กุญแจเรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕

โดย

อำมาตย์เอก พระวรพากย์พจนสินธุ์
อดีตอาจารย์คณิตศาสตร์ โรงเรียนนายเรือ

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๒,๐๐๐ ฉะบับ
พ.ศ. ๒๔๙๑
ราคาเล่มละ ๘.๐๐ บาท

ประชาช่าง

...ที่ บริษัท ประชาช่าง จำกัด
...ลาดน้อย พระนคร

กุญแจเรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕

โดย

อำมาตย์เอก พระวรพากย์พจนสินธุ์

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๖,๐๐๐ ฉะบับ

พ.ศ. ๒๔๙๓

ราคาเล่มละ ๘.๐๐ บาท

ประชาช่าง

พิมพ์จำหน่ายที่ บริษัทประชาช่าง จำกัด

ตลาดน้อย พระนคร

คำนำ

ในกุญแจเรขาคณิตเล่มก่อน ข้าพเจ้าได้พยายามเฉลยปัญหาต่าง ๆ ไว้อย่างละเอียด พร้อมทั้งได้วางระเบียบการแก้โจทย์ เช่น "กำหนดให้, จะต้องพิสูจน์, สร้าง, พิสูจน์........" ไว้อย่างสมบูรณ์ ทั้งนี้เพราะสำหรับชั้นมัธยมปีที่ 4 นั้น นักเรียนเพิ่งเริ่มเรียนเรขาคณิตใหม่ ๆ การเฉลยโจทย์จึงต้องให้แจ่มแจ้งและเข้าใจง่าย และเท่าที่ข้าพเจ้าได้วางระเบียบไว้อย่างละเอียดก็เพื่อจะให้นักเรียนมีระเบียบในการทำงานต่อไปในตัว แต่ใน "กุญแจเรขาคณิต มัธยมปีที่ 5" นี้ ข้าพเจ้ามาคิดดูรู้สึกว่า นักเรียนได้ผ่านการแก้โจทย์มาบ้างมีความชำนาญพอสมควรแล้ว ฉะนั้นสำหรับระเบียบและคำอธิบาย อย่างฟุ่มเฟือยจึงมิสู้เป็นของจำเป็น ฉะนั้นในเล่มนี้แบบฝึกหัดใดที่ข้าพเจ้าเห็นว่าง่ายมากจึงของดเสียไม่อธิบาย หรือบางทีก็ให้แต่เพียง "คำแนะนำ" หรือ "วิธีทำย่อ ๆ" ไว้เท่านั้น ส่วนแบบฝึกหัดใดที่ข้าพเจ้าเห็นว่ายากก็ได้เฉลยไว้โดยละเอียด ซึ่งทั้งนี้ข้าพเจ้าหวังว่าคงเป็นประโยชน์สำหรับนักเรียน ที่จะได้พยายามใช้ความคิด ความอ่านของตนเองบ้าง แทนที่จะลอก "กุญแจเรขาคณิต มัธยมปีที่ 5" ของข้าพเจ้าลงไปในสมุดทำงานโดยไม่มีความเข้าใจแต่อย่างใดเลย.

อนึ่ง "กุญแจเรขาคณิต" นี้เปรียบเสมือนมีดสองคม หากนักเรียนรู้จักใช้ เช่นนำมาใช้ในเมื่อจำเป็นจริง ก็จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างอนันต์ แต่ถ้าหากนักเรียนนำมาใช้พร่ำเพรื่อบ่อยครั้งเข้าก็อาจพลาดบาดเอามือได้ฉันใด "กุญแจเรขาคณิต" นี้ ถ้าหากนักเรียนใช้เสียจนเคยชินจนกลายเป็นนิสสัยแล้ว ก็อาจเป็นผลเสียแก่นักเรียนในตอนหลัง คือเวลาสอบปลายปีได้ ฉะนั้นข้าพเจ้าจึงใคร่จะขอวิงวอนให้นักเรียนได้โปรดใช้ "กุญแจเรขาคณิต" นี้ แต่ในเมื่อจำเป็นจริง ๆ เท่านั้น.

