบทพิสูจน์ที่ 31 และวิธี Method of Limits พิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ลากไปตั้งฉากที่ปลายข้างใดข้างหนึ่งของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ย่อมเป็นเส้นสัมผัสวง.

3. อาศัยคุณสมบัติที่ว่าเส้นตรงที่ต่อจุดศูนย์กลางจะแบ่งครึ่งคอร์ดและตั้งได้ฉากกับคอร์ด จงพิสูจน์บทพิสูจน์ที่ 48.

4. อาศัยแบบฝึกหัดของบทพิสูจน์ที่ 40 ข้อ 5 พิสูจน์บทพิสูจน์ที่ 49.

5. อาศัยบทพิสูจน์ที่ 41 พิสูจน์บทพิสูจน์ที่ 46.

บทสร้าง.

วิธีวิเคราะห์เรขาคณิต.

บทพิสูจน์และบทสร้างที่มีอยู่ในตำราเล่มนี้ ได้เรียบเรียงอย่าง สังเคราะห์, คือ นำผลที่รู้แล้วเอามาประกอบกันเข้าจึงเกิดผลใหม่ขึ้น.

แต่วิธีการ เช่นนี้ ถึงแม้ว่าจะใช้ ในการโต้เถียงได้ก็จริง, ก็ยังทำให้รู้เรื่องเกี่ยวกับการสร้างและการพิสูจน์นั้น ๆ น้อยไป. เพราะฉะนั้นนักเรียนควรสนใจในหัวข้อต่อไปนี้.

ในการพยายาม ที่จะทำ บทสร้างใด ๆ ก็ดี, ให้ตั้งต้นโดย สมมติว่า ผลที่ต้องการนั้น มีอยู่ เรียบร้อยแล้ว (คือสร้างได้แล้ว) แล้วค่อย ๆ คิดถอยหลัง คือ คิดค้นหาผล ที่เกี่ยวข้อง กับสิ่งที่ สมมติให้เป็นจริงแล้ว, และพยายาม สืบค้นให้แน่ว่า อาศัย หลักเกณฑ์ อะไร หรือบทพิสูจน์อะไร ซึ่งจะนำทางให้เราสร้างได้สำเร็จ. ถ้าความพยายามนี้สัมฤทธิ์ผล เราก็นำเอาขั้นเหล่านั้นมาเรียบเรียงกลับเสียใหม่ตามลำดับ; แล้วก็ทำการสร้าง

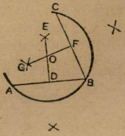
และการพิสูจน์ต่อไป   การสร้าง และการพิสูจน์ ดำเนินตามครั้งหลังนี้ เข้าแบบวิธี สังเคราะห์.

การคิดถอยหลังนี้เรียกว่า วิธี สังเคราะห์ เรขาคณิต, วิธีนี้เป็นแนวทางที่จะใช้ทำแบบ ฝึกหัดที่ยาก ๆ และโดยฉะเพาะอย่างยิ่ง คือใช้ ในการทำบทสร้าง.

ถึงแม้ว่าคำแนะนำข้างบนนี้ จะไม่นับเข้าอยู่ในวิธีหนึ่งวิธีใดก็ดี, แต่ก็เป็นแบบ ที่ดี ที่จะใช้ สำหรับ ค้นหาเมื่อทำโจทย์นั้นๆ. วิธีวิเคราะห์นี้จะนำไปใช้ ในบทสร้างต่อไปนี้. (คือบทสร้างที่ 23, 28, 29.)

บทสร้างที่ 20.

กำหนดเส้นรอบวง, หรือส่วนโค้งของวงกลมให้, จงหาจุดศูนย์กลาง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A B C เป็นส่วนโค้งของวงกลม.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องหาจุดศูนย์กลางของส่วนโค้ง A B C.

สร้าง จากคอร์ดสองคอร์ด คือ AB, BC, และจากเส้น DE, FG, ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดAB, BC ตามลำดับ; ตัดกันที่จุด O. (บ.ส. 2)

ดังนั้น O จะเป็นจุดศูนย์กลางที่ต้องการ.

พิสูจน์ ทุก ๆ จุดในเส้น DE มีระยะทางห่างจาก A และ B เท่ากัน. (บ.พ. 14)
และทุก ๆ จุดในเส้น FG มีระยะทางห่างจาก B และ C เท่า ๆ กัน. (บ.พ. 14)

∴ O มีระยะทางห่างจาก A, B, และ C เท่า ๆ กัน.

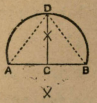
∴ O เป็นจุดศูนย์กลางของส่วนโค้ง A B C.

(บ.พ. 33)

ช. ต. พ.

บทสร้างที่ 21.

จงแบ่งครึ่งส่วนโค้งที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ADB เป็นส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องแบ่งครึ่งส่วนโค้ง ADB.

สร้าง ลากเส้น AB, แล้วลากเส้น CD ให้แบ่งครึ่งคอร์ด, และตั้งฉากกับคอร์ด AB ไปตัดส่วนโค้งที่ D. (บ.ส. 2)

ดังนั้นส่วนโค้ง ADB ถูกแบ่งครึ่งที่ D.

พิสูจน์ ลากเส้น AD, BD.

ดังนั้นทุก ๆ จุด บนเส้น CD มีระยะทางห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน; (บ.ส. 14)

$\therefore DA = DB;$

∴ มุม DBA = มุม DAB (บ.พ. 6)

∴ ส่วนโค้งที่อยู่ตรงกันกับมุมทั้งสองนี้ ซึ่งอยู่ที่เส้นรอบวงของวงกลมนั้น, ย่อมยาวเท่ากัน;

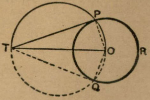
นั่นคือส่วนโค้ง AD = ส่วนโค้ง DB.

(บ.พ. 42)

ซ. ศ. พ.

บทสร้างที่ 22.

จงลากเส้นสัมผัสส์วงจากจุดภายนอกที่กำหนดให้ ให้ไปสัมผัสส์วงกลมอีกวงหนึ่ง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม P Q R ที่กำหนดให้; และ T เป็นจุดอยู่ภายนอก; ซึ่งต้อง ลากเส้นสัมผัสส์ วงจากจุด นี้ไป สัมผัสส์ วงกลม PRQ.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องลากเส้นสัมผัสส์วงจากจุดT ไปยังวงกลม P Q R.

สร้าง ลากเส้น TO, และใช้ T O เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง เขียนครึ่งวงกลม T P O ให้ตัดเส้นรอบวงที่จุด P.

ลากเส้น TP.

ดังนั้น TP เป็นเส้นสัมผัสวงตามต้องการ.

พิสูจน์ ลากเส้น OP.

∵ มุม TPO เป็นมุมในครึ่งวงกลมย่อมเป็นหนึ่งมุมฉาก, (บ.พ. 41)

∴ TP ตั้งได้ฉากกับรัศมี OP.

∴ TP เป็นเส้นสัมผัสวงที่ P. (บ.พ. 46)

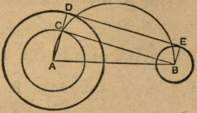
แต่ สามารถจะเขียนครึ่งวงกลมอีกข้างหนึ่งของเส้น TO.

ดังนั้นเส้นสัมผัสวง TQ เส้นที่สองก็สามารถจะลากจากจุด T, ซึ่งแสดงให้เห็นในรูปแล้ว.

หมายเหตุ สมมติว่าจุด T เคลื่อนเข้าใกล้วงกลมที่กำหนดให้ ดังนั้นมุม PTQ ก็ค่อยๆโตขึ้น. เมื่อ T เคลื่อนถึงเส้นรอบวง, มุม PTQ เป็นมุมตรง, และเส้นสัมผัสวงทั้งสองก็ทับกัน. เมื่อ T อยู่ภายในวงกลม, ไม่สามารถเขียนเส้นสัมผัสวงได้.

บทสร้างที่ 23.

จงลากเส้นสัมผัสร่วมไปยังวงกลมสองวง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงใหญ่ซึ่งมีรัศมียาว a; และให้ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงเล็ก, ซึ่งมีรัศมียาว b.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องลากเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง A และ B.

วิธีวิเคราะห์ สมมติให้ DE เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมทั้งสองที่จุด D และ E.

ดังนั้นรัศมี AD, BE ต่างก็ตั้งได้ฉากกับ DE, และต่างก็ขนานกันด้วย.

ถ้าลากเส้น BC ให้ขนานกับ DE, ดังนั้น รูป DEBC เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า, ดังนั้น CD = BE = b.

และถ้า AD, BE อยู่บนข้างเดียวกันของเส้น AB,

ดังนั้น AC = $a-b$ และมุม ACB เป็นมุมฉากด้วย.

ตามหัวข้อเหล่านี้ก็ทำให้เราลากเส้น BC ก่อน, และแล้วนำไปสู่การสร้างดังต่อไปนี้.

สร้าง ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลาง, รัศมีเท่ากับผลต่างของรัศมีของวงกลมทั้งสองที่กำหนดให้, เขียนวงกลม, และลากเส้น BC ให้สัมผัสวงกลมนั้น. (บ.ส. 22)

ลากเส้น AC, และต่อออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลม (A) ที่จุด D.

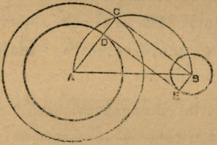
จากจุด B ลากรัศมี BE ให้ขนานกับ AD ไปทางเดียวกับ AD.

ลากเส้น DE.

ดังนั้น DE เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลมที่กำหนดให้.

ข้อสังเกต เส้นสัมผัสวง, เช่น BC, สามารถจะลากจากจุด B ไปยังวงกลมที่สร้างขึ้นได้สองเส้น, อาศัยวิธีนี้จะสร้างเส้นสัมผัสร่วมได้สองเส้นไปยังวงกลมสองวงที่กำหนดให้, เส้นสัมผัสร่วมทั้งสองนี้เรียกว่าเส้นสัมผัสร่วมตรง (Direct common tangents).

บทสร้างที่ 23.(ต่อ)



ถ้าวงกลมทั้งสองนี้อยู่ภายนอกซึ่งกันและกัน ก็สามารถเขียนเส้นสัมผัสร่วมได้อีกสองเส้น.

วิธีวิเคราะห์ ในกรณีย์นี้สมมติให้ DE สัมผัสวงกลมที่จุด D และ E และให้รัศมี AD,BE อยู่คนละข้างกับเส้น AB.

ดังนั้นลากเส้น BC, ให้ขนานกับเส้นสัมผัสร่วม DE, และพบส่วนต่อของ DC ที่จุด C; เราจะได้.

AC = AD + DC = $a+b$. และมุม ACB เป็นมุมฉาก.

ดังนั้นก็จะสร้างได้ดังต่อไปนี้.

สร้าง ให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง, รัศมีเท่ากับผลบวกของรัศมี ของวงกลมทั้งสอง ที่กำหนดให้, เขียนวงกลม, และลาก BC ให้สัมผัสวงกลมนั้น.

แล้วก็สร้างต่อไปดังคราวแรก, แต่ลากเส้น BE ให้ไปคนละทางกับ AD.

ข้อสังเกต เหมือนอย่างคราวแรก, เส้นสัมผัส; วงสองเส้นสามารถจะลากไปยังวงกลมที่สร้างขึ้น; ดังนั้นก็สามารถเขียนเส้น สัมผัสร่วมได้ สองเส้นไปยังวงกลมทั้งสองที่กำหนดให้. เส้นสัมผัสร่วมทั้งสองนี้เรียกว่า เส้นสัมผัสร่วมตามขวาง (Transverse common Tangents).

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับเส้นสัมผัสร่วม.

(เกี่ยวกับการคำนวณและการสร้าง)

1. จะมีเส้นสัมผัสร่วมกี่เส้นที่ลากได้ ดังกรณีต่อไปนี้

(i) เมื่อวงกลมสองวงที่กำหนดให้ตัดกัน;

(ii) เมื่อวงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก;

(iii) เมื่อวงกลมสองวงสัมผัสกันภายใน.

เพื่อพิสูจน์คำตอบของนักเรียน จงเขียนวงกลมสองวงมีรัศมี 1.4 นิ้ว และ 1.0 นิ้ว ตามลำดับ ดังนี้

(i) ให้ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางห่างกัน 1.0 นิ้ว;

(ii) ให้ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางห่างกัน 2.4 นิ้ว;

(iii) ให้ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางห่างกัน 0.4 นิ้ว;

(iv) ให้ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางห่างกัน 3.0 นิ้ว.

แล้วเขียนเส้นสัมผัสร่วมในข้อหนึ่ง ๆ, และบอกด้วยว่าการสร้างเส้นสัมผัสอย่างไหนสร้างได้, และอย่างไหนสร้างไม่ได้, เพราะเหตุไร ?

2. จงเขียนวงกลมสองวงรัศมี 2.0 นิ้ว และ 0.8 นิ้ว, ให้จุดศูนย์กลางห่างกัน 2.0 นิ้ว. จงเขียนเส้นสัมผัสร่วม; และหาความยาวของเส้นทั้งสองระหว่างจุดสัมผัส, โดยวิธีคำนวณและวัด.

3. จงลากเส้นสัมผัสร่วมทั้งหลายไปยังวงกลมสองวงที่กำหนดให้ ซึ่งมีรัศมียาว 0.6" และ 1.2" ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางห่างกัน 1.8 นิ้ว. จงคำนวณและหาความยาวของเส้นสัมผัสร่วมตรง.

4. วงกลมสองวงรัศมี 1.7 นิ้ว และ 1.0 นิ้ว ซึ่งมีจุดศูนย์กลางห่างกัน 2.1 นิ้ว. จงเขียนเส้นสัมผัสร่วมและหาความยาว. แล้วหาความยาวของคอร์ดร่วม. และต่อคอร์ดร่วม ออกไป แล้ว แสดงให้เห็นด้วยการวัดว่าคอร์ดร่วมนี้แบ่งครึ่งเส้นสัมผัสร่วม.

5. จงเขียนวงกลมสองวงมีรัศมี 1.6 นิ้ว และ 0.8 นิ้ว และมีจุดศูนย์กลางห่างกัน 3.0 นิ้ว. เสร็จแล้วลากเส้นสัมผัสร่วม.

6. จงเขียนเส้นสัมผัสร่วมตรงไปยังวงกลมสองวงที่เท่ากัน.

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

7. ถ้าเส้นสัมผัสร่วมตรงสองเส้น, หรือเส้นสัมผัสร่วมขวางสองเส้น, ลากไปยังวงกลมสองวง; ส่วนของเส้นสัมผัสที่อยู่ระหว่างจุดสัมผัสย่อมเท่ากัน.

8. ถ้าเส้นสัมผัสร่วมสี่เส้นลากไปยังวงกลมสองวงซึ่งอยู่ภายนอกซึ่งกันและกัน, จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสร่วมตรงสองเส้น; และเส้นสัมผัสร่วมตามขวางสองเส้นก็ดี, จะตัดกันบนเส้นต่อจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง.

9. วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอกที่จุด A และเส้นสัมผัสร่วมตรงเส้นหนึ่งลากไปสัมผัสที่จุด P และ Q: จงพิสูจน์ว่า PQ รับมุมฉากที่จุด A.

เกี่ยวกับการสร้างวงกลม.

เกี่ยวกับการเขียนวงกลมเราจะต้องทราบ (i) ตำแหน่งของจุดศูนย์กลาง, (ii) ความยาวของรัศมี.

(i) การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลาง, จะต้องกำหนดให้สองประการ; ประการหนึ่งๆ นั้นต่างก็กำหนดโลกัสซึ่งจุดศูนย์กลางนั้นอยู่, ดังนั้นโลไซทั้งสองนั้นตัดกันที่จุดใด จุดนั้นก็คือจุดศูนย์กลางที่ต้องการ, ดังอธิบายมาแล้วในเรื่องการตัดกันของโลไซ.

(ii) เมื่อหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางได้แน่นอนแล้ว, เส้นรัศมีก็หาได้ถ้าเราทราบ (หรือ สามารถหาได้) จุดหนึ่งจุดใดบนเส้นรอบวงนั้น.

เราจะเขียนวงกลมได้ ถ้ากำหนดข้อหนึ่งข้อใดในสามข้อ ต่อไปนี้.

(i) กำหนดจุดสามจุด ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงให้,

หรือ (ii) กำหนดเส้นสัมผัสสองให้สามเส้น,

หรือ (iii) กำหนดจุด ๆ หนึ่งบนเส้นรอบวง, เส้นสัมผัสหนึ่งเส้น, และจุดสัมผัสของเส้นนั้นให้.

จากสิ่งที่กำหนดให้นี้ บางทีก็สามารถเขียนวงกลมได้มากกว่าหนึ่งวง ก่อนที่จะทำแบบฝึกหัดต่อไป นักเรียนควรจะทำความเข้าใจกับโลไซต่อไปนี้.

(i) โลกัสของจุดศูนย์กลางของวงกลมหลายวงซึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้.

(ii) โลกัสของจุดศูนย์กลาง ของวงกลม หลายวง ซึ่งสัมผัสสัมผัสเส้นตรงที่กำหนดให้และตรงจุดที่กำหนดให้ด้วย.

(iii) โลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลมหลายวง ซึ่งสัมผัสวงกลมวงหนึ่งที่จุดกำหนดให้.

(iv) โลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลมหลายวง ซึ่งมีรัศมีเท่าที่กำหนดให้และสัมผัสเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย.

(v) โลกัสของจุดศูนย์กลางของวงกลมหลายวง ซึ่งมีรัศมีเท่าที่กำหนดให้ และสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้.

(vi) โลกัส ของจุดศูนย์กลาง ของวงกลมหลายวง ซึ่งสัมผัสเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้.

แบบฝึกหัด.

1. จงเขียนวงกลมให้ผ่านจุดสามจุดที่กำหนดให้.
2. ถ้าวงกลม วงหนึ่ง สัมผัสเส้นตรง PQ ที่จุด A, จุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ในเส้นตรงเส้นไหน ?

   ถ้าวงกลมผ่านจุด A และ B สองจุด ที่กำหนดให้, จุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ในเส้นตรงเส้นไหน ?

   แล้วเขียนวงกลมให้สัมผัสเส้นตรง PQ ที่จุด A และให้ผ่านจุด B ที่กำหนดให้ด้วย.

3. ถ้าวงกลมวงหนึ่งสัมผัสวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง C ที่จุด A, อยากทราบว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ในเส้นตรงเส้นไหน ?

จงเขียนวงกลมให้สัมผัสวงกลม C ที่จุด A และให้ผ่านจุด B ที่กำหนดให้ด้วย.

4. P เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง AB ระยะ 4.5 ซม. จงเขียนวงกลมสองวงต่างกันมีรัศมี 3.2 ซม. ให้ผ่านจุด P และสัมผัสเส้น AB

5. กำหนดวงกลมให้สองวง ซึ่งมีรัศมี 3.0 ซม. และ 2.0 ซม. ตามลำดับ, มีจุดศูนย์กลางห่างกัน 6.0 ซม.; จงเขียนวงกลมอีกวงหนึ่งมีรัศมี 3.5 ซม. ให้สัมผัสวงกลมทั้งสองภายนอก.

อยากทราบว่าสร้างวงกลมได้กี่วง ? จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมวงเล็กที่สุดที่สัมผัสวงกลมทั้งสองภายนอกว่ายาวเท่าไร ?

6. ถ้าวงกลมวงหนึ่งสัมผัสเส้นตรง OA และ OB, อยากทราบว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรงเส้นไหน ?

จงลากเส้น O A, O B ทำมุมระหว่างกันเท่ากับ 76°, และเขียนวงกลมให้มีรัศมี 1.2 นิ้ว ให้สัมผัสเส้นตรงทั้งสองนั้น.