"กุญแจเรขาคณิต มัธยมปีที่ 5" นี้ คงจะมีข้อความบางตอนขาดตกบกพร่องอยู่บ้างเป็นธรรมดา จึงหวังในความกรุณาของผู้อ่านที่ได้พบข้อผิดพลาดตอนใด ขอได้โปรดแจ้งให้ข้าพเจ้าทราบด้วยจะเป็นพระคุณยิ่ง.

ในที่สุดนี้ข้าพเจ้าหวังว่า "กุญแจเรขาคณิต มัธยมปีที่ 5" นี้ คงอำนวยความสะดวกให้แก่ผู้เรียนบ้างไม่มากก็น้อย.

พระวรพากย์พจนสินธุ์

1 ม.ค. 2491

สารบัญ

กุญแจเรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๕

แบบฝึกหัดว่าด้วยการสร้างสี่เหลี่ยม

ว. ร. หน้า 7

1/7 จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้ด้านทุก ๆ ด้านเท่ากับเส้นตรง PQ ที่กำหนดให้ และมีเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งเท่าที่กำหนดให้ด้วย จงคิดดูว่า (ไม่ใช่วัดดู) ว่ามุมหนึ่งกางกี่องศา และให้เหตุผลด้วย (H & S 1/89)

ข้อแนะนำในการสร้าง ให้ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งมีความยาวเท่ากับเส้นทะแยงมุมที่กำหนดให้ แล้วเอาจุดปลายทั้งสองข้างเป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่ากับ PQ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด R และ S คนละข้างของเส้นตรง ลาก PR, PS, QR, QS แล้ว PQRS จะเป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกที่ต้องการ

∴ PQR เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า (ตามสร้าง)

∴ มุม ๆ หนึ่งของสามเหลี่ยม PQR กาง 60°

∴ มุมที่ P และ Q ต่างเท่ากับ 2 เท่าของมุม ๆ หนึ่ง ของสามเหลี่ยมด้านเท่า = 120°

2/ โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านยาว 2.5 นิ้ว จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมเท่ากัน และใช้วงวัดเส้นทะแยงมุมทั้งสอง (ใช้ทศนิยมสองตำแหน่ง) เพื่อตรวจแก้การสร้างรูปของท่าน (H & S 2/89)

วิธีสร้าง ดูข้อ 3 ใน ว. ร. หน้า 51

3/8 โจทย์ จงสร้าง สี่เหลี่ยม จัตุรัส บนเส้น ทะแยง มุมยาว 3 นิ้ว และวัดความยาวของทุก ๆ ด้าน หาผลลัพธ์เป็นรายเฉลีย (H & S 3/89)

ข้อแนะนำในการสร้าง เส้น ทะแยง มุมของ สี่เหลี่ยม จัตุรัส ย่อมเท่ากันและแบ่งครึ่งกันเป็นมุมฉาก ดังนั้น ในการสร้าง จากเส้นทะแยงมุม AC, BD ให้เส้นหนึ่ง ๆ ยาว 3 นิ้ว ให้แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกันเป็นมุมฉากที่ O ต่อเส้นระหว่างจุดปลายของเส้นทะแยงมุม จะได้สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องการ

พิสูจน์ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$ (ท.บ. 4)

$\therefore AB = BC = CD = DA$

ใน $\triangle AOB \because \hat{AOB} = 90^\circ$

$\therefore \hat{OAB} + \hat{OBA} = 90^\circ$ (ท.บ.16)

แต่ $\because OA = OB \quad \therefore \hat{OAB} = \hat{OBA} = 45^\circ$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\hat{DAO} = 45^\circ$

$\therefore \hat{DAB} = \hat{DAO} + \hat{BAO} = 90^\circ$

เช่นเดียวกัน เราอาจ พิสูจน์ ได้ว่า มุม ทุกมุม ของ ABCD ต่างเป็นมุมฉาก

$\therefore$ ABCD เป็น สี่เหลี่ยมจตุรัสที่ต้องการ

(สำหรับรายละเอียดในการวัด และ วิธีหารายเฉลย จะทิ้งไว้ให้นักเรียนทำเอง)

4/9 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ให้ด้าน AB ยาว 5.5 ซม. และเส้นทะแยงมุมยาว 8 ซม. และ 6 ซม. ตามลำดับ วัดเส้น AD (H & S 4/89)

ข้อแนะนำในการสร้าง สร้างสามเหลี่ยม ODC ให้มีด้าน DC ยาว 5 5 ซม. DO =4ซม. OC =3ซม ต่อCO และ OD ไปถึงจุด A และ B ทำ OA, OB ให้ยาว 3 และ 4 ซม. ตามลำดับ ลาก DA, AB, BC

แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ ถ้าวัดดูจะได้ AD = 4.4 ซม.