7. กำหนดวงกลมวงหนึ่งให้มีรัศมี 3.5 ซม., และจุดศูนย์กลางห่างจากเส้นตรง AB 5.0 ซม., จงเขียนวงกลมสองวงซึ่งมีรัศมี 2.5 ซม. สัมผัสวงกลมและเส้นตรง AB ที่กำหนดให้.

8. จงเขียนวงกลมให้สัมผัสเส้นขนานสองเส้น และสัมผัสเส้นตรงที่ลากผ่านเส้นขนานคู่นั้นด้วย จงแสดงให้เห็นว่าสามารถจะสร้างวงกลมได้สองวง และวงกลมทั้งสองนั้นเท่ากันด้วย.

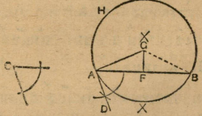
9. จงเขียนวงกลมวงหนึ่ง ให้สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ และสัมผัสเส้นตรงเส้นหนึ่งที่จุดกำหนดให้ด้วย.

10. จงเขียนวงกลมให้สัมผัสเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ และสัมผัสวงกลมวงหนึ่งที่จุดกำหนดให้.

11. จงเขียนวงกลมให้สัมผัสเส้นตรงสามเส้นที่กำหนดให้ ซึ่งไม่ขนานกันเลย อยากทราบว่าจะเขียนวงกลมนี้ได้กี่วง ?

บทสร้างที่ 24.

บนเส้นตรงที่กำหนดให้ จงเขียนส่วนของวงกลมให้มีมุมมุมหนึ่งเท่ากับที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรง เส้นหนึ่งที่กำหนดให้, และ C เป็นมุมที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างส่วนของวงกลมบน AB และให้มีมุมเท่ากับมุม C.

สร้าง ที่จุด A ในเส้นตรง AB, ทำมุม BAD ให้เท่ากับมุม C. (บ.ส. 5)

จาก A ลากเส้น AG ให้ตั้งฉากกับ AD.

แบ่งครึ่ง AB และลากเส้นตั้งฉาก FG ไปพบเส้น AG ที่จุด G (บ.ส. 2)

พิสูจน์ ลากเส้น GB,

ดังนั้นทุกๆ จุดบนเส้น FG มีระยะทางห่างจาก จุด A และ B เท่าๆ กัน; (บ.ต.14)

∴ GA = GB

ถ้าใช้ G เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี GA, เขียนวงกลมจะผ่านจุด B, และสัมผัส AD ที่จุด A.(บ.พ. 46)

ดังนั้นส่วนของวงกลม AHB, เป็นส่วนของวงกลมแย้งของมุม BAD, จะต้องมีมุมเท่ากับมุมC. (บ.พ. 49)

หมายเหตุ ในกรณีเฉพาะ เมื่อมุมที่กำหนดให้เป็นมุมฉาก, ส่วนของวงกลมที่ต้องการ ก็คือครึ่งวงกลมซึ่งมีAB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง.(บ.พ. 41)

บทแทรก ถ้าจะตัดวงกลมออกเป็นส่วนของวงกลมให้บรรจุมุมเท่าที่กำหนดให้, จะต้องลากเส้นสัมผัสวงก่อน, และจากจุดสัมผัสลากคอร์ด ให้ทำมุมกับเส้นสัมผัส ให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้.

และได้พิสูจน์มาแล้วว่าโลกัสของจุด ยอดของสามเหลี่ยมซึ่งตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน และมีมุมยอดเท่ากับ

มุมที่กำหนดให้, ก็คือส่วนโค้งของส่วนของวงกลม ซึ่งตั้งอยู่บนฐานนั้น, และมีมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้.

บทสร้าง ต่อไปนี้ ได้มาจาก ผลของการตัดกันของโลไซ.

แบบฝึกหัด.

1. จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง บนฐานที่กำหนดให้ มีมุมยอดเท่าที่กำหนดให้ และมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย.

2. จงสร้างสามเหลี่ยมให้มีฐานเท่าที่กำหนดให้, มีมุมยอดเท่าที่กำหนดให้, และ

(i) มีด้านใดด้านหนึ่งเท่าที่กำหนดให้.

(ii) มีส่วนสูงเท่าที่กำหนดให้.

(iii) มีความ ยาว ของ เส้น มัธยะฐาน (median) ซึ่งแบ่งครึ่งฐานเท่าที่กำหนดให้.

(iv) จุดปลายของเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากมุมยอดมาตั้งได้ฉากกับฐาน.

3. จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีฐาน, มุมยอดเท่าที่กำหนดให้, และจุดที่เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดมาตัดฐาน.

[ให้ AB เป็นฐาน, X เป็นจุด ๆ หนึ่งบนฐานนั้น, และ K เป็นมุมที่กำหนดให้. บนเส้น AB สร้างส่วนของวงกลม ให้มีมุมเท่ากับมุม K; แล้วสร้างส่วนโค้ง APB ให้ต่อกันเป็นเส้นรอบวง, แบ่งครึ่งส่วนโค้ง APB ที่จุด P: ลากเส้น PX, และต่อไปพบเส้นรอบวงที่ C, ดังนั้น A B C จะเป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ.]

4. จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีฐาน, มุมยอด, และผลบวกของด้านที่เหลือเท่าที่กำหนดให้.

[ให้ AB เป็นฐาน, K เป็นมุมที่กำหนดให้, และ H เป็นเส้นเท่ากับผลบวกของด้านสองด้าน. บนฐาน AB เขียนส่วนของวงกลมให้มีมุมเท่ากับมุม K, และบนข้างเดียวของฐาน AB นั้น เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้มีมุมเท่ากับครึ่งหนึ่งของมุม K. เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี H, เขียนวงกลมตัดส่วนโค้งของวงกลมหลังที่จุด X และ Y. ลากเส้น AX (หรือ AY) ตัดส่วนโค้งของวงกลมแรกที่จุด C. ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ]

5. จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้มีฐาน, มุมยอดเท่าที่กำหนดให้, และผลต่างของด้านทั้งสองที่เหลือ.

วงกลมสัมพันธ์กับรูปหลายเหลี่ยม.

นิยาม.

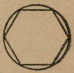
1. รูปหลายเหลี่ยม คือรูปที่ล้อมรอบด้วยด้านมากกว่าสี่ด้าน.

รูปหลายเหลี่ยมซึ่งมีห้าเหลี่ยม เรียกว่า Pentagon,

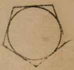
,,	,,	หกเหลี่ยม	,,	Hexagon,
,,	,,	เจ็ดเหลี่ยม	,,	Heptagon,
,,	,,	แปดเหลี่ยม	,,	Octagon,
,,	,,	สิบเหลี่ยม	,,	Decagon,
,,	,,	สิบสองเหลี่ยม	,,	Dodecagon,
,,	,,	สิบห้าเหลี่ยม	,,	Quindecagon.

2. รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า คือรูปหลายเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน, และมุมเท่ากันทุกมุม.

3. รูปหลายเหลี่ยมที่บรรจุในวงกลม, หมายความว่ามุมทุก ๆ มุมต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม; และวงกลมล้อมรอบหรือประกอบรูปหลายเหลี่ยม หมายความว่าเส้นรอบวงต้องผ่านมุมยอดของรูปหลายเหลี่ยมทุก ๆ มุม.

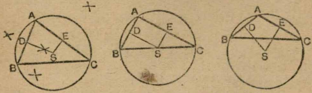


4. วงกลมบรรจุในรูปหลายเหลี่ยมหมายความว่า เส้นรอบวงของวงกลมต้องสัมผัสด้านทุก ๆ ด้าน ของรูปหลายเหลี่ยม, และรูปหลายเหลี่ยมล้อมรอบหรือประกอบวงกลม, หมายความว่าด้านทุก ๆ ด้านของรูปหลายเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัสวงของวงกลมนั้น.



บทสร้างที่ 25.

จงเขียนวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC.

สร้าง ลากเส้น DS และ ES ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB และ AC ตามลำดับ ตัดกันที่จุด S. (บ.ส. 2)

ดังนั้น S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ.

พิสูจน์ ∵ ทุกๆจุดในเส้น DS มีระยะทางห่าง จาก A และ B เท่าๆกัน; (บ.ส. 14)

และทุกๆจุดในเส้น ES มีระยะทางห่าง จาก A และ C เท่าๆกัน; (บ.ส. 14)

∴ S มีระยะทางห่างจาก A, B และ C เท่าๆกัน.

เอา S เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี SA, เขียนวงกลม; วงกลมนี้จะผ่านจุด B และ C, และเป็นวงกลมที่ล้อมรอบ; ตามต้องการ.

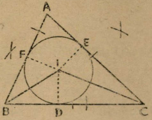
ข้อสังเกต ถ้ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม, จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจะอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม: ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก, จุดศูนย์กลางจะอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก: ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน, จุดศูนย์กลางจะอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม.

หมายเหตุ ถ้าลากเส้นจากจุด S ให้ไปแบ่งครึ่งด้าน BC แล้ว เส้นที่ลากนี้จะตั้งได้ฉากกับ BC.

ดังนั้น เส้นตั้งฉาก ที่ลากจากจุดกึ่งกลาง ของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมย่อมพบกันที่จุดๆเดียว, จุดที่พบกันนั้น เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น.

บทสร้างที่ 26.

จงเขียนวงกลมบรรจุในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A B C เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องบรรจุวงกลมลงในสามเหลี่ยม ABC.

สร้าง ลากเส้น BI, CI ให้แบ่งครึ่งมุม ABC และมุม A C B ตามลำดับ และแบ่งครึ่งมุมกันที่จุด I. (บ.ส. 1)

ดังนั้น I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ตามต้องการ.

พิสูจน์ จาก I ลากเส้น ID, IE, IF ให้ตั้งฉากกับ BC, CA, AB.

เพราะฉนั้นทุก ๆ จุดในเส้น BI จะมีระยะทางห่างจากเส้น BC, BA เท่า ๆ กัน (บ.ส. 15)

∴ ID = IF.

และทุก ๆ จุดในเส้น CI จะมีระยะทางห่างจากเส้น CB, CA เท่า ๆ กัน, (บ.ส. 15)

∴ ID = IE.

∴ ID = IF = IE.

เอา I เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ID เขียนวงกลม; วงกลมนี้จะผ่านจุด F และ E ด้วย.

ดังนั้นวงกลมจะสัมผัสด้าน BC, CA, AB, เพราะว่ามุมที่ D, E และ F เป็นมุมฉาก.

∴ วงกลม DEF บรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC.

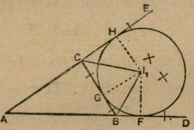
หมายเหตุ ถ้าจากเส้น AI, แล้ว AI จะแบ่งครึ่งมุม BAC: ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมย่อมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง, จุดที่พบกันนี้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุในรูปสามเหลี่ยม.

นิยาม.

วงกลมที่สัมผัสด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และสัมผัสส่วนต่อของด้านอีกสองด้าน เรียกว่าวงกลมบรรจุภายนอกรูปสามเหลี่ยม (Escribed circle).

บทสร้างที่ 27.

จงเขียนวงกลมบรรจุภายนอกรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A B C เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน AB, AC ต่อออกไปถึงจุด D และ E.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างวงกลมให้สัมผัสด้าน BC และส่วนต่อของ AB, AC.

สร้าง ลากเส้น BI_1, CI_1 ให้แบ่งครึ่งมุม CBD และ BCE ตามลำดับไปตัดกันที่จุด I_1 (บ.ส. 1) ดังนั้น I_1 จะเป็นจุดศูนย์กลางที่ต้องการ.

พิสูจน์ จากจุด I_1 ลากเส้น I_1F, I_1G, I_1H ให้ตั้งฉากกับ AD, BC, AE ตามลำดับ

ดังนั้นทุก ๆ จุดบนเส้น BI_1 จะมีระยะทางห่างจาก BD,BC เท่า ๆ กัน (บ.ศ. 15)

$$\therefore\ I_1F = I_1G.$$

ทำนองเดียวกัน $I_1G = I_1H$.

$$\therefore\ I_1F = I_1G = I_1H.$$

เอา I_1 เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี I_1F เขียนวงกลม, วงกลมนี้จะผ่านจุด G และ H ด้วย.

ดังนั้นวงกลมจะสัมผัสด้าน AD,BC และ AE, เพราะว่ามุมที่จุด F, G,H. ต่างก็เป็นมุมฉาก.

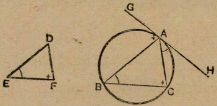
∴ วงกลม FGH เป็นวงกลมบรรจุภายนอกของสามเหลี่ยม A B C.

หมายเหตุ 1. เราจะเห็นได้ว่า สามเหลี่ยมทุก ๆ รูปมีวงกลมบรรจุภายนอก สามวง จุดศูนย์กลางเรียกว่าเอกซเซ็นเตอร์ (Excentres).

หมายเหตุ 2. ถ้าลากเส้น AI_1 แล้ว AI_1 จะแบ่งครึ่งมุม B A C, ดังนั้นจะได้เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกมุมของรูป สามเหลี่ยมกับเส้นแบ่งครึ่งมุม ที่สามของสาม-เหลี่ยม, ย่อมพบกันที่จุด ๆ เดียว จุดที่พบกันนี้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายนอก.

บทสร้างที่ 28.

ในวงกลมที่กำหนดให้ จงบรรจุสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้มีมุมทั้งสามเท่ากับมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้มุมต่อมุม.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A B C เป็นวงกลมวงหนึ่งที่กำหนดให้, และ D E F เป็นสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องบรรจุสามเหลี่ยมในวงกลม A B C ให้มีมุมเท่ากับ △ D E F มุมต่อมุม.

วิธีวิเคราะห์ ให้ △ A B C บรรจุในวงกลม และมีมุมเท่ากับ △D E F, มุมต่อมุม คือมุม B = E, มุม C = มุม F, มุม A = มุม D.

และมุม B เป็นมุมในส่วน ของวงกลม A B C, ดังนั้นจะเท่ากับมุมที่อยู่ระหว่างคอร์ด AC กับเส้นสัมผัสที่ปลายคอร์ดนั้น (บ.พ. 49)

ดังนั้นถ้าลากเส้นสัมผัสส์ GAH ให้สัมผัสส์วงกลมที่ A,

แล้วมุม HAC = มุม E;

แล้วมุม GAB = มุม F.

โดยการทำตามข้อนี้เหล่านี้ถอยหลัง, ก็จะได้การสร้างดังนี้.

สร้าง ที่จุด A บนเส้นรอบวงของวงกลม ABC เขียนเส้นสัมผัสส์วง GAH. (บ.พ. 22)

ที่จุด A ทำมุม GAB ให้เท่ากับมุม F, และทำมุม HAC ให้เท่ากับมุม E.

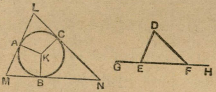
ลากเส้น BC.

ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ.

หมายเหตุ ในการเขียนภาพที่ใหญ่ นักเรียนควรจะแสดงเส้นสร้าง สำหรับเส้นสัมผัสส์ GAH กับมุม GAB, HAC และในบทต่อไปก็ควรทำเช่นเดียวกัน.

บทสร้างที่ 29.

จงเขียนสามเหลี่ยมล้อมรอบวงกลมที่กำหนดให้ และมีมุมทั้งสามเท่ากับมุมของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้มุมต่อมุม.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นวงกลมที่กำหนดให้, และ DEF เป็นสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างสามเหลี่ยมล้อมรอบวงกลม ABC ให้มีมุมเท่ากับ △ DEF มุมต่อมุม.

วิธีวิเคราะห์ สมมติให้ LMN เป็นสามเหลี่ยมที่ล้อมรอบวงกลม มีมุม M = มุม E, มุม N = มุม F, และมุม L = มุม D.

ให้ลากเส้นรัศมี KA, KB, KC ซึ่งลากไปยังจุดสัมผัสของด้านทั้งสาม; ดังนั้นเส้นสัมผัส LM, MN, NL ก็สามารถจะสร้างขึ้นได้ ถ้าเราทราบความ

สัมพันธ์ ระหว่าง ตำแหน่งของ KA, KB, KC, นั่นก็คือ ถ้าเรารู้ มุม BKA, และมุม BKC.

จากสี่เหลี่ยม B K A M เพราะว่า มุม B และมุม A ต่างก็เป็นมุมฉาก,

∴ มุม $BKA = 180^\circ - M = 180^\circ - E$;

(ทำนองเดียวกัน) มุม $BKC = 180^\circ - N = 180^\circ - F$.

ดังนั้นเราก็ได้การสร้างดังนี้.

สร้าง ต่อด้าน EF ออกไปทั้งสองข้าง ถึงจุด G และ H.

ที่จุด K ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ABC, ลากเส้นรัศมี KB.

ที่ K ทำมุม BKA ให้เท่ากับมุม DEG,

และทำมุม B K C ให้เท่ากับ มุม DFH

ที่จุด A,B,C ลากเส้น LM, MN, NL ให้ตั้งฉากกับ KA, KB, KC.

ดังนั้น LNM เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ.

(นักเรียนควรจะพิสูจน์ด้วย)

แบบฝึกหัด.

เกี่ยวกับวงกลมและสามเหลี่ยม.

(บรรจุและล้อมรอบ)

1. ในวงกลมซึ่งมีรัศมี 5 ซ.ม. จงบรรจุรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า; และเขียนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าล้อมรอบวงกลมนี้อีกรูปหนึ่ง. จงอธิบายวิธีสร้างและให้เหตุผลในการสร้างด้วย.

2. จงเขียนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านที่ยาว 8 ซ.ม., และหาความยาวของรัศมีของวงกลมที่บรรจุภายใน, ล้อมรอบ และบรรจุภายนอกรูปสามเหลี่ยมนั้นด้วยวิธีคำนวณและวัด (ตอบให้ถึงมิลลิเมตร).

และจงอธิบายด้วยว่า ทำไมรัศมีของวงกลมที่สองและสาม ย่อมเป็นสองเท่าและสามเท่าตามลำดับของรัศมีวงแรก.

3. จงเขียนรูปสามเหลี่ยมตามสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(i) $a = 2.5$ นิ้ว $B = 66^\circ$ $C = 50^\circ$

(ii) $a = 2.5$ นิ้ว $B = 72^\circ$ $C = 44^\circ$

(iii) $a = 2.5$ นิ้ว $B = 41^\circ$ $C = 23^\circ$

แล้วเขียนวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งๆ และวัดรัศมีของวงกลมทั้งสามที่ทั้ง ๆ ส่องตำแหน่ง. จงให้เหตุผลว่าทำไมเส้นรัศมีทั้งสามนี้ยาวเท่ากัน, โดยใช้การเปรียบเทียบมุมยอดของสามเหลี่ยม.

4. จงบรรจุรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าลงในวงกลมซึ่งมีรัศมี 4 ซม. จงคำนวณความยาวของด้านให้ถึงมิลลิเมตร, และสอบผลด้วยวิธีวัด.

จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปนั้น, และพิสูจน์ว่าจะมีพื้นที่เป็นหนึ่งในสี่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ล้อมรอบวงกลมนั้น.

5. ในสามเหลี่ยม ABC, ถ้า I เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมีของวงกลมที่บรรจุในสามเหลี่ยม, จงพิสูจน์ว่า

$\triangle IBC = \frac{1}{2}ar$; $\triangle ICA = \frac{1}{2}br$;

$\triangle IAB = \frac{1}{2}cr$. แล้วจงพิสูจน์ว่า

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

แล้วสอบดูสูตรนี้ด้วยการวัดสำหรับสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามยาว 9 ซม. 8 ซม. และ 7 ซม.

6. ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมที่บรรจุภายนอกตรงข้ามกับมุม A พิสูจน์ว่า

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(b + c - a)\, r$$

ถ้า $a = 5$ ซม., $b = 4$ ซม., $c = 3$ ซม. ให้สอบสูตร นี้ด้วยการวัดรัศมี.

7. จงวัดรัศมีของวงกลมที่ประกอบรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีด้าน $a = 6.3$ ซม.; $b = 3.0$ ซม.; $c = 5.1$ ซม.