พิสูจน์ $\triangle AOD = BOC$ (ท.บ.4)

$\because \hat{ODA} = \hat{OBC}$ $\therefore AD \parallel BC$ (ท.บ.13)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $AB \parallel CD$ (,,)

$\therefore$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

5/9 โจทย์ เส้นทะแยงมุมทั้งสอง ของสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ยาวเท่ากัน (ยาวเส้นละ 6 ซม.) และแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นมุม 60 จงแสดงให้เห็นว่า มีสิ่งกำหนดให้ในข้อนอยู่ห้าประการ

จงสร้างรูป สี่เหลี่ยมนี้ ให้ดู แล้วบอก ด้วยว่า เป็นสี่เหลี่ยมอะไร และ พิสูจน์ให้ดูด้วย จงวัดความยาวของด้านทั้งสี่ ถ้ามุมระหว่างเส้นทะแยงมุมตัดกันเป็นมุม 90° อยากทราบว่า ความยาว ของด้านทั้งสี่ จะเพิ่มขึ้นเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ ?

คำตอบ สิ่งที่กำหนดให้ห้าประการ คือ ส่วนทั้งสี่ของเส้นทะแยงมุม (AO, BO, CO, DO,) และมุมที่เส้นทะแยงมุมตัดกันมุมใดมุมหนึ่ง

วิธีสร้าง ทำ $\hat{DOC} = 60^\circ$ และทำให้ DO = OC และเท่ากับ 3 ซม.

ต่อ CO ออกไปถึงจุด A และต่อ DO ออกไปถึงจุด B ทำ CO = OA และทำ DO = OB

ลาก AB, BC, CD และ DA

□ ABCD เป็น □ ที่ต้องการ (สี่เหลี่ยมผืนผ้า)

พิสูจน์ $\because \hat{DOC} = 60^\circ$

$\therefore \hat{AOD} = 120^\circ$

$\hat{AOB} = \hat{DOC} = 60^\circ$ (ท.บ.3)

$\hat{BOC} = \hat{AOD} = 120^\circ$ („)

โดยการใช้ ท.บ. 5 และ ท.บ. 16 เราพิสูจน์ได้ว่า

(1) △ AOB เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มี

$\hat{OAB} = \hat{OBA} = 60^\circ$ และหาได้ว่า

AB = 3 ซม.

(2) △ DOC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มี

$\hat{ODC} = \hat{OCD} = 60^\circ$ และหาได้ว่า

CD = 3 ซม.

(3) $\triangle$ AOD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี

$$\hat{OAD} = \hat{ODA} = 30^\circ$$

(4) $\triangle$ BOC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี

$$\hat{OBC} = \hat{OCB} = 30^\circ$$

ดังนั้น $\hat{OAB} + \hat{OAD} = 90^\circ$

โดยทำนองเดียวกัน $\hat{ABC}$, $\hat{BCD}$ และ $\hat{ADC}$ ต่างเท่ากับ 90°

$\therefore$ สี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ซ.ต.พ.

หมายเหตุ (1) ถ้ามุมหนึ่งที่เส้นทะแยงมุมเท่ากับ 60° จะได้ AD = BC = 5 ซม.

(2) ถ้ามุมหนึ่งที่เส้นทะแยงมุมเท่ากับ 90° จะได้สี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(3) รูปสี่เหลี่ยมมีลักษณะแน่นอนได้ ต้องมีกำหนดความยาวของด้าน 4 ด้าน กับมุม 1 มุม หรือความยาวของเส้นทะแยงมุม 1 เส้นหรือความยาวของเส้นทะแยงมุมและมุมที่ตัดกันตรงที่ ๆ กำหนดให้ (เส้นทะแยงมุม 2 เส้น)