จงเขียนและวัดเส้นตั้งฉากจากจุด A, B, C. ไปยังด้านตรงข้าม. ถ้าความยาวของเส้นตั้งฉากทั้งสามเท่ากับ p_1, p_2, p_3 จงแสดงให้เห็นว่า รัศมีของวงกลมที่ประกอบ $= \frac{bc}{2\,p_1} = \frac{ca}{2\,p_2} = \frac{ab}{2\,p_3}$

แบบฝึกหัด.

เกี่ยวกับวงกลมและจตุรัส.

(บรรจุภายในและล้อมรอบ)

1. จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัส บรรจุในวงกลม ซึ่งมีรัศมี 1.5 นิ้ว, แล้วคำนวณหาความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมนี้เป็นนิ้วทศนิยมสองตำแหน่ง และสอบดูด้วยการวัดและหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจตุรัสนี้ด้วย.

2. จงเขียนสี่เหลี่ยมจตุรัสประกอบวงกลม ซึ่งมีรัศมี 1.5 นิ้ว; จงแสดงเส้นสร้างทุก ๆ เส้น.

แล้วพิสูจน์ว่าพื้นที่ ของสี่เหลี่ยมจตุรัส ที่ประกอบวงกลมนั้น, เป็นสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบรรจุในวงกลม.

3. จงเขียนสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านซึ่งยาว 7.5 ซม., และเขียนวงกลมบรรจุในสี่เหลี่ยมจตุรัสนี้; และจงพิสูจน์การสร้างของท่านด้วยวิธีพับตามแกน.

4. จงเขียนวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีด้านยาวด้านละ 6 ซม. แล้ววัดเส้นผ่าศูนย์กลางให้ถึงมิลลิเมตร, และสอบดูผลการเขียนรูปด้วยวิธีคำนวณ.

5. ในวงกลมที่มีรัศมี 1.8 นิ้ว จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านยาวยาว 3.0 นิ้ว บรรจุในวงกลมนี้. จงหาความยาวของอีกด้านหนึ่งโดยประมาณ.

จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมดที่บรรจุในวงกลม สี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้นที่มีพื้นที่มากที่สุด.

6. สี่เหลี่ยมจัตุรัสและสามเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลมวงหนึ่ง ถ้า a และ b เป็นความยาวของด้านของรูปทั้งสอง จงพิสูจน์ว่า $3a^2 = 2b^2$.

7. ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบรรจุในวงกลมวงหนึ่ง, และ P เป็นจุดใดๆหนึ่งบนส่วนโค้ง AD: จงพิสูจน์ว่าด้าน AD รับมุมๆ หนึ่งที่จุด P โตเป็นสามเท่าของมุมที่จุด P ซึ่งกางรับด้านใดด้านหนึ่ง.

(บทสร้าง บอกวิธีสร้าง และพิสูจน์ด้วย)

8. จงสร้างสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้ล้อมรอบวงกลมที่กำหนดให้.

9. จงสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส บรรจุในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD, ที่กำหนดให้ ให้มุมๆ หนึ่งของสี่เหลี่ยมที่บรรจุอยู่บนด้าน AB ที่จุด X.

10. ในสี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้ จงบรรจุสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่น้อยที่สุดลงไป.

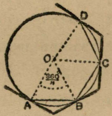
11. จงเขียน (i) วงกลมวงหนึ่ง, (ii) สี่เหลี่ยมจตุรัสล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้.

12. จงบรรจุ (i) วงกลมวงหนึ่ง, (ii) สี่เหลี่ยมจตุรัส ลงในเสี้ยวหนึ่ง ($\frac{1}{4}$) ของวงกลมที่กำหนดให้.

เกี่ยวกับวงกลม
และรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า.

บทสร้างที่ 30.

จงสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า (i) บรรจุ (ii) ประกอบวงกลมที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบรรจุและประกอบวงกลมนั้น.

วิธีวิเคราะห์ ให้ AB, BC, CD...... เป็นด้านที่ได้ถัดกันของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งบรรจุในวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O ดังนั้น AOB, BOC, COD,... เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าและเท่ากันทุก ๆ รูป และถ้ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามี n ด้าน, มุม AOB, BOC, COD, ... ต่างก็ $= \frac{360^\circ}{n}$

สร้าง 1. สมมติว่าสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมี n ด้านบรรจุในวงกลม, ให้สร้างมุม AOB ที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{360^\circ}{n}$ ก็จะได้ความยาวของด้าน ๆ หนึ่ง คือ AB; แล้วเขียนคอร์ดให้ยาวเท่ากับ AB ไปรอบ ๆ วงกลม. ก็จะได้รูปหลายเหลี่ยมตามต้องการ โดยมีด้านเท่ากันและมุมก็เท่ากันด้วย.

2. ถ้าสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมี n ด้านประกอบวงกลม, ให้สร้างมุมเช่นเดียวกับข้างบนแล้ว ก็จะได้จุด A, B, C, D, ... เสร็จแล้ว ลากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A, B, C, D, ... ก็จะได้รูปหลายเหลี่ยมตามต้องการ, และพิสูจน์ได้ว่ามีด้านเท่ากันและมุมเท่ากันด้วย.

หมายเหตุ การสร้างนี้ควรให้นักเรียนสร้างเฉพาะมุม $\frac{360^\circ}{n}$ ซึ่งสามารถสร้างได้ด้วยไม้บรรทัดกับวงเวียนเท่านั้น.

แบบฝึกหัด.

1. จงบรรจุวงกลมวงหนึ่งซึ่งมีรัศมี 4 ซ.ม. (i) ในรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า; (ii) ในรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า; (iii) ในรูปสิบสองเหลี่ยมด้านเท่า โดยใช้ไม้บรรทัดและวงเวียนเท่านั้น.

2. จงสร้าง (i) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า; (ii) รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า ประกอบวงกลมซึ่งมีรัศมี 1.5 นิ้ว.

จงสอบการสร้างด้วยขาวัด, และพิสูจน์ด้วย.

3. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า บรรจุในวงกลมวงหนึ่งที่กำหนดให้, a และ b เป็นความยาวของด้านของรูปทั้งสองนี้: แสดงพิสูจน์ว่า

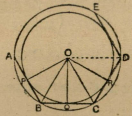
(i) พื้นที่ของสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}$ (พื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่า)

(ii) $a^2 = 3b^2$.

4. อาศัยไม้โปรแทรกเตอร์ บรรจุรูป เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าลงในวงกลม ซึ่งมีรัศมี 2 นิ้ว. จงคำนวณและวัดมุม; และวัดความยาวของด้านด้วย.

บทสร้างที่ 31.

จงสร้างวงกลม (i) บรรจุ (ii) ประกอบรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ A B C D E เป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมี n ด้าน.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างวงกลม (i) บรรจุ (ii) ประกอบรูป A B C D E.........

สร้าง แบ่งครึ่งมุม A B C, B C D ด้วยเส้น B O, C O พบกันที่จุด O.

ดังนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองซึ่งบรรจุและประกอบ.

พิสูจน์ ลากเส้น O D;

ใน △ O C B กับ △ O C D

$\because \begin{cases} OC \text{ เป็นด้านร่วม}, \\ BC = CD, \\ \angle OCB = \angle OCD, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle OCB = \triangle OCD$ ทุกประการ (บ.พ. 4)

$\therefore$ มุม OBC = มุม ODC

แต่มุม OBC = ครึ่งหนึ่งของมุม ABC ตามสร้าง;

$\therefore$ มุม ODC = ครึ่งหนึ่งของมุม ABC,

หรือ = ครึ่งหนึ่งของมุม CDE,

$\therefore$ OD แบ่งครึ่งมุม CDE.

ดังนั้นเส้นแบ่งครึ่งมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ย่อมพบกันที่จุด ๆ เดียว.

(i) ดังนั้น $OB = OC = OD$ .... ; (บ.พ. 6)

$\therefore$ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมประกอบ.

(ii) ลากเส้น OP, OQ, OR, ... ให้ตั้งฉากกับ AB, BC, CD, ... ก็พิสูจน์ได้ว่า $OP = OQ$

= OR จากรูป $\triangle OBP$ กับ $\triangle OBQ$ ซึ่งเท่ากันทุกประการ.

ดังนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายใน.

แบบฝึกหัด.

1. จงเขียนรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านซึ่งยาว 2.0 นว. แล้วเขียนวงกลมบรรจุและประกอบรูปหกเหลี่ยมด้านเท่านั้น. คำนวณและวัดเส้นผ่าศูนย์กลางเป็นนิวทศนิยมสองตำแหน่ง.

2. จงพิสูจน์ให้เห็นว่าพื้นที่ของหกเหลี่ยมด้านเท่าบรรจุในวงกลมเป็นสามในสี่ของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่ประกอบวงกลมนั้น.

จงหาพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลมซึ่งมีรัศมี 10 ซม. เป็นตารางเซ็นติเมตรทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

3. ถ้า A B C เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วบรรจุในวงกลมวงหนึ่ง, และมุมที่ฐาน คือ B และ C เป็นสอง

เท่าของมุมยอด A; จงพิสูจน์ว่า BC เป็นด้านหนึ่งของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลมนี้.

4. จงสร้าง (i) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า; (ii) รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่าบนด้านซึ่งยาว 4 ซ.ม. (ห้ามใช้ไม้โปรแทรกเตอร์).

จงหาพื้นที่และรูปทั้งสองนี้โดยประมาณ.

เส้นรอบวงของวงกลม.

จากการทดลองและการวัดจะเห็นได้ว่า ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม คืออย่างหยาบๆเป็น $3\frac{1}{7}$ เท่าของความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง:

$$\text{นั่นคือ} \quad = \frac{\text{เส้นรอบวง}}{\text{เส้นผ่าศูนย์กลาง}} = 3\frac{1}{7} \text{ (โดยใกล้เคียง);}$$

และสามารถพิสูจน์ได้ว่า ค่านี้เหมือนกันหมดทุกวงกลม.

อัตราส่วนที่ได้นี้ถ้าหาจากอกบทพิสูจน์หนึ่งก็จะได้ค่าที่ถูกต้อง คือ 3.1416; ถ้าเป็นทศนิยม 10 ตำแหน่งก็จะได้ 3.1415926536. ดังนั้นค่าของ $3\frac{1}{7}$ (หรือ 3.1428) มาก

ไปหน่อย; แต่จะมีค่าถูกต้องแต่เพียงทศนิยม 2 ตำแหน่งเท่านั้น.

อัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวงกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมใดๆ ก็ตาม เขาใช้อักษรกรีกแทน คือ π อ่านว่า 'พาย' ดังนั้น

เส้นรอบวง = เส้นผ่าศูนย์กลาง $\times \pi$.

ถ้าให้ r เป็นรัศมีของวงกลม,

เส้นรอบวง $= 2r \times \pi = 2\pi r$;

ค่าของ π เราจะให้เป็นอย่างหนึ่งอย่างใด คือ $3\frac{1}{7}$, 3.1416 หรือ 3.1415926536, ก็แล้วแต่ว่าเราจะต้องการผลนั้นแค่ไหน.

หมายเหตุ วิธีพิสูจน์หาค่าของ π อย่างถูกต้องนั้น ยังไม่สามารถจะหาได้ในทันที แต่จะหาค่าได้ด้วยวิธีทดลอง ซึ่งถูกต้องเพียงทศนิยมสองตำแหน่ง.

ดังตัวอย่าง ใช้ชิ้นกระดาษยาวๆ พันรอบรูปทรงกระบอก, แล้วให้ปลายทั้งสองทับกัน, ตรงที่พันทับกันนั้น ใช้ปลายเข็มหมุดปักลงไปให้ทะลุกระดาษทั้งสองชั้น. เสร็จแล้วเอาชิ้นกระดาษนั้นคลี่ออกไปให้เป็น

เส้นตรง, แล้ววัดระยะระหว่างรูทั้งสองที่ถูกเข็มหมุดเจาะก็จะเป็นความยาวของเส้นรอบวง; และวัดเส้นผ่าศูนย์กลางเสร็จแล้ว เอาค่าของเส้นรอบวงตั้ง หารด้วยความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง.

ตัวอย่างที่ 1 จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าของ π. และหาผลเฉลี่ยของสามอันนั้นด้วย.

เส้นรอบวง	เส้นผ่าศูนย์กลาง	ค่าของ π
16.0 ซม.	5.1 ซม.	
8.8 "	2.8 "	
13.5 "	4.3 "	

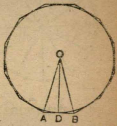
ตัวอย่างที่ 2 ถ้าใช้เส้นด้ายพันรอบๆ รูปทรงกระบอกเป็นจำนวนคู่ ปรากฏว่าความยาวที่พันไป 20 รอบ นั้นเท่ากับ 75.4 นิ้ว เส้นผ่าศูนย์กลางของรูปทรงกระบอกเท่ากับ 1.2 นิ้ว: จงหาค่าของ π อย่างหยาบๆ.

ตัวอย่างที่ 3 ล้อๆ หนึ่งของรถจักรยาน, มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 28 นิ้ว, ถ้าหมุนไป 400 รอบ ได้ระยะทาง 977 หลา จากผลอันนี้จงหาค่าของ π.

พื้นที่ของวงกลม.

ให้ AB เป็นความยาวของด้านๆหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมี n ด้าน และประกอบวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O และรัศมีเท่ากับ r. ดังนั้นเราจะได้.

พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม



$$= n\cdot \triangle AOB$$

$$= n.\tfrac{1}{2}AB.OD$$

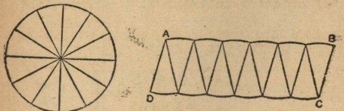
$$= \tfrac{1}{2}.\ nAB.r$$

$= \frac{1}{2}$ (เส้นขอบเขคของรูปหลายเหลี่ยม) $\times r$ และอันนี้จะเป็นจริงเสมอไปไม่ว่าด้านของรูปหลายเหลี่ยมจะมีมากน้อยเท่าไร.

แต่ถ้าจำนวนด้านเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด, เส้นขอบเขตและพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมจะแตกต่างกับเส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลมเพียงเล็กน้อยเท่านั้น; ดังนั้นจึงกล่าวในที่สุดได้ว่า

$$\text{พื้นที่ของวงกลม} = \frac{1}{2} \cdot \text{เส้นรอบวง} \times r$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \times r$$
$$= \pi r^2$$

อีกวิธีหนึ่ง



สมมติว่าแบ่งวงกลมออกเป็น สามเหลี่ยมฐานโค้ง เป็นจำนวนคู่ มีมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน: ให้สามเหลี่ยมฐานโค้งมีอยู่ n รูป

แล้วจัดวางรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งให้ด้านต่อด้านชิดกันและฐานสลับกันดังในรูป;

ดังนั้น พื้นที่ของวงกลม= พื้นที่ของรูป ABCD;

และจะเป็นจริงเสมอไป ถึงแม้ว่า n จะมีจำนวนมากขึ้น.

เมื่อจำนวนสามเหลี่ยมฐานโค้งมากขึ้น, ความยาวของส่วนโค้งก็สั้นลง;

ดังนั้น (i) เส้นเชิงค์ AB, CD ก็จะเหยียดออกไป

กลายเป็นเส้นตรง, และ

(ii) มุมทั้งที่ D และ B ก็จะกลายเป็นมุมฉาก.

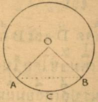
ดังนั้นเมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด, ในที่สุดรูป ABCD จะกลายเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, ด้านยาวคือครึ่งหนึ่งของเส้นรอบวงของวงกลม, และด้านกว้างคือรัศมี.

$\therefore$ พื้นที่ของวงกลม $= \frac{1}{2} \cdot$ เส้นรอบวง $\times$ รัศมี

$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง.



ถ้ารัศมีสองเส้นของวงกลมทำมุม 1° ที่จุดศูนย์กลาง, มันก็จะตัดออกเป็น

(i) ส่วนโค้งซึ่งมีความยาว $= \frac{1}{360}$ ของเส้นรอบวง;

และ (ii) สามเหลี่ยมฐานโค้งซึ่งมีพื้นที่ $\frac{1}{360}$ ของพื้นที่ของวงกลม;

$\therefore$ ถ้ามุม AOB กาง D องศา, ดังนั้น

(i) ส่วนโค้ง AB $= \frac{D}{360}$ ของเส้นรอบวง;

(ii) พื้นที่ของสามเหลี่ยมฐานโค้ง AOB

$= \frac{D}{360}$ ของพื้นที่วงกลม

$= \frac{D}{360} \times (\frac{1}{2}$ เส้นรอบวง $\times$ รัศมี$)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{D}{360}$ ของเส้นรอบวง $\times$ รัศมี

$= \frac{1}{2}$ ส่วนโค้ง AB $\times$ รัศมี.

พื้นที่ของส่วนของวงกลม.

จากรูปข้างบนพื้นที่ของส่วนของวงกลม (segment) น้อย A C B จะหาได้ โดยเอา พื้นที่ของสามเหลี่ยม A O B ไปลบออกจาก พื้นที่ ของสามเหลี่ยมฐานโค้ง OACB.

ดังนั้น พื้นที่ ของ ส่วน ของวงกลม A B C = สามเหลี่ยมฐานโค้ง OA CB – สามเหลี่ยม A O B ส่วนพื้นที่ของส่วนของวงกลม (segment) ใหญ่ ก็จะหาได้ โดย เอาพื้นที่ ของส่วน ของ วงกลมน้อยไป ลบพื้นที่ของวงกลม.

แบบฝึกหัด.

[ทุกๆข้อจงเลือกใช้ ค่าของ π ให้ได้ผลถูกต้องตามความประสงค์.]

1. จงหาความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งมีรัศมี (i) 4.5 ซม.

(ii) 100 ซม. ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

2. จงหาพื้นที่ของวงกลมเป็นตารางนิ้ว ซึ่งมีรัศมียาว (i) 2.3 นิ้ว.

(ii) 10.6 นิ้ว ทศนิยมสองตำแหน่ง.

3. จงหาความยาวของเส้นรอบวง และพื้นที่ของวงกลมซึ่งบรรจุในรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีด้านยาวด้านละ 3.6 ซม. ทศนิยมสองตำแหน่ง.

4. สี่เหลี่ยมจตุรัส บรรจุอยู่ใน วงกลมซึ่งมีรัศมี 7.0 ซม. จงหาผลต่างของพื้นที่ของรูปทั้งสอง เป็นตารางเซ็นติเมตร ให้ตอบเป็นจำนวนเต็ม.

5. จงหาพื้นที่ของรูปวงแหวน ซึ่งอยู่ระหว่างเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน และมีรัศมียาว 5.7 นิ้ว กับ 4.3 นิ้ว ตอบเป็นตารางนิ้วทศนิยมสองตำแหน่ง.

6. จงพิสูจน์ให้เห็นว่า พื้นที่ ของ วงแหวน ซึ่งอยู่ระหว่าง เส้นรอบวง ของวงกลม สองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เท่ากับพื้นที่ ของวงกลม ซึ่งมีรัศมียาว เท่ากับเส้นสัมผัสวงของวงกลมใน ซึ่งลากจากเส้นรอบวงของวงกลมนอก.

7. สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านยาวเป็น 8.0 ซ.ม. และกว้าง 6.0ซ.ม. บรรจุในวงกลมหนึ่ง จงคำนวณพื้นที่ของส่วนของวงกลม ที่อยู่นอกรูป สี่เหลี่ยมผืนผ้า ทั้งสี่รูป เป็น ตร. ซม. ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

8. จงหา ความ ยาว ของ ด้าน ๆ หนึ่ง ของ รูปสี่-เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับวงกลมที่มีรัศมียาว 5นิ้ว ตอบเป็นนิ้วทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

9. พื้นที่ ของวงแหวน ซึ่งอยู่ ระหว่าง เส้น รอบวง ของวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เท่ากับ 22 ตารางนิ้ว; และความกว้างของวงแหวนเท่ากับ 1.0 นิ้ว, กำหนด $\pi = \frac{22}{7}$, จงหารัศมีของวงกลมทั้งสอง.

10. จงหาผลต่างระหว่างพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ประกอบและบรรจุในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีความยาวด้านละ 4นิ้ว ตอบเป็นตารางนิ้วทศนิยม 2ตำแหน่ง.

แบบฝึกหัด.

เกี่ยวกับวงกลมบรรจุภายใน, ประกอบ, และบรรจุภายนอกของรูปสามเหลี่ยม.

(เกี่ยวกับการพิสูจน์ด้วย.)

1. จงเขียนวงกลมวงหนึ่งให้สัมผัสเส้นขนานสองเส้นกับเส้นที่ลากตัดเส้นขนานคู่นี้. จงแสดงให้เห็นว่าเขียนวงกลมได้สองวง, และเท่ากันด้วย.

2. สามเหลี่ยมทั้งหลาย ซึ่งมีฐานเท่ากันและมุมยอดเท่ากัน ย่อมมีวงกลมที่ประกอบเท่ากันด้วย.

3. A B C เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, I, S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุและล้อมรอบ; ถ้า A, I, S เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน, จงพิสูจน์ว่า AB=AC.

4. ผลบวกของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุและประกอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเท่ากับผลบวกของด้านทั้งสองที่ประกอบมุมฉาก.

5. ถ้าวงกลมวงหนึ่งบรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัสด้านทั้งสามที่จุด D, E, F; จงพิสูจน์ว่ามุมของรูปสามเหลี่ยม DEF เป็น

$\frac{A}{2}$, $90 - \frac{A}{2}$, $90 - \frac{B}{2}$, $90 - \frac{C}{2}$ ตามลำดับ.

6. ถ้า I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC และ I_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายนอกซึ่งสัมผัสด้าน BC; จงพิสูจน์ว่า I, B, I_1, C เป็นจุดที่วงกลมประกอบได้.

7. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลต่างของด้านสองด้าน ย่อมเท่ากับผลต่างของส่วนทั้งสอง ของด้านที่สามซึ่งถูกแบ่งด้วยจุดสัมผัสอันเกิดจากวงกลมบรรจุภายใน.

8. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, I และ S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายใน และประกอบรูปสามเหลี่ยมนั้น: จงพิสูจน์ว่า IS รับมุมที่จุด A เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างของมุมที่ฐาน.

และพิสูจน์ว่าถ้า AD ลากมาตั้งฉากกับ BC, แล้ว AI จะแบ่งครึ่งมุม DAS.

9. เส้นทะแยงมุมทั้งสองของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD ตัดกันที่จุด O: จงพิสูจน์ว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมสี่รูป คือ AOB, BOC, COD, และ DOA เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

10. ในสามเหลี่ยม ABC, ถ้า I เป็นจุดศูนย์-กลางของวงกลมที่บรรจุในสามเหลี่ยมนั้น, และถ้า AI ต่อออกไปพบเส้นรอบวง ของวงกลมที่จุด O; จงพิสูจน์ว่า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม BIC.

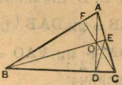
11. กำหนดฐาน, ส่วนสูง, และรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบ จงสร้างสามเหลี่ยม.

12. วงกลมสามวง ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง A, B, C สัมผัสซึ่งกันและกันภายนอกที่จุด D,E,F: จงพิสูจน์ว่า วงกลมที่บรรจุภายในสามเหลี่ยม ABC เป็นวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม DEF.

บทพิสูจน์และตัวอย่างเกี่ยวกับวงกลม และสามเหลี่ยม.

จุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม.

1. เส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้าม ย่อมพบกันที่จุด ๆ เดียว.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, และ AD,BE เป็นเส้นตั้งฉากลากจากจุด A และ B ไปยังด้านตรงข้าม; และตัดกันที่จุด O.

ลากเส้น CO และต่อออกไปพบ AB ที่จุด F.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า CF ตั้งได้ฉากกับ AB.

พิสูจน์ ลากเส้น DE.

∵ มุม OEC และมุม ODC ต่างก็เป็นมุมฉาก.

∴ จุด O, E, C, D เป็นจุดคอนไซคลิค: (บทกลับ บ.พ. 40)

$\therefore$ มุม DEC = มุม DOC; (บ.พ. 39)

แต่มุม DOC = มุม FOA; (บ.พ. 3)

$\therefore$ มุม DEC = มุม FOA.

และ $\because$ มุม AEB กับ มุม ADB ต่างก็เป็นมุมฉาก,

$\therefore$ จุด A, E, D, B เป็นจุดที่วงกลมผ่านได้:

$\therefore$ มุม DEB = มุม DAB (บ.พ. 39)

$\therefore$ มุม FOA + มุม FAO = มุม DEC + มุม DEB = มุมฉากหนึ่ง:

$\therefore$ มุมที่เหลือ AFO = มุมฉากหนึ่งด้วย: (บ.พ. 16)

นั่นก็คือ CF ตั้งได้ฉากกับ AB.

ดังนั้นเส้นตั้งฉาก AD, BE, CF พบกันที่จุด O.

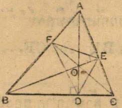
ซ.ต.พ.

นิยาม.

(i) จุดที่ตัดกันของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากมุมยอดทั้งสามไปยังด้านตรงข้ามของสามเหลี่ยม เรียกว่าจุด "ออร์โธเซ็นเตอร์". (**Orthocentre**)

(ii) รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากต่อจุดปลายของเส้นตั้งฉาก เรียกว่าสามเหลี่ยมเพแดล (Pedal) หรือสามเหลี่ยม ออร์โธเซ็นตริค (Orthocentric)

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม เส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมทั้งสามไปยังด้านตรงข้าม ย่อมแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเพแดล.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม, มีเส้น AD, BE, CF ลากจากจุด A, B, C ไปตั้งฉากกับ BC, CA, AB ตามลำดับ, และตัดกันที่จุด O; และให้ DEF เป็นสามเหลี่ยมเพแดล.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่าเส้น AD, BE, CF แบ่งครึ่งมุม FDE, DEF, EFD. ตามลำดับ.

พิสูจน์ ∵ จุด O, D, C, E เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้; (บทกลับ บ. พ. 40)

∴ มุม ODE = มุม OCE. (บ.พ. 39)

ในทำนองเดียวกัน O,D,B,F เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้; (บทกลับบ. พ. 40)

∴ มุม ODF มุม = OBF. (บ.พ. 39)

แต่มุม OCE = มุม OBF ต่างก็ประกอบหนึ่งมุมฉากกับมุม BAC.

∴ มุม ODE = มุม ODF.

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่ามุม DEF,EFD ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้น BE และ CF.

ซ. ต. พ.

บทแทรกที่ 1 ด้านทุก ๆ คู่ของสามเหลี่ยมเพแดล ย่อมทำมุมกับด้านของสามเหลี่ยมเดิมที่ด้านคู่นี้ลากไปจดเป็นมุมเท่า ๆ กัน.

เพราะว่ามุม EDC = เป็นมุมที่ประกอบหนึ่งมุมฉากกับมุม ODE = เป็นมุมที่ประกอบหนึ่งมุมฉากกับมุม OCE.

∴ มุม EDC = มุม BAC.

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า FDB = BAC,

∴ มุม EDC = มุม FDB = มุม A.

ในทำนองเดียวกันอาจพิศุจน์ได้ว่า.

มุมDEC = มุม FEA = มุม B,

มุม DFB = มุม EFA = มุม C.

บทแทรกที่ 2 รูปสามเหลี่ยมDEC,AEF,DBF มีมุมเท่ากันทุกมุมมุม ต่อมุมและต่างก็เท่ากับสามเหลี่ยม ABC ด้วย.

หมายเหตุ ถ้ามุม ABC เป็นมุมป้าน แล้วเส้นตั้งฉาก BE,CF จะแบ่งครึ่งมุมภายนอกของสามเหลี่ยมเพแดล และมุมนั้นต้องอยู่ตรงกับเส้นตั้งฉากด้วย.

แบบฝึกหัด.

1. ถ้า O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม A B C และเส้นตั้งฉาก AD ต่อออกไปพบวงกลมที่ล้อมรอบที่ G, พิสูจน์ว่า OD = DG.

2. ด้านทั้งสาม ของสามเหลี่ยม มุมแหลม จะแบ่งครึ่งมุมภายนอกของสามเหลี่ยมเพแดล: และในสามเหลี่ยมมุมป้าน ด้าน ที่ประกอบมุมป้านนั้นจะแบ่งครึ่งมุมของสามเหลี่ยมเพแดลภายนอกสามเหลี่ยม.

3. ถ้า O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม ABC, จงพิสูจน์ว่ามุม BOC,BAC ต่างก็ประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน.

4. ถ้า O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม ABC แล้ว, จุดหนึ่งจุดใดของสี่จุดนี้คือ O,A,B,C จะเป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่อีกสามจุด.

5. วงกลมสามวง วงหนึ่งๆจะผ่านมุมสองมุมของสามเหลี่ยม กับจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยมนั้น วงกลมวงหนึ่งๆนี้ต่างก็จะเท่ากับวงกลม ซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น.

6. D และ E เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวง ของครึ่งวงกลมซึ่งสร้างบนเส้นตรง AB คอร์ด AD, BE และ AE, BD ตัดกัน (หรือต่อออกไปตัดกันถ้าจำเป็น) ที่จุด F และ G ตามลำดับ: จงพิสูจน์ว่า FG ตั้งได้ฉากกับ AB.

7. ABC เป็น สามเหลี่ยม, O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์, และ AK เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ: จงพิสูจน์ว่าBOCK เป็นสี่เหลี่ยม ด้านขนาน

8. ลากเส้นจากจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยมไปยังจุดกึ่งกลางของด้านฐาน, และต่อออกไปพบวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้น: จงพิสูจน์ว่ามันจะพบเส้นรอบวงที่จุดๆ เดียวกับเส้นผ่าศูนย์กลางซึ่งลากผ่านมุมยอด.

9. เส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดไปยังฐานของสามเหลี่ยม, และเส้นตรงที่ลากจากจุดออร์โธเซ็นเตอร์ไปยังจุดกึ่งกลางของฐาน, ต่างก็ต่อออกไปพบวงกลมที่ล้อมรอบที่จุด P และ Q : จงพิสูจน์ว่า PQ ขนานกับฐาน.

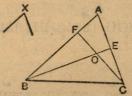
10. จงพิสูจน์ให้เห็นว่าระยะจากจุดออร์โธเซ็นเตอร์ถึงมุมใดมุมหนึ่ง ย่อมเป็นสองเท่าของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้น ไปยังด้านตรงข้าม.

11. วงกลมสามวง ทุกๆวงต้องผ่านจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยมกับมุมสองมุม: จงพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมที่เกิดจากการต่อจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสาม ย่อมเท่ากับสามเหลี่ยมเดิมทุกประการ.

12. จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เมื่อกำหนดมุมยอดออร์โธเซ็นเตอร์ และจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมให้.

โลไซ.

3. กำหนดฐานและมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมให้, จงหาโลกัสของออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยมนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ BC เป็นฐานที่กำหนดให้, และ X เป็นมุมยอดที่กำหนดให้; และให้ BAC เป็นสามเหลี่ยมบนฐาน BC, ซึ่งมีมุมยอด A เท่ากับมุม X, ลากเส้นตั้งฉาก BE, CF ตัดกันที่จุด O ซึ่งเป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องหาโลกัสของจุด O.

พิสูจน์ ∵ มุม OFA และมุม OEA ต่างก็เป็นมุมฉาก,

∴ จุด O, F, A, E เป็นจุดคอนไซคลิค;

∴ มุม FOE เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของมุม A:

แต่มุม BOC = มุม FOE, (บ.พ.3)

∴ มุม BOC เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของมุม A;

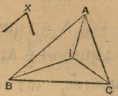
แต่มุม A คงตัว เพราะว่าเท่ากับมุม X.

∴ มุม BOC ก็คงตัวด้วย.

นั่นก็คือ, สามเหลี่ยม BOC มีฐานที่ตายตัว, และมุมยอดคงตัวด้วย;

ดังนั้น โลกัสของมุมยอด O เป็นส่วนโค้งของส่วนของวงกลมซึ่งมี BC เป็นคอร์ด.

4. กำหนดฐานและมุมยอดของสามเหลี่ยมให้, จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายในสามเหลี่ยมนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ BAC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งอยู่บนฐาน BC, และมีมุมยอด A เท่ากับมุม X ที่กำหนดให้; และให้ AI, BI, CI เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสาม. ดังนั้น I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุในสามเหลี่ยม ABC.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องหาโลกัสของจุด I

พิสูจน์ เรียกมุมทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC ว่ามุม A, B, C; และมุม B I C ว่ามุม I.

ใน $\triangle$ B I C,

(i) $I + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 2$ มุมฉาก;

(บ.พ. 16)

และใน $\triangle$ A B C,

$A + B + C = 2$ มุมฉาก, (บ.พ. 16)

(ii) ดังนั้น $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 1$ มุมฉาก

เอา (ii) ไปลบออกจาก (i) จะได้,

$$I - \frac{1}{2} A = 1 \text{ มุมฉาก}:$$

หรือ, $I = 1$ มุมฉาก $+ \frac{1}{2} A$.

แต่ A เป็นมุมคงตัว, เพราะว่าเท่ากับ มุม X;

∴ มุม I ก็คงตัวด้วย:

∴ โลกัสของ I คือ ส่วนโค้ง ของ ส่วนของวงกลม ที่มี BC เป็นคอร์ด.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับโลไซ.

1. กำหนด ฐาน BC และ มุม ยอด A ,ของ สามเหลี่ยมให้; จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลาง ที่บรรจุภายนอก ที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A.

2. ถ้าลากเส้นขนาน AP, BQ จากจุดปลายทั้งสองของเส้นตรง AB; จงหาโลกัส ของจุด ที่ตัดกัน ของ เส้นแบ่งครึ่งมุม PAB กับมุม QBA.

3. จงหาโลกัส ของจุด กึ่งกลาง ของ คอร์ด ที่ลากผ่านจุดตายตัวของวงกลมวงหนึ่ง.

จงสังเกตระหว่างข้อต่อไปนี้ ถ้าจุดที่กำหนดให้อยู่ภายในวงกลม, อยู่บนเส้นรอบวง หรืออยู่นอกเส้นรอบวง.

4. จงหาโลกัสของจุดสัมผัสส์ ของเส้นสัมผัสส์วง ซึ่งลากจากจุดตายตัว ไปยังวงกลม ทั้งหลาย ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน.

5. จงหาโลกัส ของจุด ที่ตัดกัน ของเส้นตรง สองเส้น ซึ่งลากจากจุด ตายตัวสองจุด บนเส้น รอบวงของวงกลมและเส้นทั้งสองนี้ ตัดเส้นรอบวงออกเป็นส่วนโค้งคงตัวเสมอ.

6. A และ B เป็นจุดสองจุด ที่ตายตัว อยู่ บนเส้นรอบวงของวงกลม, และ PQ เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง: จงหาโลกัสของจุดที่ตัดกันของเส้น PA และ QB.

7. ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งสร้างขึ้นบนฐาน BC ที่ตายตัว และมีมุมยอดคงตัว; และต่อ BA ไปยัง P, ให้ BP ยาวเท่ากับผลบวก ของด้านที่ประกอบมุมยอดนั้น: จงหาโลกัสของจุด P.

8. AB เป็นคอร์ดตายตัวของวงกลม, และ AC เป็นคอร์ด ที่เคลื่อนที่ได้ซึ่งลากมาจากจุด A: ถ้าทำสี่เหลี่ยมด้านขนาน CB ให้สมบูรณ์, จงหาโลกัสของจุดที่ตัดกันของเส้นทะแยงมุม.

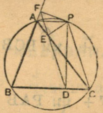
9. ไม้ตรง PQ วางให้เลื่อนอยู่ระหว่างไม้บรรทัดสองอันซึ่งวางเป็นมุมฉากซึ่งกันและกัน, และจากจุดปลายทั้งสองของไม้ตรงมีเส้น PX,QX, ลากไปตั้งฉากกับไม้บรรทัด: จงหาโลกัสของจุด X.

10. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B, P เป็นจุดๆหนึ่งบนเส้นรอบวงของวงใดวงหนึ่ง, มีเส้นตรง PA,PB ลากไปตัดกัน(หรือต่อไปตัดถ้าจำเป็น), กับวงกลมอีกวงหนึ่งที่จุด X และ Y: จงหาโลกัสของจุดที่ตัดกันของ AY และ BX.

11. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B; HAK เป็นเส้นตรงที่ตายตัว ซึ่งลากจากจุด A ไปสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง, และ PAQ เป็นเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งลากไปเช่นเดียวกัน: จงหาโลกัสของจุดที่ตัดกันของเส้น HP และ QK.

เส้นซิมสันส์ (Simson's Line).

5. จุดปลายทั้งสามของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมไปตั้งฉากกับด้านทั้งสาม ย่อมอยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ P เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่บนเส้นรอบวงกลมที่ล้อมรอบ ABC; และให้ PD,PE, PF เป็นเส้นตั้งฉากลากจาก P ไปยังด้าน BC, CA และส่วนต่อของ BA,

สิ่งที่ต้องการ จะต้องพิสูจน์ว่าจุด D,E,F อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

สร้าง ลากเส้น FE และ ED; แล้วลากเส้น PA, PC.

พิสูจน์ ∵ มุม PEA, มุม PFA ต่างก็เป็นมุมฉาก;

∴ จุด P, E, A, F เป็นจุดคอนไซคลิค:

(บทกลับ บ. พ. 40)

∴ มุม PEF = มุม PAF, (บ.พ. 39)

แต่มุม PAF + มุม PAB = 2 มุมฉาก,

(บ. พ. 1)

และมุม PAB + มุม PCB = 2 มุมฉาก,

(บ. พ. 40)

∴ มุม PAF + มุม PAB = มุม PAB. + มุม PCB

หักมุมที่เท่ากันออกคงเหลือ มุม PAF = มุม PCB,

∴ มุม PEF = มุม PCB.

และ ∵ มุม PEC กับมุม PDC ต่างก็เป็นมุมฉาก,

∴ จุด P, E, D, C. เป็นจุดคอนไซคลิค.

(บทกลับ บ. พ. 39)

แต่มุม PED + มุม PCD = 2มุมฉาก (บ.พ.40)

∴ มุม PED + มุม PEF = 2 มุมฉากด้วย.

∴ FE และ ED คือเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

(บ. พ. 2)

ซ.ต.พ.

ข้อสังเกต เส้น FED เรียกว่าเส้นเพแดลหรือเส้นซิมสันของสามเหลี่ยม ABC สำหรับ จุด P.

แบบฝึกหัด.

1. จากจุด P ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC, เส้นตั้งฉาก PD, PF ลากไปยัง BC และ AB: ถ้า FD, หรือส่วนต่อของ FD, ตัดเส้น AC ที่ E, จงพิสูจน์ว่า PE ตั้งได้ฉากกับ AC.

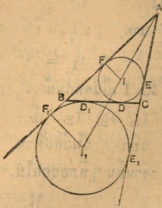
2. จงหาโลกัสของจุดๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนไปแล้วทำให้เส้นตั้งฉากที่ลากไปยังด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้, และทำให้จุดปลายของเส้นตั้งฉากอยู่ในเส้นเส้นเดียวกัน.

3. ABC และ A'B'C' เป็นสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีมุมๆ หนึ่งร่วมกัน, และเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมทั้งสองตัดกันที่จุด P; จงพิสูจน์ว่า จุดปลายของเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุด P ไปยังเส้น AB, AC, BC, B'C' อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

4. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งบรรจุในวงกลมวงหนึ่ง, และ P เป็นจุดๆ หนึ่งบนเส้นรอบวง มีเส้นลากไปยังจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม: จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากนี้ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นเพแดลจากจุด P.