โดยไม่กำหนดความยาวของด้านก็ได้ จะสังเกตได้ว่า สิ่งที่กำหนดให้ต้องครบ 5 อย่าง เช่นในข้อ 5 นี้ เส้นทะแยงมุม 2 เส้นๆ ละ 2 ส่วน และมุม 1 มุม ก็ครบ 5 อย่างแล้ว

6/8 **โจทย์** รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน $AB = 5.6$ ซม. $BC = 2.5$ซม., $CD = 4.0$ ซม., และ $DA = 3.3$ซม. จงพิสูจน์ให้เห็นว่า จากสิ่งที่กำหนดให้นี้ ไม่สามารถจะสร้างสี่เหลี่ยมให้มีรูปร่างได้ถูกต้อง

จงสร้างสี่เหลี่ยมนี้เมื่อกำหนด (i) มุม $A = 30^\circ$ (ii) มุม $A = 60^\circ$ และถ้ากำหนดมุม $A = 100^\circ$ ทำไมจึงสร้างสี่เหลี่ยมไม่ได้ (H & S 6/89)

วิธีสร้าง สร้างสี่เหลี่ยม ABCD ในข้อ (1) และ (2) โดย บ.ส. 11 และเราอาจสร้างได้หลายรูป

หาสิ่งซึ่งต้องการรู้ ถ้าลากเส้นทะแยงมุม DB

$BC + CD$ ยาวกว่า BD จึงจะสร้างสามเหลี่ยม BCD ได้ .... (ดู บ.พ. 11)

$\therefore$ BD ต้องยาวน้อยกว่า $(BC + CD)$ หรือน้อยกว่า 6.5 ซม.

เมื่อ $\hat{A} = 30^\circ$ และ 60° ดูการสร้าง ABCD จากรูป

เมื่อ $\hat{A} = 100^\circ$ BDจะยาวกว่า 6.5 ซม. เอา D และ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 4.0 และ 2.5 ซม. เขียนวงกลมส่วนโค้งของวงกลมจะไม่ตัดกัน

∴ จึงสร้างรูปสี่เหลี่ยมไม่ได้

ถ้า BD = 6.5 รัศมีของวงกลมจะตัดกัน ณจุด C ซึ่งอยู่บน BD พอดี จึงไม่เกิดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เช่นกัน

เมื่อ BD ยาว 6.5 ซม. $\hat{A} = 90^\circ$

∴ จะสร้าง □ ABCD ได้เมื่อ $\hat{A}$ มีขนาดน้อยกว่า 90°

7/8 โจทย์ จงแสดงวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้านทั้งสี่ และเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งให้ สิ่งที่กำหนดให้จะต้องมีลักษณะอย่างไร จึงจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมได้

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD กำหนดให้

(i) AB = 3.0 นิ้ว, BC = 1.7 นิ้ว, CD = 2.5 นิ้ว DA = 2.8 นิ้ว และ เส้นทะแยงมุม BD = 2.6 นิ้ว วัดเส้นทะแยงมุม AC

(ii) AB = 3.6 ซม., BC = 7.7 ซม., CD = 6.8 ซม., DA = 5.1 ซม. และเส้นทะแยงมุม AC = 8.5 ซม. วัดมุม B และมุม D (H & S 7/89)

ข้อแนะนำ ถ้าจะสร้างรูปให้ได้เสมอไป สิ่งที่กำหนดให้ต้องให้ผลบวกของด้านประชิดทั้ง 2 คู่ ยาวกว่าเส้นทะแยงมุมซึ่งกำหนดความยาวให้
(สำหรับสร้างรูปให้นักเรียนสร้างดูเอง)

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับโลกัส

ว – ร หน้า 18

1/18 โจทย์ จงหาโลกัสของจุดหนึ่ง เมื่อเคลื่อนที่ไปแล้ว จะมีระยะทางห่างจากเส้นรอบวงของวงกลม วงหนึ่งที่กำหนดให้เท่ากันเสมอ (ให้วัดระยะของรัศมี)

(H & S 1/94)

กำหนดให้ OA เป็นรัศมีของวงกลมวงหนึ่ง P เป็นจุดที่เคลื่อนไป โดยมี ระยะทาง ห่างจาก เส้นรอบวง ของวงกลมที่มีรัศมี OA เท่า ๆ กัน