สามเหลี่ยมและวงกลม.

6. D,E,F เป็นจุดสัมผัสของวงกลมซึ่งบรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC, และ D_1 , E_1 , F_1 ,เป็นจุดสัมผัสของวงกลมบรรจุภายนอก, ซึ่งสัมผัสด้าน BC และส่วนต่อของอีกสองด้าน: ให้ a, b, c, เป็นความยาวของด้าน BC. CA. AB; S เป็นครึ่งหนึ่งของเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยม, และ r, r_1 เป็นรัศมีของวงกลมที่บรรจุภายในและบรรจุภายนอก.



จงพิสูจน์ว่าสิ่งต่อไปนี้เท่ากัน:

(i) $AE = AF = s - a$,

$BD = BF = s - b$,

$CD = CE = s - c$.

(ii) $AE_1 = AF_1 = s$.

(iii) $CD_1 = CE_1 = s - b$,

$BD_1 = BF_1 = s - c$.

(iv) $CD = BD_1, = BD = CD_1$.

(v) $EE_1 = FF_1 = a$.

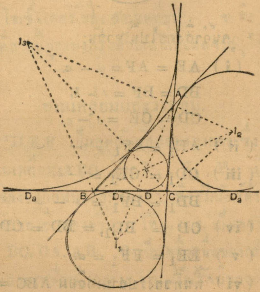
(vi) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= rs$

$= r_1 (s - a)$.

(vii) จงเขียนรูปข้างบนนี้ ให้มุม C เป็นมุมฉาก, และพิสูจน์ว่า

$$r = s - c; \; r_1 = s - b.$$

7. ใน ABC, I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายใน, และ I_1; I_2, I_3. เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายนอก สัมผัสด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ, และด้านอื่นๆ ที่ต่อออกไป.



จงพิสูจน์สิ่งต่อไปนี้:

(i) จุด A, I, I_1 อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน และ B, I, I_2; และ C, I, I_3 ก็เช่นกัน.

(ii) จุด I_2, A, I_3, อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน และ I_3, B, I_1; และ I_1, C, I_2 ก็เช่นกัน.

(iii) สามเหลี่ยม BI_1C, CI_2A, AI_3B มีมุมเท่ากันทุกมุม ๆ ต่อมุม.

(iv) สามเหลี่ยม $I_1 I_2 I_3$ มีมุมเท่ากับสามเหลี่ยมที่เกิดจากการต่อจุดสัมผัสของวงกลมบรรจุภายใน.

(v) จุดหนึ่งจุดใดของจุดทั้งสี่นี้ คือ I, I_1, I_2, I_3, เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม จุดอีกสามจุดจะเป็นมุมของสามเหลี่ยมนั้น.

(vi) วงกลมสี่วง, วงหนึ่งๆต่างก็ผ่านจุดสามจุด ในจุดเหล่านี้ I, I_1; I_2, I_3, ย่อมเท่ากันทั้งหมด.

แบบฝึกหัด

1. ตามรูปในข้อ (7) จงพิสูจน์ว่าถ้าวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง I, I_1, I_2, I_3, สัมผัสด้าน BC ที่จุด D, D_1, D_2, D_3, แล้ว

(i) $DD_2 = D_1D_3 = b$

(ii) $DD_3 = D_1D_2 = c$

(iii) $D_2D_3 = b + c$

(iv) $DD_1 = b \sim c$.

2. จงพิสูจน์ให้เห็นว่าจุดออร์โธเซ็นเตอร์และจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม ย่อมเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายใน และบรรจุภายนอก ของ สามเหลี่ยมเพแดล.

3. กำหนดฐาน และมุมยอด ของ สามเหลี่ยม ให้, จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลาง ของวงกลมบรรจุภายนอก ซึ่งสัมผัสด้านฐาน.

4. กำหนดฐานและมุมยอด ของ สามเหลี่ยม ให้, จงพิสูจน์ว่า จุดศูนย์กลาง ของวงกลม ที่ล้อมรอบ จะเป็นจุดตายตัว.

5. กำหนดฐาน BC, และมุมยอด A ของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้, จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายนอกซึ่งสัมผัสด้าน AC.

6. กำหนดฐาน, มุมยอด, และจุดที่วงกลมบรรจุภายในสัมผัสกับฐานให้, จงสร้างสามเหลี่ยม.

7. กำหนดฐาน, มุมยอด และจุดซึ่งวงกลมบรรจุภายนอกไปสัมผัสกับฐานหรือส่วนต่อของฐานให้, จงสร้างสามเหลี่ยม.

8. I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่บรรจุภายในสามเหลี่ยม, และ I_1, I_2, I_3, เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายนอก, จงแสดงให้เห็นว่า II_1, II_2, II_3; ถูกแบ่งครึ่ง ด้วยเส้นรอบวง ของวงกลมที่ประกอบสามเหลี่ยมนั้น.

9. ABC เป็นสามเหลี่ยม รูปหนึ่ง, และ I_2, I_3 เป็นจุด ศูนย์กลาง ของ วงกลม ที่บรรจุ ภายนอกซึ่งสัมผัสด้าน AC, และ AB ตามลำดับ: จงพิสูจน์ว่าจุด B, C, I_2, I_3, จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง อยู่บนเส้น รอบ วงของ วงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC.

10. จงเขียนวงกลมโดยใช้จุดสามจุดที่กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลาง, ให้สัมผัสซึ่งกันและกัน จะสร้างได้กี่วง?

11. กำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายนอกให้สามจุด; จงสร้างสามเหลี่ยม.

12. กำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายใน, และจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่บรรจุภายนอกให้; จงสร้างสามเหลี่ยม.

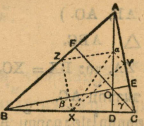
13. กำหนดมุมยอด, ความยาวของเส้นขอบเขต, และรัศมีของวงกลมที่บรรจุภายในให้; จงสร้างสามเหลี่ยม.

14. กำหนดมุมยอด, รัศมีของวงกลมที่บรรจุภายใน, และความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดมายังฐานให้; จงสร้างสามเหลี่ยม.

15. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายใน; จงแสดงว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม BIC, CIA, AIB อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมที่กำหนดให้.

วงกลมล้อมรอบหรือประกอบด้วยจุดทั้งเก้า.

8. ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม, จุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดไปยังด้านทั้งสามที่ตรงข้าม, และจุดกึ่งกลางของเส้นที่ลากจากจุดออร์โธเซ็นเตอร์ไปยังมุมทั้งสาม ย่อมมีวงกลมล้อมรอบได้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, ให้ X, Y, Z. เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA, AB; ให้ D, E, F เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากจากมุม A, B, C; ไปยังด้าน BC, CA, AB, ให้ O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์, และ α, β, γ เป็นจุดกึ่งกลางของ OA, OB, OC.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องพิสูจน์ว่า จุดทั้งเก้า X, Y, Z, D, E, F, α, β, γ เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้ (concyclic).

พิสูจน์ ลากเส้น XY, XZ, Xα, Yα, Zα.

ใน $\triangle$ ABO,

$\because$ AZ = ZB และ Aα = αO ,

$\therefore$ Zα ขนานกับ BO ($\because$ Z และ α เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AO.)

และใน $\triangle$ ABC,

เพราะว่า BZ = ZA, และ BX = XC,

$\therefore$ ZX ขนานกับ AC.

แต่ BO ต่อออกไปตั้งฉากกับ AC;

$\therefore$ มุม XZα เป็นมุมฉาก.

ทำนองเดียวกันมุม XYα เป็นมุมฉาก.

$\therefore$ จุด X, Z, α, Y. เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้: นั่นคือ α อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งผ่านจุด X, Y, Z; และ Xα เป็นเส้นผ่าศูนย์ของวงกลมนั้น.

ทำนองเดียวกัน ก็พิสูจน์ได้ว่า β และ γ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมนั้น.

และ ∵ αDX เป็นมุมฉาก,

∴ วงกลมซึ่ง Xα เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง ย่อมผ่าน D ด้วย.

ท่านอาจเดาวกันก็พิสูจน์ได้ว่า E และ F อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม;

∴ จุด X, Y, Z, D, E, F, α, β, γ, เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้.

ซ.ต.พ.

หมายเหตุ จากคุณสมบัติอันนี้ วงกลมที่ผ่านจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม เรียกว่าวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้า (Nine - Points Circle); คุณสมบัติเหล่านี้ได้มาจากความจริงของวงกลมที่ประกอบสามเหลี่ยมเพแดล.

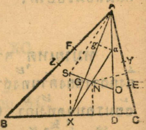
จงพิสูจน์ว่า

(i) จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า คือจุดกึ่งกลางของเส้นตรง ซึ่งลากจากจุดออร์โธเซ็นเตอร์ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม.

(ii) รัศมีของวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้า เป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้น.

(iii) จุดเซ็นทรอยด์, จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ, จุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้า และจุดออร์โธเซ็นเตอร์ ย่อมอยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

ในสามเหลี่ยม ABC, ให้ X,Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม; D,E,F เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉาก; O เป็นออร์โธเซ็นเตอร์; S และ N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ และวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้าตามลำดับ.



(i) จงพิสูจน์ว่า N เป็นจุดกึ่งกลางของ SO.

สามารถจะพิสูจน์ได้ว่าเส้นตั้งฉาก ซึ่งลาก จากจุดกึ่งกลางของ XD ย่อมแบ่งครึ่ง SO; (บ.พ. 22).

ทำนองเดียวกันเส้นตั้งฉากซึ่งลากจาก จุดกึ่งกลางของ EY ย่อมแบ่งครึ่ง SO ด้วย:

นั่นก็คือเส้นตั้งฉากทั้งสองนี้ตัดกันที่จุดกึ่งกลางของ SO: แต่ XD และ EY เป็นคอร์ดของวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้า,

∴ จุดที่ตัดกันของเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่ง XD และ EY ย่อมเป็นจุดศูนย์กลาง (บทเทียบที่ 1 ของ บ.พ. 31),

∴ จุดศูนย์กลาง N เป็นจุดกึ่งกลางของ SO.

ซ.ต.พ.

(ii) จะต้องพิสูจน์ว่ารัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า เป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมนั้น.

อาศัยบทพิสูจน์อันที่ (8), Xa เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า.

∴ จุดกึ่งกลางของ Xa เป็นจุดศูนย์กลาง: แต่จุดกึ่งกลางของ SO ก็เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้าด้วย.

ดังนั้น Xa และ SO แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด N.

ใน $\triangle$ SNX กับ ONa,

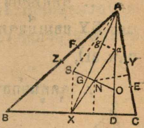
$$\because \begin{cases} SN = ON, \\ \text{และ } NX = Na, \\ \text{มุม } SNX = \text{มุม } ONa; \ (\text{บ.พ. } 3) \end{cases}$$

$\therefore$ SX = Oa (บ.พ. 4)

= Aa.

และ SX ขนานกับ Aa,

$\therefore$ SA = Xa.



แต่ SA เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle$ ABC และ Xa เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า;

$\therefore$ รัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า เป็นครึ่งหนึ่งของวงกลมที่ล้อมรอบ.

ซ.ต.พ.

(iii) จะต้องพิสูจน์ว่า จุดเซ็นทรอยด์ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกับจุด S, N, O.

ลากเส้น AX และลากเส้น ag ให้ขนานกับ SO.

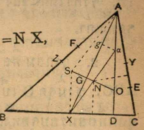
ให้ AX ตัด S O ที่ G.

และจากสามเหลี่ยม A G O, เพราะว่า $Aa = aO$,

และ ag ขนานกับ OG,

$\therefore \quad Ag = gG$,

และใน $\triangle Xag$, $\because \quad aN = NX$,



และ N G ขนานกับ ag,

$\therefore \quad gG = GX$.

$\therefore \quad AG = \frac{2}{3} AX$;

$\therefore$ G เป็นจุดเซ็นทรอยด์ของสามเหลี่ยม A B C.

$\therefore$ นั่นก็คือ, จุดเซ็นทรอยด์เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกับจุด S, N, O.

ช.ต.พ.

แบบฝึกหัด.

1. กำหนดฐานและมุมยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้, จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้า.

2. วงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้าของสามเหลี่ยม ABC, ซึ่งมีจุด O เป็นจุดออร์โธเซ็นเตอร์, จะเป็นวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้าของสามเหลี่ยม AOB, BOC, COA.

3. ถ้า I, I_1, I_2, I_3 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายใน และวงกลมที่บรรจุภายนอกของสามเหลี่ยม ABC, แล้ววงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC จะเป็นวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้าของสามเหลี่ยมสี่รูป ซึ่งเกิดจากการต่อจุดทั้งสามของจุดเหล่าน I, I_1, I_2, I_3.

4. สามเหลี่ยมทั้งหลายที่มีจุดออร์โธเซ็นเตอร์จุดเดียวกัน และมีวงกลมที่ล้อมรอบวงเดียวกัน, จะมีวงกลมที่ล้อมรอบจุดทั้งเก้าวงเดียวกันด้วย.

5. กำหนดฐาน และมุมยอด ของ สามเหลี่ยมให้, จงพิสูจน์ว่ามุม ๆ หนึ่งและด้าน ๆ หนึ่งของสามเหลี่ยมเพเดล ย่อมคงตัวเสมอ.

6. กำหนดฐาน และมุมยอด ของ สามเหลี่ยมให้, จงหาโลกัสของจุดศูนย์กลาง ของ วงกลมซึ่งผ่าน จุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายนอกทั้งสามวง.

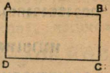
หมายเหตุ สำหรับคุณสมบัติที่สำคัญ อย่างอื่นของวงกลมล้อมรอบจุดทั้งเก้าจะได้ศึกษาในชั้นสูงต่อไป.

ภาคที่ 4.

เกี่ยวกับสี่เหลี่ยมจตุรัส และสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งสัมพันธ์กับส่วนของเส้นตรง.

เรขาคณิตที่เหมือนกับสูตรพีชคณิตบางแห่ง.

นิยาม.

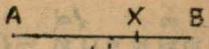


1. สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ที่กล่าวว่าประกอบด้วยด้านประชิด AB, AD; สองด้านก็เพราะว่าด้านทั้งสองนี้ทำให้ขนาดและสัณฐานตายตัว.

สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีด้านประชิด AB, AD ก็เขียนว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้าAB,AD; นี่ก็เท่ากับผลคูณของAB.AD.

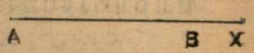
ทำนองเดียวกัน สี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งสร้างบนด้าน AB ก็เขียนว่าสี่เหลี่ยมจตุรัสบน AB หรือ $AB.^2$

2. ถ้าให้ X เป็นจุดๆหนึ่งใน เส้นAB,หรือส่วนต่อของ AB แล้ว X จะแบ่ง AB ออกเป็น สองส่วน, คือ AX, AB; จะเป็นกรณีใดก็ดี ส่วนทั้งสองก็คือระยะจาก จุดปลายทั้งสอง ของเส้น AB ที่กำหนดให้ไปยังจุดที่แบ่ง X.



รูปที่ 1

ในรูปที่ 1, เรียกว่า AB ถูกแบ่งภายในจุด X.



รูปที่ 2

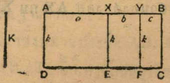
ในรูปที่ 2, เรียกว่า AB ถูกแบ่งภายนอกที่จุด X.

ข้อสังเกต การแบ่งภายในเส้นตรง AB ที่กำหนดให้จะเท่ากับผลบวกของส่วนทั้งสองคือ AX, XB.

การแบ่งภายนอกเส้นตรง AB ที่กำหนดให้จะเท่ากับผลต่างของส่วนทั้งสองคือ AX กับ XB.

บทพิสูจน์ที่ 50. (ยูคลิดเล่มที่ 2. บท 1.)

ถ้าเส้นตรงสองเส้น, เส้นหนึ่งถูกแบ่งออกเป็นส่วน ๆ, อีกเส้นหนึ่งไม่ถูกแบ่ง สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงทั้งสองนี้ ย่อมมีพื้นที่เท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยเส้นที่ไม่ถูกแบ่งกับส่วนต่าง ๆ ของเส้นที่ถูกแบ่ง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB และ K เป็นเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้, และให้ AB ถูกแบ่งออกเป็นส่วน AX, XY, YB, ซึ่งยาวเท่ากับ a, b, c, หน่วยตามลำดับ; ดังนั้น AB ก็เท่ากับ $a+b+c$ หน่วย และให้ K เป็นเส้นตรงที่ไม่ถูกแบ่งยาวเท่ากับ k หน่วย.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, K = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AX, K + รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า X Y, K + รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า BY, K; หรือจะกล่าวว่า $(a+b+c)k = ak + bk + ck$.

สร้าง ลากเส้น AD ให้ตั้งฉากกับ AB. และให้ยาวเท่ากับ K.

จาก D ลากเส้น DC ให้ขนานกับ AB.

จาก X, Y, B ลากเส้น XE, YF, BC ให้ขนานกับ AD.

พิสูจน์ ∴ AD, XE, YF = K.

∵ รูป AC = รูป AE + รูป XF + รูป YC; (ตามสร้าง),

รูป AC = สี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, K; มีพื้นที่ $(a+b+c)k$ ต. ร. หน่วย;

รูป AE = สี่เหลี่ยมผืนผ้า AX. K; มีพื้นที่ ak ต. ร. หน่วย;

รูป XF = สี่เหลี่ยมผืนผ้า XY, K; มีพื้นที่ bk ต. ร. หน่วย;

รูป YC = สี่เหลี่ยมผืนผ้า YB, K; มีพื้นที่ ck ต.ร. หน่วย;

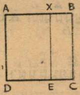
ดังนั้นสี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, K = สี่เหลี่ยมผืนผ้า BX. K + สี่เหลี่ยมผืนผ้า XY, K + สี่เหลี่ยมผืนผ้า YB, K;
หรือ. $(a+b+c)\,k = ak + bk + ck$

ซ.ต.พ.

บทแทรก. (ยุคลิดเติมที่ 2. บท 2 และ 3.)

กรณีย์ฉะเพาะทั้งสองของบทพิสูจน์นี้ ควรจะเอาใจใส่จดจำไว้.

(i) เมื่อ AB ถูกแบ่งที่จุด X จุดเดียว, และเส้นที่ไม่ถูกแบ่งคือ AD ยาวเท่ากับ AB.



แล้ว จตุรัสบน AB = สี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, AX + สี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, XB.

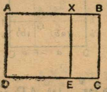
นั่นคือสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นที่กำหนดให้ จะเท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ประกอบด้วยเส้นตรง เส้นนั้นกับส่วนที่ถูกแบ่ง.

หรือ: $AB^2 = AB.AB$

$$= AB\,(AX + XB)$$

$$= AB.\ AX + AB.\ XB.$$

2. เมื่อ AB ถูกแบ่งที่จุด X, และเส้นตรง AD ที่ไม่ได้แบ่งความยาวเท่ากับส่วน AX.



ดังนั้นสี่เหลี่ยมผืนผ้า AB, AX = จตุรัสบน AX+ สี่เหลี่ยมผืนผ้า AX, XB.

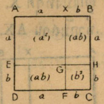
นั่นคือ, สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยเส้นตรงเส้นนั้นกับส่วนที่ถูกแบ่งย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัส บนส่วนของเส้นตรงนั้นรวมกับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วยส่วนทั้งสองของเส้นตรงนั้น.

หรือ: $AB.\ AX = (AX+XB)\ AX$

$$= AX^2 + AX.\ XB.$$

บทพิสูจน์ที่ 51. (ยุคลิดเล่มที่ 2. บท 4.)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งภายในที่จุดใดจุดหนึ่ง, สี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงที่กำหนดให้ จะเท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัส บนส่วนทั้งสองรวมกับสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองของเส้นตรงนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรง เส้นหนึ่งถูกแบ่งภายในที่จุด X, และส่วนที่ถูกแบ่ง AX, XB เท่ากับ a, b, หน่วยตามลำดับ.

ดังนั้น AB เท่ากับผลบวกของ AX, XB และมีค่าเท่ากับ $a+b$ หน่วย.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$AB^2 = AX^2 + XB^2 + 2\ AX.\ XB;$

หรือ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

สร้าง บนเส้น AB สร้างสี่เหลี่ยมจตุรัส ABCD. ตัดเส้น AD เอาแต่ส่วน AE ให้เท่ากับ AX, หรือ a. ดังนั้น $ED = XB = b$. ที่จุด E และ X ลากเส้น EH, XF ให้ขนานกับ AB, AD ตามลำดับและพบกันที่จุด G.

พิสูจน์ ดังนั้น รูป AC = รูป AG + รูป GC + รูป EF + รูป XH (ตามสร้าง),

รูป AC มีพื้นที่ = AB^2 และประกอบด้วยพื้นที่ $(a+b)^2$ ตารางหน่วย,

รูป AG มีพื้นที่ = AX^2 และประกอบด้วยพื้นที่ a^2 ตารางหน่วย;

รูป GC มีพื้นที่ = XB^2 และประกอบด้วยพื้นที่ b^2 ตารางหน่วย;

รูป EF มีพื้นที่ = EG, ED

= AX, XB และประกอบด้วยพื้นที่ ab ตารางหน่วย.

รูป XH มีพื้นที่ = GX, XB

= AX, XB และประกอบด้วย

พื้นที่ ab ตารางหน่วย.

ดังนั้นการแทนค่าจะได้

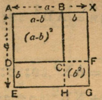
$$AB^2 = AX^2 + XB^2 + 2\,AX \cdot XB;$$

หรือ, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$

ซ.ต.พ.

บทพิสูจน์ที่ 52. (ยูคลิดเล่มที่ 2. บท 7.)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งภายนอกที่จุดใดจุดหนึ่ง, สี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงที่กำหนดให้ ย่อมเท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนส่วนทั้งสอง ลบด้วยสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงที่ถูกแบ่งภายนอกที่จุด X; และให้ส่วนของเส้นตรง AX. XB. ยาวเท่ากับ a และ b หน่วยตามลำดับ.

ดังนั้น AB เท่ากับ ผลต่างของ AX และ XB; ดังนั้นจะยาว $a-b$ หน่วย.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AB^2 = AX^2 + XB^2 - 2\,AX.\,XB;$$

หรือ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$

สร้าง บน AX สร้างสี่เหลี่ยมจตุรัส AXGE. ตัด AE เอาแต่ส่วน AD ให้ยาวเท่ากับ AB, หรือ $a-b$. ดังนั้น ED = XB = b. จากจุด D และ B ลากเส้น DF, BH ขนานกับ AX, AE ตามลำดับและตัดกันที่จุด C.

พิสูจน์ ดังนั้นรูป AC = รูป AG, CG − รูป EF, XH. (โดยการสร้าง)

แต่รูป AC มีพื้นที่ = AB^2 และประกอบด้วยพื้นที่ $(a-b)^2$;

รูป AG มีพื้นที่ = AX^2, และประกอบด้วยพื้นที่ a^2;

รูป CG มีพื้นที่ = XB^2, และประกอบด้วยพื้นที่ b^2;

รูป EF มีพื้นที่ = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า EG, ED

= รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AX, XB

และประกอบด้วยพื้นที่ ab;

รูป XH มีพื้นที่ = รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า GX, XB

= รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า AX, XB

และประกอบด้วยพื้นที่ ab.

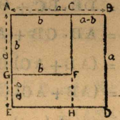
ดังนั้น $AB^2 = AX^2 + XB^2 - 2\,AX.\,XB$;

หรือ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

ซ.ต.พ.

บทพิสูจน์ที่ 53. (ยุคลิดเล่มที่ 2. บทที่ 5 และ 6.)

ผลต่างของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงสองเส้น ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบขึ้นด้วยผลบวกและผลต่างของเส้นตรงทั้งสองนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB และ AC เป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งวางทับกันอยู่ ให้มีความยาวเท่ากับ a และ b ตามลำดับ.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AB^2 - AC^2 = (AB + AC)\ (AB - AC);$$

หรือ $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$.

สร้าง บนเส้น AB และ AC สร้างสี่เหลี่ยมจตุรัส ABDE, ACFG;

แล้วต่อ CF ไปพบ ED ที่ H.

เมื่อเช่นนั้น GE = CB = $a-b$ หน่วย.

พิสูจน์ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
AB^2 - AC^2 &= \text{จตุรัสบน } AD - \text{จตุรัสบน } AF \\
&= \square \text{ ผืนผ้า } CD + \square \text{ ผืนผ้า } GH \\
&= DB \cdot BC + GF \cdot GE \\
&= AB \cdot CB + AC \cdot CB \\
&= (AB + AC)\, CB \\
&= (AB + AC)\, (AB - AC)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ, $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$.

ช.ต.พ.

บทแทรก ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งครึ่งที่จุดใดจุดหนึ่ง, และแบ่ง (ภายในหรือภายนอก) ออกเป็นสองส่วนไม่เท่ากันที่อีกจุดหนึ่ง, สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยส่วนทั้งสองนั้น ย่อมมีพื้นที่เท่ากับผลต่างของจตุรัสบนครึ่งหนึ่งของเส้นตรงนั้น กับจตุรัสบนส่วนที่อยู่ระหว่างจุดที่แบ่งทั้งสอง.

รูปที่ 1   รูปที่ 2

ถ้า AB ถูกแบ่งครึ่งที่จุด X และแบ่งภายในดัง รูปที่ 1; แบ่งภายนอกดังรูปที่ 2, ที่จุด Y แล้ว

ในรูปที่ 1, $AY \cdot YB = AX^2 - XY^2$;

ในรูปที่ 2, $AY \cdot YB = XY^2 - AX^2$.

สำหรับในกรณีแรก,

$$AY \cdot YB = (AX+XY)(XB-XY)$$
$$= (AX+XY)(AX-XY)$$
$$= AX^2 - XY^2.$$

ในกรณีที่ 2 ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน.

แบบฝึกหัด.

1. ใช้กระดาษกราฟเขียนรูปเพื่อแสดงให้เห็นว่า จตุรัสบนเส้นตรงเส้นหนึ่งจะเป็น

(i) สี่เท่าของจตุรัสบนครึ่งหนึ่งของเส้นตรง;

(ii) เก้าเท่าของจตุรัส บนหนึ่งในสามของเส้นตรง.

2. จงเขียนรูปลงในกระดาษกราฟเพื่อพิสูจน์สูตร ของพีชคณิตต่อไปนี้:

(i) $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49.$

(ii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab.$

(iii) $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$

(iv) $(x+7)(x+9) = x^2 + 16x + 63.$

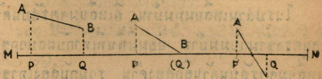
3. ในบทแทรกที่ (i) ของบทพิสูจน์ที่ 50, ถ้า AB = 4 ซม., และรูป AE เท่ากับ 9.6 ตร. ซม., จงหาพื้นที่ของรูป XC.

4. ตามบทแทรกที่ (ii) ของบทพิสูจน์ที่ 50, ถ้า AX = 2.1 นิ้ว, และรูป XC = 3.36 ตร. นิ้ว, จงหา AB.

5. ตามบทพิสูจน์ที่ 51, ถ้ารูป AG = 36 ตร. ซม., และสี่เหลี่ยมผืนผ้า AX,XB = 24 ตร. ซม., จงหา AB.

6. ตามบทพิสูจน์ที่ 52, ถ้ารูป AG = 9.61 ตร. นิ้ว, และรูป DG = 6.51 ตร. นิ้ว, จงหา AB.

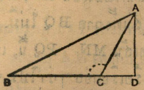
นิยาม



ถ้าจาก จุดปลาย ของ เส้นตรง AB มีเส้น ตั้งฉาก AP, BQ ฉากไปยังเส้น MN, ดังในรูป ทั้งสามนั้น ส่วนรูปกลาง เส้นตั้งฉาก BQ ไม่มี; คือกลายเป็นจุด เพราะจุด B จดเส้น MN PQ นี้, เป็นออร์โธโกแนล โปรเจคชั่น. (หรือเรียกย่อ ๆ ว่า โปรเจคชั่น) ของ AB บน MN. (ถ้ากล่าวถึงโปรเจคชั่นแล้ว ต้องบอกว่าเป็น ของเส้นไหน บนเส้นอะไรเสมอ.)

บทพิสูจน์ที่ 54. (ยุคลิดเล่มที่ 2. บท 12.)

ในรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน, สี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมป้าน ย่อมมีพื้นที่เท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านอีกสองด้าน รวมกับสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยด้านใดด้านหนึ่งที่ประกอบมุมป้านนั้นกับโปรเจคชั่นของอีกด้านหนึ่งบนด้านนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีมุม C เป็นมุมป้าน; และให้ AD ฉากตั้งฉากมายังส่วนต่อของ BC; และ CD เป็นโปรเจคชั่นของด้าน AC บน BC.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\,BC \cdot CD.$$

พิสูจน์ ∵ BD = ด้าน BC, CD รวมกัน.

$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2\,BC \cdot CD$. (บ.ท. 51)

เอา DA^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง.

แล้ว $BD^2 + DA^2 = BC^2 + (CD^2 + DA^2) + 2\,BC \cdot CD$.

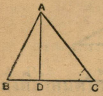
$$\left.\begin{array}{l} \text{แต่ } BD^2 + DA^2 = AB^2, \\ \text{และ } CD^2 + DA^2 = CA^2, \end{array}\right\} \text{ บ.ท. 29}$$

ดังนั้น $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\,BC \cdot CD$.

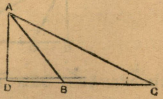
ซ.ต.พ.

บทพิสูจน์ 55. (ยูคลิดเล่มที่ 2. บท 13.)

ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ สี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมแหลม ย่อมมีพื้นที่เท่ากับ ผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัส บนด้านอีกสองด้าน ลบด้วยสองเท่าของ สี่เหลี่ยม ผืนผ้า ที่ ประกอบ ด้วย ด้านใด ด้านหนึ่ง ที่ประกอบมุมแหลมนั้น กับโปรเจคชั่น ของอีกด้านหนึ่ง บนด้านนั้น.



รูปที่ 1



รูปที่ 2

สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็น สามเหลี่ยม รูปหนึ่ง ซึ่งมีมุม C เป็นมุมแหลม; และให้ AD เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากไปยัง CB, หรือ ส่วนต่อ ของ CB และ CD เป็นโปรเจคชั่นของด้าน CA บน BC.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\,BC.\,CD.$$

พิสูจน์ ในรูปทั้งสองเพราะว่า BD ถูกแบ่งภายนอกที่จุด C

$$\therefore\; BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC.\,CD.$$

(บ.พ. 52)

เอา DA^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง.

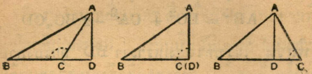
ดังนั้น $BD^2 + DA^2 = BC^2 + (CD^2 + DA^2)$
$- 2\,BC.\,CD.$ ....(i)

แต่ $BD^2 + DA^2 = AB^2$
และ $CD^2 + DA^2 = CA^2$ }, (บ.พ. 29)

ดังนั้น $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\,BC.\,CD.$

ช.ต.พ.

สรุปความของบทพิสูจน์ที่ 29, 54 และ 55.



(i) ถ้ามุม ABC เป็นมุมป้าน

$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\,BC.CD.$

(บ.พ. 54)

(ii) ถ้ามุม ACB เป็นมุมฉาก

$AB^2 = BC^2 + CA^2.$ (บ.พ. 29)

(iii) ถ้ามุม ACB เป็นมุมแหลม

$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\,BC.CD$ (บ.พ.55).

ให้สังเกตในข้อ (ii), เมื่อมุม ACB เป็นมุมฉาก, AD จะทับกับ AC สนิท, ดังนั้น CD (ซึ่งเป็นโปรเจคชั่นของ CA) หายไป, เช่นนั้นในกรณีนี้, 2 BC. CD = 0.

ดังนั้น ผลทั้งสามอันนี้สามารถจะรวบรวมเป็นอันเดียวดังนี้: สี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม จะมีพื้นที่มากกว่า, เท่ากับหรือน้อยกว่าผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกสองด้าน, ก็แล้วแต่มุมซึ่งประ

กอบด้วยด้านทั้งสองนั้นจะเป็นมุมป้าน, มุมฉาก, หรือมุมแหลม; ในกรณีที่ไม่เท่ากันนั้น พื้นที่ซึ่งต่างกันนี้ย่อมเป็นสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยด้านใดด้านหนึ่งของด้านทั้งสองกับโปรเจคชั่น ของ อีก ด้าน หนึ่งบนด้านนั้น.

แบบฝึกหัด.

1. ในสามเหลี่ยม ABC, $a = 21$ ซม., $b = 17$ ซม., $c = 10$ ซม. อยากทราบว่า c^2 จะน้อยกว่า a^2+b^2 กี่ตารางเซ็นติเมตร ? แล้วคำนวณโปรเจคชั่นของ AC บนBC.

2. ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี AB=AC; และ BE ลากไปตั้งฉากกับ AC. จงพิสูจน์ ว่า

$$BC^2 = 2\ AC,\ CE.$$

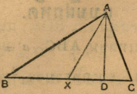
3. ในสามเหลี่ยม ABC, จงพิสูจน์ว่า

(i) ถ้ามุม $c = 60^\circ$, แล้ว $c^2 = a^2 + b^2 - ab$;

(ii) ถ้ามุม $c = 120^\circ$, แล้ว $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

บทพิสูจน์ที่ 56.

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านสองด้าน ย่อมเท่ากับสองเท่า ของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม รวมกับสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นมัธยะฐาน ซึ่งแบ่งครึ่งด้านที่สาม.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง, และ AX เป็นเส้นมัธยะฐานแบ่งครึ่งฐาน BC.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AB^2 + AC^2 = 2\,BX^2 + 2\,AX^2.$$

พิสูจน์ ลากเส้น AD ให้ตั้งฉากกับเส้น BC; และพิจารณาในกรณีที่ AB และ AC ไม่เท่ากัน; และ AD อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ABC.

ดังนั้นมุม AXB กับมุม AXC, มุมหนึ่งต้องเป็นมุมป้าน, และอีกมุมหนึ่งต้องเป็นมุมแหลม.

ให้มุม AXB เป็นมุมป้าน เพราะฉะนั้นมุม AXC เป็นมุมแหลม; ดังนั้นจากสามเหลี่ยม AXB,

$AB^2 = BX^2 + AX^2 + 2BX.XD.$ (บ.พ. 54)

และจากสามเหลี่ยม AXC,

$AC^2 = XC^2 + AX^2 - 2\,XC.XD.$ (บ.พ. 55)

บวกผลที่ได้ นี้เข้าด้วยกัน, และจำไว้ด้วยว่า

$$XC = BX,$$

ก็จะได้ $AB^2 + AC^2 = 2\,BX^2 + 2\,AX^2.$

ซ.ต.พ.

หมายเหตุ ในกรณีย์ที่เส้นตั้งได้ฉากอยู่ภายนอกรูปสามเหลี่ยม ก็อาจจะพิสูจน์ได้อย่างง่ายดายโดยวิธีอย่างเดียวกัน.

แบบฝึกหัด.

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลต่างของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านสองด้าน ย่อมเท่ากับสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วยด้านฐานกับส่วนที่อยู่ระหว่างจุดกึ่งกลางของฐานกับจุดปลายของเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากมุมยอดมายังฐาน.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 50 – 53.

1. ใช้บทแทรกของบทพิสูจน์ที่ 50 เพื่อพิสูจน์ว่าถ้าเส้นตรง AB ถูกแบ่งภายในจุด X, แล้ว.

$$AB^2 = AX^2 + XB^2 + 2\,AX.XB.$$

2. ถ้าแบ่งครึ่งเส้นตรง AB ที่จุด X และต่อออกไปถึงจุด Y, และทำให้ $AY.YB = 8\,AX^2$, จงพิสูจน์ว่า $AY = 2\,AB$.

3. ผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงสองเส้นย่อมมีพื้นที่ไม่น้อยกว่าสองเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงทั้งสองนั้น.

อาศัยรูปบทพิสูจน์ที่ 52 อธิบายโจทย์นี้, แล้วจงพิสูจน์โจทย์นี้โดยอาศัยสูตร $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

4. ถ้าเอาค่าของ $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$, แทนในสูตร $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ แล้ว, จงเขียนผลที่ได้นั้นเป็นคำพูด.

5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งภายในที่จุด Y, จงพิสูจน์ว่าสี่เหลี่ยมผืนผ้า AY, YB จะมีพื้นที่น้อยลงเมื่อ Y เคลื่อนห่างออกไปจาก X, ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AB.

จงพิสูจน์โจทย์นี้.

(i) อาศัยบทแทรกของบทพิสูจน์ที่ 53.

(ii) อาศัยสูตร $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

6. ถ้าเส้นตรง AB แบ่งครึ่งที่จุด X, และถูกแบ่ง (i) ภายใน (ii) ภายนอกที่จุด Y ออกเป็นสองส่วนไม่เท่ากัน, จงพิสูจน์ว่าทั้งสองกรณีย่อมจะได้.

$AY^2 + YB^2 = 2(AX^2 + XY^2)$ (ยุคลิดเล่มที่ 2 บท 9 และ 10).

พิสูจน์ในกรณียที่

(i) $AY^2 + YB^2 = AB^2 - 2\,AY \cdot YB$.

(บ.พ. 51)

$$= 4\,AX^2 - 2(AX+XY)(AX-XY)$$

$$= 4\,AX^2 - 2(AX^2 - XY^2) \quad (\text{บ.พ. } 53)$$

$$= 2\,AX^2 + 1\,XY^2.$$

ในกรณียที่ (ii) เมื่ออาศัยบทพิสูจน์ที่ 52 ก็อาจพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน.

7. ถ้า AB ถูกแบ่งภายในที่จุด Y, ให้ใช้ผลของแบบฝึกหัดข้อ 6 อธิบายการเปลี่ยนแปลงค่าของ $AY^2 + YB^2$, ในเมื่อ Y เคลื่อนออกจาก A ไปยัง B.

8. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก, ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากมุมฉากไปยังด้านทะแยง, สี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตั้งฉากนี้ ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยส่วนทั้งสองของด้านทะแยงนั้น.

9. ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง, และจากเส้น AY ให้แบ่งฐาน BC ภายในหรือภายนอกที่จุด Y. จงพิสูจน์ว่า

ถ้าแบ่งภายในจะได้ $AY^2 = AC^2 - BY \cdot YC$;

ถ้าแบ่งภายนอกจะได้ $AY^2 = AC^2 + BY \cdot YC$.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 54—56.

1. เส้นตรง AB ยาว 8 ซม., และแบ่งครึ่งที่จุด O เมื่อเอา O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 5 ซม. เขียนวงกลม; ถ้า P เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวง, จงพิสูจน์ว่า $AP^2 + BP^2 = 82$ ตร. ซม.

2. ในสามเหลี่ยม ABC, ฐาน BC ถูกแบ่งครึ่งที่จุด X. ถ้า $a = 17$ ซม., $b = 15$ ซม., และ $c = 8$ ซม. จงคำนวณหาความยาวของมัธยะฐาน AX, และมุม A ด้วย.

3. ฐานของรูปสามเหลี่ยมยาว 10 ซม., และผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านอีกสองด้านเท่ากับ 122 ตร. ซม.; จงหาโคไซน์ของมุมยอด.

4. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมเท่ากับผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นทะแยงมุม.

ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและเส้นทะแยงมุมเส้นสั้นจุดได้ 3 นิ้ว จงหาเส้นทะแยงมุม ทศนิยมสองตำแหน่ง.

5. รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าใด ๆ สี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านทั้งสี่รวมกันจะเท่ากับ สองเท่า ของผลบวก ของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม.

6. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, และ O เป็นจุดอยู่ภายใน: จงพิสูจน์ว่า

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2.$$

ถ้า AB = 6.0 นิ้ว, BC = 2.5 นิ้ว, และ $OA^2 + OC^2 = 21\frac{1}{4}$ ตร. นิ้ว, จงหาระยะจากจุด O ไปยังจุดที่ตัดกันของเส้นทะแยงมุม.

7. ผลบวกของสี่เหลี่ยม จตุรัส บนด้าน ทั้ง สี่ของสี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่ายอม มาก กว่าผลบวก ของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นทะแยงมุม อยู่สี่เท่าของ สี่เหลี่ยมจตุรัส บนเส้นซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม.

8. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, มุม B และ C เป็นมุมแหลม; ถ้าลากเส้น BE, CF ไปตั้งฉากกับ AC, AB ตามลำดับ, จงพิสูจน์ว่า $BC^2 = AB.BF + AC.CE$.

9. สามเท่าของผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ย่อมเท่ากับสี่เท่าของผลบวกของจตุรัสบนมัธยะฐานทั้งสาม.

10. ABC เป็นสามเหลี่ยม, และ O เป็นจุดที่ตัดกันของมัธยะฐาน: จงพิสูจน์ว่า

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(OA^2 + OB^2 + OC^2).$$

11. ถ้าแบ่งครึ่งเส้นตรง AB ที่จุด X, และแบ่ง (ภายในหรือภายนอก) ที่จุด Y, แล้ว

$$AY^2 + YB^2 = 2\,(AX^2 + XY^2).$$

อาศัยบทพิสูจน์ที่ 56, พิสูจน์ผลนี้, โดยการพิจารณารูปสามเหลี่ยม CAB ในตำแหน่งที่จำกัดคือ เมื่อจุดยอด C ทับจุด Y บนฐาน AB.

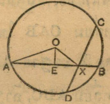
12. ในสามเหลี่ยม ABC, ถ้าฐาน BC ถูกแบ่งที่จุด X ทำให้ mBX = nXC แล้ว, จงพิสูจน์ว่า

$$mAB^2 + nAC^2 = mBX^2 + nXC^2 + (m + n)\,AX^2.$$

สี่เหลี่ยมผืนผ้าสัมพันธ์กับวงกลม.

บทพิสูจน์ที่ 57. (ยุคลิด เล่มที่ 3. บทที่ 35.)

ถ้าคอร์ดสองคอร์ด ของวงกลมวงหนึ่ง ตัดกันภายในที่จุดใดจุดหนึ่ง, สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองของคอร์ดๆ หนึ่ง ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองของคอร์ดอีกคอร์ดหนึ่ง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB,CD เป็นคอร์ดสองคอร์ด ตัดกันภายในวงกลม, ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง. ที่จุด X.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า.

$$AX,XB = CX,XD.$$

สร้าง ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม ลากเส้น OE ให้ตั้งฉากกับคอร์ด AB.

ดังนั้น OE จะแบ่งครึ่ง AB ด้วย.

ลากเส้น OA,OX

พิสูจน์ $AX,XB = (AE+EX)(EB-EX)$

$= (AE+EX)(AE-EX)$

$= AE^2 - EX^2$ (บ.พ. 53)

(เอา OE^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง)

$= (AE^2+OE^2)-(EX^2+OE^2)$

$= AO^2 - OX^2$ (บ.พ. 29)

$= r^2 - OX^2,$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$CX,XD = r^2 - OX^2.$

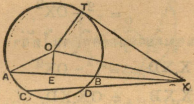
$\therefore AX,XB = CX,XD.$

ซ.ต.พ.

บทแทรก สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง ๆ ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัส บนครึ่งหนึ่งของคอร์ด ซึ่งถูกแบ่งครึ่งที่จุด X.

บทพิสูจน์ที่ 58. (ยุคลิดเล่มที่ 3. บทที่ 36.)

ถ้าคอร์ดสองคอร์ดของวงกลม, ต่อออกไปตัดกันภายนอกที่จุด ๆ หนึ่ง, สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองของคอร์ด ๆ หนึ่ง ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบ ด้วยส่วน ทั้งสอง ของคอร์ด อีกคอร์ดหนึ่ง. และสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง ๆ ต่าง ก็เท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นสัมผัสวงกลม ซึ่งลากจากจุดที่คอร์ดตัดกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง AB และ CD เป็นคอร์ดสองคอร์ดเมื่อต่อออกไปตัดกันภายนอกวงกลมที่จุด X; XT เป็นเส้นสัมผัสวงซึ่งลากมาจากจุด X,

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$AX, XB = CX, XD = XT^2.$$

สร้าง ให้ r เป็นรัศมี ของวงกลม ลากเส้น OE ให้ตั้งฉากกับคอร์ด AB.

ดังนั้น OE จะแบ่งครึ่งคอร์ด AB.

ลากเส้น OA, OX, OT

พิสูจน์ $AX, XB = (EX+AE)(EX-EB)$

$= (EX+AE)(EX-AE)$

$= EX^2 - AE^2$ (บ.พ. 53)

เอา OE^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง

$= (EX^2+OE^2) - (AE^2+OE^2)$

$= OX^2 - r^2$, (บ.พ. 29)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$CX, XD = OX^2 - r^2.$

และเพราะว่ารัศมี OT ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสสัมผัสวง XT,

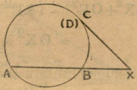
$\therefore\ XT^2 = OX^2 - r^2$. (บ.พ. 29)

$\therefore\ AX, XB = CX, XD = XT^2.$

ซ.ต.พ.

บทพิสูจน์ที่ 59. (ยุคลิดเล่มที่ 3. บทที่ 37.)

ถ้าลากเส้นตรงสองเส้นจากจุดภายนอกของวงกลม, เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดวงกลม, และอีกเส้นหนึ่งพบวงกลม; และถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยเส้นตรงที่ตัดวงกลมกับส่วนที่อยู่ภายนอกวงกลม เท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงที่พบวงกลมแล้ว, เส้นตรงซึ่งลากมาพบวงกลมนั้นจะเป็นเส้นสัมผัสวง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ X เป็นจุดภายนอกของวงกลม ABC, ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง, และเส้น XA, XC ลากไปยังวงกลม ABC, ตัดวงกลมที่จุด A และ B, และ XC พบวงกลมที่จุด C กับให้ XA, XB = XC^2.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า XC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด C.

พิสูจน์ สมมติว่าเมื่อต่อ XC ออกไปจะตัดวงกลมอีกแห่งหนึ่งที่จุด D;

ดังนั้น $XA.XB = XD.XC.$ (บ.พ. 58)

แต่ $XA.XB = XC^2$; โจทย์กำหนดให้

$\therefore \quad XD.XC = XC^2$;

ดังนั้น $XD = XC.$

เพราะฉะนั้น XC จะไม่พบวงกลมอีก เพราะจุดที่ตัดกันทับกันเสียแล้ว.

นั่นก็คือ, XC เป็นเส้นสัมผัสวงกลม.

ซ.ต.พ.

หมายเหตุเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 57, 58.

จงจำไว้ด้วยว่า ส่วนของเส้นตรงซึ่งคอร์ด AB ถูกแบ่งที่จุด X, ภายในตามบทพิสูจน์ที่ 57, และภายนอกตามบทพิสูจน์ที่ 58, ออกเป็นส่วน AX, XB, เราสามารถจะรวมบทพิสูจน์ทั้งสองลงเป็นบทพิสูจน์เดียวว่า

ถ้าคอร์ดจำนวนหนึ่งของวงกลมวงหนึ่ง ลากไปพบกันที่จุดภายในหรือ ภายนอกวงกลม, สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยส่วนทั้งสองของคอร์ด ๆ หนึ่ง ย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองของคอร์ดอีกคอร์ดหนึ่ง.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 57–59.

(เกี่ยวกับการคำนวณและการสร้าง.)

1. จงเขียนวงกลมมีรัศมี 5 ซม., และให้ X เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายในห่างจากจุดศูนย์กลาง 0.3 ซม. ลากคอร์ด AB,CD ให้ผ่านจุด X.

(i) จงวัดส่วนยาวของเส้นตรง AB,CD; แล้วจงหาพื้นที่ ของ สี่เหลี่ยม ผืนผ้า AX.XB และ CX.XD, โดยประมาณ แล้วเปรียบเทียบผลดู.

(ii) ลากคอร์ด MN และให้ถูกแบ่งครึ่งด้วยจุด X; และจากสามเหลี่ยมมุมฉาก OXM จงคำนวณค่าของ XM^2.

(iii) จงคำนวณว่าค่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้า AX,XB ที่หาได้ผิดจากค่าอันแท้จริงไปกี่เปอร์เซ็นต์ ?

2. จงเขียนวงกลมมีรัศมี 3 ซม., และ X เป็นจุดภายนอกวงกลมห่างจากจุดศูนย์กลาง O มีระยะ 5 ซม. จากจุด X ลากเส้นตัดสองเส้นคือ XAB กับ XCD.

(i) จงวัด XA,XB และ XC,XD; แล้วจงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า XA.XB กับ XC.XD, และเปรียบเทียบผลที่ได้.

(ii) ลากเส้นสัมผัส XT; และจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XTO จงคำนวณหาค่าของ XT^2.

(iii) จงหาว่าพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า AX,XB ผิดจากค่าจริงไปร้อยละเท่าไร ?

3. AB,CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด X. AX = 1.8 นิ้ว, XB = 1.2 นิ้ว, และ CX = 2.7 นิ้ว. ถ้า A,B,C,D เป็นจุดที่วงกลมล้อมรอบได้, จงหาความยาวของ XD.

จงเขียนวงกลมให้ผ่านจุด A,C,B, และสอบดูผลโดยการวัด.

4. เส้นตัดวง XAB และเส้นสัมผัสช่วง XT ลากจากจุดภายนอก X ไปยังวงกลม.

(i) ถ้า XA = 0.6", และ XB = 2.4", จงหา XT.

(ii) ถ้า XT = 7.5 ซม., และ XA = 4.5 ซม., จงหา XB.

5. ครึ่งวงกลมวงหนึ่งสร้างบนเส้น AB ที่กำหนดให้; และ X เป็นจุดๆหนึ่งอยู่บนเส้น AB, เส้นตั้งฉาก XM ลากตั้งฉากกับ AB ตัดเส้นรอบวงที่จุด M: จงพิสูจน์ว่า $AX.XB = MX^2$.

(i) ถ้า AX = 2.5 นิ้ว, และ MX = 2.0 นิ้ว, จงหา XB; แล้วคำนวณหาความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลางของครึ่งวงกลม.

(ii) ถ้ารัศมีของครึ่งวงกลมยาว 3.7 ซม., และ AX = 4.9 ซม., จงหา MX.

6. จุด X เคลื่อนอยู่ภายในวงกลมซึ่งมีรัศมียาว 4 ซม., และ PQ เป็นคอร์ดที่ลากผ่านจุด X; ถ้า PX.XQ = 12 ตร.ซม., เสมอไปแล้ว, จงหาโลกัสของจุด X.

ถ้า X เคลื่อนอยู่ภายนอกของวงกลมวงเดียวกัน, และทำให้ PX.XQ = 20 ตร. ซม. โลกัสของจุด X จะเป็นอย่างไร ?

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่57–59.

(เกี่ยวกับการพิสูจน์.)

1. ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม C เป็นมุมฉาก; และจากจุด C มีเส้นตั้งฉาก CD ลากไปยังด้านทะแยง: จงพิสูจน์ว่า $AD.DB = CD^2$.

2. ถ้า X เป็นจุดๆ หนึ่งบนคอร์ดร่วมของวงกลมสองวงที่ตัดกัน, มีคอร์ด AB และ CD ลากผ่านจุด X และต่างก็อยู่ในวงกลมคนละวง, จงพิสูจน์ว่า

$$AX.XB = CX.XD.$$

3. อาศัยบทพิสูจน์ที่ 58 พิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสสองที่ลากจากจุดภายนอกของวงกลมย่อมยาวเท่ากัน.

4. ถ้าวงกลมสองวงตัดกัน เส้นสัมผัสสองวงที่ลากจากจุดซึ่งอยู่บนส่วนต่อของคอร์ดร่วม มายังวงกลมทั้งสอง ย่อมยาวเท่ากัน.

5. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B ถ้ามีเส้นสัมผัสร่วม PQ ลากไปสัมผัสวงกลมทั้งสอง, จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อ AB ออกไปจะแบ่งครึ่ง PQ.

6. ถ้าเส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่จุด X กระทำให้ AX.XB = CX.XD, อาศัยบทพิสูจน์ที่ 57 (โดยวิธีเป็นไปไม่ได้) พิสูจน์ว่า จุด A,B,C,D เป็นจุดคอนไซคลิค.

7. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, มีเส้นตั้งฉาก AP,BQ ลากจากจุด A และ B ไปยังด้านตรงข้าม, และตัดกันที่จุด O: จงพิสูจน์ว่า

$$AO.OP = BO.OQ.$$

8. ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก, จากจุด C มีเส้นตั้งฉาก CD ลากไปตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก; จงพิสูจน์ว่า $AB.AD = AC^2$.

9. A เป็นจุดๆ หนึ่งของวงกลมสองวงตัดกัน, มีเส้นตรง CAE และ DAF ลากผ่านจุดนั้น, และต่างก็ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละวงไปสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง: จงพิสูจน์ว่า $CA.AE = DA.AF$.

10. ถ้าจากจุดภายนอก P มีเส้นสัมผัสสองสองเส้นลากไปสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O และรัศมี r; และถ้า OP ตัดคอร์ดซึ่งต่อจุดสัมผัสทั้งสองที่จุด Q; จงพิสูจน์ว่า $OP.OQ = r^2$.

11. AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางตายตัวของวงกลมวงหนึ่ง, และ CD เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB (หรือส่วนต่อของ AB); ถ้ามีเส้นตรงลากจากจุด A ตัดเส้น CD ที่จุด P และตัดวงกลมที่ Q, จงพิสูจน์ว่า

$$AP.AQ = \text{คงตัว}.$$

12. A เป็นจุดตายตัว, และ CD เป็นเส้นตรงตายตัว; AP เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปพบ CD ที่ P; และถ้ากำหนดจุด Q ให้อยู่บนเส้น AP โดยกระทำให้ $AP.AQ$ คงตัวเสมอ, จงหาโลกัสของจุด Q.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 57–59.

(โจทย์ระคน.)

1. คอร์ดของส่วนโค้งของวงกลม = 2 C, ส่วนสูงของส่วนโค้ง = h, รัศมี = r. จงพิสูจน์ด้วยบทพิสูจน์ที่ 57 ว่า $h\,(2r-h) = c^2$.

แล้วจงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีคอร์ดยาว 24" และคอร์ดนี้ตัดส่วนของวงกลมสูง 8".

2. รัศมีของส่วนโค้งของประตูเป็น 25 ฟุต, และสูง 18 ฟุต: จงหาส่วนกว้างของส่วนโค้งของประตู.

ถ้าส่วนสูงลดลงเสีย 8 ฟุต, และรัศมีคงเดิม, ส่วนกว้างของส่วนโค้งของประตูจะลดลงเท่าไร ?

สอบดูผลของการคำนวณ ด้วยวิธีเขียนรูป ใช้ 1" แทน 10 ฟุต.

3. จงใช้สมการ $h\,(2r-h) = c^2$ หาส่วนสูงของส่วนโค้ง ซึ่งมีคอร์ดยาว 16 ซม., และรัศมียาว 17 ซม.

จงอธิบายผลทั้งสองตามเรขาคณิต.

4. ถ้า d หมายถึงระยะที่สั้นที่สุดจากจุดภายนอกมายังวงกลมวงหนึ่ง, และ t เป็นความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดเดียวกัน, จงพิสูจน์ด้วยบทพิสูจน์ที่ 58 ว่า $d(d+2r) = t^2$.

แล้วจงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม เมื่อ $d = 1.2''$, และ $t = 2.4''$; และตรวจดูผลโดยการเขียนรูป.

5. ผู้สังเกตผู้หนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 330 ฟุตเหนือระดับน้ำทะเล สามารถมองไปยังเส้นขอบฟ้าเป็นระยะทาง $22\frac{1}{2}$ ไมล์, จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของโลกอย่างหยาบ ๆ.

แล้วจงหาระยะโดยประมาณ จากที่ระดับน้ำทะเลไปยังแสงสว่างอันสุกใสซึ่งอยู่เหนือพื้นทะเล 66 ฟุต.

6. ถ้า h เป็นส่วนสูงของส่วนโค้งซึ่งมีรัศมี r, และ b เป็นส่วนยาวของคอร์ดซึ่งอยู่ในครึ่งหนึ่งของส่วนโค้ง, จงพิสูจน์ว่า

$$b^2 = 2rh.$$

7. ครึ่งวงกลมเขียนบนเส้น AB ซึ่งใช้เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง, และมีคอร์ด AC, BD ลากตัดกันที่จุด P: จงพิสูจน์ว่า

$$AB^2 = AC.AP + BD.BP.$$

8. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด B และ C, และมีเส้นสัมผัสร่วมตรง AE และ DF ลากมาสัมผัส: ถ้าต่อคอร์ดร่วมออกไปพบเส้นสัมผัสทั้งสองที่จุด G และ H, จงพิสูจน์ว่า

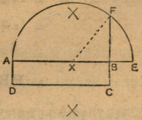
$$GH^2 = AE^2 + BC^2.$$

9. ถ้าจากจุดภายนอก P มีเส้นตัดวง PCD ลากไปตัดวงกลม, และ PM ลากไปตั้งฉากกับเส้นผ่าศูนย์กลาง AB, จงพิสูจน์ว่า

$$PM^2 = PC.PD + AM.MB.$$

บทสร้างที่ 32.

จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD.

สร้าง ต่อเส้น AB ออกไปถึงจุด E, ทำ BE ให้เท่ากับ BC.

ให้ AE เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางเขียนครึ่งวงกลม;

และต่อ CB ไปพบเส้นรอบวงที่จุด F.

แล้ว BF จะเป็นด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมจตุรัสตามต้องการ.

พิสูจน์ ให้ X เป็นจุดกึ่งกลางของ AE, และ r เป็นรัศมีของครึ่งวงกลม.

ลากเส้น XF.

ดังนั้นสี่เหลี่ยมผืนผ้า AC $= AB.BE$

$$= (r+XB)(r-XB)$$

$$= r^2 - XB^2$$

$$= FB^2, \quad \text{(บ.พ. 29)}.$$

บทแทรก. จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับรูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้.

จงย่อรูปหลายเหลี่ยม ลงเป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีพื้นที่เท่ากัน (บ.ส. 18).

สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยม (บ.ส. 17).

อาศัยสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ แล้วดำเนินการสร้างตามข้างบน.

แบบฝึกหัด.

1. จงเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาว 8 ซม. กว้าง 2 ซม., และสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้น. อยากทราบว่าด้านหนึ่งยาวเท่าไร ?

2. จงหาความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านยาว และกว้างเท่ากับ 3.0" และ 1.5". ตอบผลด้วยการวัดและคำนวณ.

3. จงเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่เท่ากับ 3.75 ตร. นิ้ว; และสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้น. จงหาความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสด้วยการวัดและคำนวณ.

4. จงเขียนสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้านยาวด้านละ 3 นิ้ว, และสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมนั้น (บทสร้างที่ 17). แล้วจงหาความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากันนั้น ด้วยการคำนวณและการวัด.

5. จงเขียนสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้: $A = 65^\circ$; $AB = AD = 9$ ซม.; $BC = CD = 5$ ซม. จงแปลงรูปสี่เหลี่ยมนี้ให้เป็นรูปสามเหลี่ยม (บทสร้างที่ 18), แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่เท่ากัน. จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากัน, และวัดความยาวของด้านสี่เหลี่ยมจตุรัส.

6. จงแบ่งเส้นตรง AB, ซึ่งยาว 9 ซม., อย่างภายในที่จุด X, และให้ AX.XB เท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งยาวด้านละ 4 ซม.

แล้วจงเขียนรูปหาค่าของ สมการสองชั้นต่อไปนี้ ที่ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง:

$$x+y=9, \qquad xy=16.$$

7. ใช้ $\frac{1}{10}''$ เป็นหน่วยของความยาว, แก้สมการต่อไปนี้ด้วยวิธีสร้างรูปทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

$$x+y=40, \qquad xy=169.$$

8. พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 25 ตร.ซม., และความยาวของด้านหนึ่งเป็น 7.2 ซม.; จงเขียนรูปหาความยาวของด้านอีกด้านหนึ่ง ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง และสอบผลด้วยวิธีคำนวณ.

9. จงแบ่งเส้นตรง AB, ยาว 8 ซม., ภายนอกที่จุด X, ให้ AX.XB = สี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีด้านยาวด้านละ 6 ซม.

แล้วจงเขียนรูปหาค่าของสมการต่อไปนี้ ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง.

$$x-y=8, \quad xy=36.$$

10. บนเส้นตรง AB เขียนครึ่งวงกลม, และ P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่บนเส้นรอบวงลากเส้น PX ให้ตั้งฉากกับ AB. ลากเส้น AP, PB, และมีความยาวเท่ากับ x, y ตามลำดับ.

จงสังเกตว่า (i) $x^2+y^2=AB^2$;

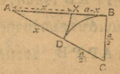
(ii) $xy = 2\triangle APB = AB.PX$

จงสร้างรูปและหาค่าด้วยการวัดของสมการ

$$x^2+y^2=100; \quad xy=25.$$

บทสร้างที่ 33.

จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยเส้นตรงเส้นนั้น กับส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ถูกแบ่ง มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องแบ่ง AB ที่จุด X ให้ $AB.BX = AX^2$.

สร้าง ลากเส้น BC ให้ตั้งฉากกับ AB, และทำ BC ให้เท่ากับครึ่งหนึ่งของ AB. ลากเส้น AC.

เอา C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี CB, เขียนส่วนโค้งตัด CA ที่จุด D.

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AD เขียนส่วนโค้งตัด AB ที่จุด X แล้ว X จะเป็นจุดที่แบ่ง AB ตามต้องการ.

พิสูจน์ ให้ AB ยาว = a หน่วย,

และให้ AX = x หน่วย.

ดังนั้น BX $= a-x$ หน่วย; AD $= x$;

$BC = CD = \frac{a}{2}$.

$\because AB^2 = AC^2 - BC^2$, (บ.พ. 29).

$= (AC - BC)(AC+BC)$;

(บ.พ. 53).

นั่นก็คือ, $a^2 = x(x+a)$

$= x^2 + ax$.

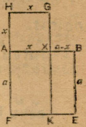
เอา ax ลบออกเสียทั้งสองข้าง;

แล้ว $a^2 - ax = x^2$;

หรือ $a(a-x) = x^2$,

นั่นคือ $AB.BX = AX^2$.

แบบฝึกหัด.



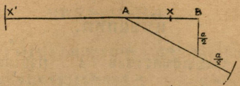
ให้ AB ถูกแบ่งอย่างข้างบนที่จุด X. บนเส้น AB สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABEF, และบน AX สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส AXGH; คนละข้างของเส้น AB และต่อ GX ไปพบ FE ที่จุด K. ตามรูปนี้ให้บอกรูปต่าง ๆ ที่มีพื้นที่ a^2, x^2, $x(x+a)$, ax, และ $a(a-x)$.

แล้วจงแสดงการพิสูจน์ข้อข้างบนนี้ด้วยรูป.

หมายเหตุ. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งแล้วทำให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงเส้นนั้น กับส่วนที่ถูกแบ่งมีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง เรียกการแบ่งนี้ว่า "แบ่งอย่างมัธยะ" (Medial Section).

การแบ่งนี้สามารถจะแบ่งได้ทั้งภายในและภายนอก; เช่น AB ถูกแบ่งภายในที่จุด X, และถูกแบ่งภายนอกที่จุด X', กระทำให้ (i) $AB.BX = AX^2$,

(ii) $AB.BX' = AX'^2$.



อาศัยการสร้าง ตามบทสร้างที่ 33 และเปลี่ยนแปลงบ้างก็จะหาจุด X', ได้คือ เอา C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี CB, เขียนส่วนโค้งตัดส่วนต่อของ AC ที่จุด D.

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AD, เขียนส่วนโค้งตัดส่วนต่อของ BA ที่จุด X' ในทิศทางลบ.

การพิสูจน์ด้วยวิธีพีชคณิต.

ถ้าเส้นตรง AB ถูกแบ่งที่จุด X, ภายในหรือภายนอกก็ตาม, กระทำให้

$$AB.BX = AX^2,$$

และถ้า $AB = a$, $AX = x$, และ $BX = a - x$,

แล้วจะได้ $a(a-x) = x^2$,

หรือ $x^2 + ax - a^2 = 0$,

และค่าของสมการควอเดรติคนี้จะได้ $\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$ และ $-\left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}\right)$, ซึ่งเป็นความยาวของ AX และ AX'.

แบบฝึกหัด.

1. จงแบ่งเส้นตรงซึ่งยาว 4" ภายในแบ่งอย่างมัชยะ. จงวัดส่วนของเส้นตรงที่ยาวกว่า, และใช้วิธีพีชคณิตหาค่าด้วย.

2. จงแบ่ง AB, ซึ่งยาว 2 นิ้ว, ภายนอกแบ่งอย่างมัชยะที่จุด X'. จงวัดและหาค่าอย่างวิธีพีชคณิตของส่วน AX', และอธิบายเครื่องหมายลบตามความหมายของเรขาคณิตด้วย.

3. ในรูปของบทสร้างที่ 33, จงพิสูจน์ว่า

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \qquad (\text{บ.พ. } 29).$$

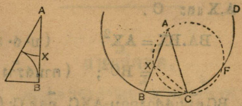
แล้วพิสูจน์ว่า (i) $AX = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$;

(ii) $AX' = -\left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}\right)$.

4. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถูกแบ่ง ภายใน แบ่งอย่างมัชยะ, และจากส่วนที่ยาวกว่าตัดออกให้เท่ากับส่วนที่สั้นกว่า, จงพิสูจน์ว่าส่วนที่ยาวกว่าก็ถูกแบ่งอย่างมัชยะด้วย.

บทสร้างที่ 34.

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีมุมที่ฐานโตเป็นสองเท่าของมุมยอด.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นด้านหนึ่งของด้านที่เท่ากันของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้มีมุมที่ฐาน เป็นสองเท่าของมุมยอด.

สร้าง แบ่ง AB ที่จุด X ให้ $AB.BX = AX^2$.

(บ. ส. 33).

(การสร้างนี้แยกไว้ต่างหาก.)

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AB, เขียนส่วนโค้งของวงกลม BCD; เขียนคอร์ด BC ให้ยาวเท่ากับ AX.

ลากเส้น AC.

แล้ว △ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ.

พิสูจน์ ลากเส้น XC, และสมมติให้เส้นรอบวงผ่านจุด A,X และ C.

$BA.BX = AX^2$ (บ. ส. 33).

$= BC^2$; (ตามสร้าง).

∴ BC สัมผัสวงกลม AXC ที่จุด C; (บ.พ.59).

∴ มุม BCX = มุม XAC, (บ. พ. 49).

เอามุม XCA บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้

มุม BCA = มุม XAC + มุม XCA

= มุม CXB. (บทแทรก บ.พ. 16).

และมุม BCA = มุม CBA, (บ.พ. 5).

∴ มุม CBX = มุม CXB;

∴ CX = CB = AX,

∴ มุม XAC = มุม XCA;

∴ มุม XAC + มุม XCA = สองเท่าของมุม A.

แต่มุม ABC = มุม ACB = มุม XAC + มุม XCA. (พิสูจน์แล้ว).

= สองเท่าของมุม A.

แบบฝึกหัด.

1. มุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะกางกี่องศา เมื่อรูปสามเหลี่ยมนั้นมีมุมที่ฐานเป็นสองเท่าของมุมยอด ?

2. จงแสดงให้เห็นว่า จะแบ่งมุมฉากออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กันได้อย่างไร ? อาศัยบทสร้างที่ 34.

3. ในรูปของบทสร้างที่ 34 จงชี้ให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมอะไรที่มีมุมยอดเป็นสามเท่าของมุมที่ฐาน ? และจงแสดงให้เห็นว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมนั้นอย่างไร ?

4. ถ้าในสามเหลี่ยม ABC, มุม B = มุม C = สองเท่าของมุม A, จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

5. ในรูปของบทสร้างที่ 34, ถ้าวงกลมสองวงตัดกันที่จุด F, จงพิสูจน์ว่า

(i) BC = CF;

(ii) วงกลม AXC = วงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC;

(iii) BC, CF เป็นด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งบรรจุในวงกลม BCD;

(iv) AX, XC, CF เป็นด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งบรรจุในวงกลม AXC.

6. ในรูปของบทสร้างที่ 34, จงพิสูจน์ว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งล้อมรอบสามเหลี่ยม CBX เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง XC.

7. ในรูปของบทสร้างที่ 34, ถ้า I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายในสามเหลี่ยม ABC, และ I', S' เป็นจุดศูนย์กลาง บรรจุภายใน และล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม CBX, จงพิสูจน์ว่า S'I = S'I'.

8. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งอย่างมัธยะ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยผลบวกและผลต่างของส่วนของเส้นตรงย่อมเท่ากับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองนั้น.

9. ถ้าเส้นตรง AB ถูกแบ่งภายในแบ่งอย่างมัชยะ ที่จุด X, จงพิสูจน์ว่า.

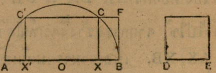
$$AB^2 + BX^2 = 3\ AX^2.$$

แล้วสอบผลนี้ดูโดยเอาค่าซึ่งกำหนดไว้ในหมายเหตุของบทสร้าง 33 มาแทนค่า.

การหาค่าของสมการควอเดรติคด้วยวิธีสร้างรูป.

จากการสร้างต่อไปนี้ ซึ่งเกี่ยวกับบทสร้างที่ 32, จะหาค่าของสมการควอเดรติคได้อย่างง่ายดาย.

1. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งภายใน ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนแบ่งทั้งสองเท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงที่ถูกแบ่ง, และ DE เป็นด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องแบ่งเส้นตรง AB ที่จุด X ให้ $AX.XB = DE^2$.

สร้าง ใช้ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางเขียนครึ่งวงกลม; และจากจุด B ลากเส้น BF ให้ตั้งฉากกับ AB และให้เท่ากับ DE.

จากจุด F ลากเส้น FCC' ให้ขนานกับ AB, ตัดเส้นรอบวงที่จุด C และ C'.

จากจุด C และ C' ลาก CX, C'X' ตั้งฉากกับ AB. แล้วจุด X และ X' จะแบ่งเส้นตรง AB ตามต้องการ.

พิสูจน์ $AX.XB = CX^2$ (บ.ส. 32).

$$= BF^2$$

$$= DE^2$$

ในทำนองเดียวกัน $AX' \cdot BX' = DE^2$.

การนำไปใช้ จากการสร้างนี้จะเห็นได้ว่าส่วนของเส้นตรงคือ AX, XB, เมื่อเอามารวมกันเข้าจะเท่ากับ AB, และเมื่อคูณกันเข้าจะเท่ากับจตุรัสบน DE.

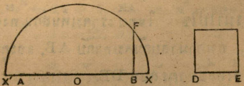
ดังนั้นถ้าจะแก้สมการ $x^2 - 13x + 36 = 0$, เราจะต้องหาเลขสองจำนวนเมื่อบวกกันจะเท่ากับ 13, และคูณกันจะเท่ากับ 36, หรือ 6^2.

ในการสร้างนี้อาศัยการสร้างดังข้างบน, คือฉากเส้น AB ให้ยาวเท่ากับ 13 ซม., และ DE เท่ากับ $\sqrt{36}$ หรือ 6 ซม. ความยาวของส่วนที่ถูกแบ่ง AX, XB ก็คือค่าของสมการนี้ จะรู้ได้ก็ด้วยการวัด.

หมายเหตุ ถ้าเทอมสุดท้ายของสมการไม่สามารถจะถอดกรณฑ์ได้ เช่น:

$x^2 - 7x + 11 = 0$, เราก็ต้องหาค่าของ $\sqrt{11}$ ตามวิธีเลขคณิต, หรือวิธีสร้างอาศัยบทที่สร้างที่ 16 หรือ 32.

II จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งภายนอก ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งสองที่ถูกแบ่ง เท่ากับจตุรัสที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง, และ DE เป็นด้านๆ หนึ่งของจตุรัสที่กำหนดให้.

สิ่งที่ต้องการ จะต้องแบ่ง AB ภายนอกที่จุด X ให้ $AX.XB = DE^2$.

สร้าง จากจุด B ลากเส้น BF ให้ตั้งฉากกับ AB, และให้ยาวเท่ากับ DE.

แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O.

เอา O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี OF, เขียนครึ่งวงกลมตัดส่วนต่อของ AB ที่จุด X และ X'.

ดังนั้น X และ X' จะแบ่งเส้นตรง AB ภายนอกตามต้องการ.

พิสูจน์ $AX.XB = X'B.BX \quad \because AX = X'B,$

$$= BF^2 \qquad (\text{บ.ศ. } 32).$$

$$= DE^2.$$

การนำไปใช้ ในที่นี้ เราจะเห็นส่วน ทั้งสอง คือ AX, XB, ถ้าเอามาลบกันจะเท่ากับ AB, และคูณกันจะได้เท่ากับสี่เหลี่ยมจตุรัสบน DE.

ดังนั้น ถ้าจะแก้สมการ $x^2 - 6x - 16 = 0$, เราจะต้องหาเลขสองจำนวนซึ่งผลต่างเท่ากับ 6, และผลคูณเท่ากับ 16, หรือ 4^2.

ในการสร้างนี้อาศัยการสร้างดังข้างบน คือลาก เส้น AB ให้เท่ากับ 6 ซม., และ DE เท่ากับ $\sqrt{16}$ หรือ 4 ซม. ดังนั้นส่วนทั้งสองคือ AX,XB เป็นค่าของสมการนี้ จะรู้ได้ด้วยการวัด.

แบบฝึกหัด.

จงหาค่าโดยประมาณ ของสมการควอเดรติคต่อไปนี้ ด้วยวิธีสร้างและสอบดูผลด้วยวิธีพีชคณิต.

1. $x^2 - 10x + 16 = 0$
2. $x^2 - 14x + 49 = 0$
3. $x^2 - 12x + 25 = 0$
4. $x^2 - 5x - 36 = 0$
5. $x^2 - 7x - 49 = 0$
6. $x^2 - 10x + 20 = 0$
7. $x^2 + 2x + 7 = 0$
8. $x^2 + 11x - 26 = 0$
9. $x^2 - 4x - 21 = 0$

แบบฝึกหัด. (ใช้กระดาษกราฟ.)

1. วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด (0,4), (0,9) และไปสัมผัสส์หลัก x ที่จุด P. จงหาความยาวของเส้น OP ด้วยการคำนวณและการวัด.

2. เอาจุด (9, 6) เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมวงหนึ่งให้ไปสัมผัสหลัก y. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบขึ้นด้วยคอร์ดใด ๆ ก็ตาม แต่ต้องผ่านจุด O. และหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จะประกอบขึ้นด้วยคอร์ดใด ๆ ก็ตาม แต่ต้องผ่านจุด (9, 12).

3. เขียนวงกลม (จงแสดงการสร้างให้เห็นเส้นทั้งหมด) ให้ผ่านจุด (6,0), (24,0), (0,9). วงกลมนี้จะตัดหลัก y ที่จุดอีกจุดหนึ่ง, ดังนั้นจุดนี้จะห่างจากจุดเดิมเท่าไร ? แล้ววัดดูให้เห็นจริง กับให้หาส่วนยาวของเส้นสัมผัสที่ลากไปยังวงกลมจากจุดเดิมด้วย.

4. จงเขียนวงกลมให้ผ่านจุด (10,0), (0,5); (0,20); และพิสูจน์โดยใช้บทพิสูจน์ที่ 59 ว่า วงกลมวงนี้สัมผัสหลัก .

จงหา (i) จุดร่วมของจุดศูนย์กลาง, (co-ordinate)

(ii) ความยาวของรัศมีวงกลม.

5. ถ้าลากวงกลมให้ผ่านจุด (16,0), (18,0); (0,12), จงพิสูจน์โดยใช้บทพิสูจน์ที่ 58 ว่า วงกลมนี้จะผ่านจุด (0,24) ด้วย.

จงหา (i) จุดร่วมของจุดศูนย์กลาง,

(ii) ความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดเดิม.

6. จงเขียนจุด A, B, C และ D จากจุดร่วมต่อไปนี้ (12, 0), (−6, 0), (0, 9), (0, −8); และพิสูจน์โดยใช้บทพิสูจน์ที่ 57 ว่า จุดทั้งสี่นี้จะอยู่บนเส้นรอบวงอันเดียวกัน. ถ้าให้ r เป็นส่วนยาวของรัศมีของวงกลม, จงแสดงให้เห็นว่า,

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4r^2.$$

7. จงเขียนวงกลม (แสดงให้เห็นการสร้างของเส้นทุก ๆ เส้น) ไปสัมผัสสัมผัสหลัก ที่จุด (0, 9), และตัดหลัก x ที่จุด (3, 0).

จงพิสูจน์ว่า วงกลมจะต้องตัดหลัก x อีกครั้งหนึ่งที่จุด (27, 0); แล้วหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้ตัดให้เห็นจริงด้วย.

8. จงแสดงให้เห็นว่า รัศมียาว 13 ของวงกลม 2 วง ซึ่งลากมาตัดกันที่จุด (0, 8) และต่างกสัมผัสสัมผัสหลัก x; จงหาความยาวของคอร์ดร่วมโดยใช้วิธีพิสูจน์ในบทพิสูจน์ที่ 58.

9. จงสร้างวงกลมวงหนึ่งซึ่งมีรัศมียาว 15, จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเดิม. จงแสดงให้เห็นว่า จะเขียนวงกลมอีกวงหนึ่งให้มีรัศมีเท่ากันได้อย่างไร ? และให้สัมผัสส์ ที่หลัก x ด้วย.

จะเขียนวงกลมได้กี่วง ? จงหาจุดร่วมของจุดศูนย์กลางฉะเพาะที่อยู่ในภาคที่ 1. (quadrant).

10. A,B,C และ D เป็นจุด 4 จุดอยู่บนหลัก x ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุดเดิม O. เป็นระยะทาง 6,9,15 และ 25 ตามลำดับ. เขียนวงกลมอีก 2 วงให้ตัดกัน, วงหนึ่งผ่านจุด A,B, อีกวงหนึ่งผ่านจุด C และ D จงหาจุด P ซึ่งอยู่บนหลัก x ทำให้

$$PA.PB = PC.PD.$$

จงคำนวณ และวัด ส่วนยาว OP. ถ้า ระยะทาง A,B,C,D จากจุด O เป็นระยะทาง a,b,c,d ตามลำดับ, จงพิสูจน์ว่า

$$OP = (ab - cd)\ (a + b - c - d).$$

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ไทยพณิชยการ ถนนสีลม พระนคร
นายธนวนต์ จาตุประยูร ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา
สิงหาคม 2490.