จะต้องการหาโลกัสของจุด P

วิธีหา สมมติว่า P เคลื่อนมาอยู่บน OA

$\therefore OP = OA - AP$

แต่ OA คงที่ และ AP คงที่ (ตามโจทย์)

$\therefore$ OP คงที่ และจะเป็นดังนี้เสมอไปไม่ว่า P จะเคลื่อนไปที่ใด

$\therefore$ P เป็นจุดที่ เคลื่อนไป โดยมี ระยะทาง ห่างจาก O เท่า ๆ กัน

∴ โลกัสของ P เป็นวงกลม ที่มีรัศมี $(OA - AP)$ เสมอ

ถ้า P อยู่ภายนอก โลกัสของ P เป็นวงกลม ที่มีรัศมี $(OA + AP)$ เสมอ

2/18 โจทย์ P เป็นจุดจุดหนึ่ง เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง RQ จงหาตำแหน่งของจุด P ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุดสองจุด คือ A และ B ที่กำหนดให้เท่า ๆ กัน

(H & S 2/94)

วิธีทำ ลาก AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O

ลาก OP ตั้งฉากกับ AB และตัด RQ ที่จุด P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ OP ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AB

∴ $PA = PB$ (บ.ส 14)

3/18 โจทย์ A และ B เป็นจุดตายตัวของจุดสองจุดอยู่ภายในวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดซึ่งอยู่บนเส้นรอบวง และมีระยะทางห่างจาก A และ B เท่า ๆ กันและมีอยู่กี่จุด

(H & S 3/94)

วิธีหา ลาก AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O ลากเส้นตั้งฉาก กับ AB ทำให้ปลายทั้งสองข้างจดเส้นรอบวง ที่จุด P และ Q

∴ P และ Q เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ $PA = PB$, $QA = QB$ } บ.ส. 14

(จะเห็นได้ว่าจุดที่ต้องการมี 2 จุด)

4/19 โจทย์ P เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง RQ จงหาตำแหน่งของจุด P ซึ่งมีระยะทางห่างจากเส้นตรง AB และ CD ที่กำหนดให้ (H & S 4/94)

วิธีหา ให้ AB กับ CD ตัดแบ่งครึ่งกันที่จุด O (ถ้ายังไม่ตัดกันก็ต่อออกไปจนตัดกัน) แบ่งครึ่ง $B\hat{O}D$ โดยเส้น OX ให้ OX ตัด OQ ที่จุด P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จุด P อยู่ห่างจาก AB กับ CD เท่ากัน โดยบ.ส. 15

5/19 โจทย์ A และ B เป็นจุดตายตัว สองจุดห่างกัน 6 ซม. จงใช้วิธีของโลกัสหาจุดสองจุด ซึ่งมีระยะทางห่างจาก A 4 ซม. และจาก B 5 ซม. (H & S 5/94)

วิธีหา เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี 4 ซม. เขียนส่วนโค้ง เอา B เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี 5 ซม. เขียนส่วนโค้ง ตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ

ข้อสังเกต รัศมีของวงกลมอาจตัดกันอีกข้างหนึ่งของ AB

∴ จุดที่ต้องการจึงมีได้ 2 จุด

7/20 โจทย์ ไม้ตรงจำกัดความยาวอันหนึ่ง วางเลื่อนขึ้นลงอยู่ระหว่างไม้บรรทัดสองอัน ซึ่งวางตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน

จงเขียนรูปหาโลกัส ของจุดกึ่งกลาง ของไม้ตรงนั้น และพิสูจน์ให้เห็นว่าโลกัสนั้น เป็นเศษหนึ่งส่วนสี่ของเส้นรอบวงของวงกลม (ดูบทสร้างที่ 10) (H & S 7/94)

วิธีหา ดูรูปบทสร้าง 10 หน้า 83

ให้ CA, CB เป็นไม้บรรทัดสองอันตัดกันตั้งฉาก AB เป็นไม้บรรทัดที่เลื่อนที่ อยู่ระหว่าง CA, CB

จากรูป OC = OA (รัศมี)

$$= \frac{1}{2} AB$$

และไม่ว่า AB จะเคลื่อนที่ไปอย่างไรก็ตาม เรา

อาจพิสูจน์ได้ว่า OC = $\frac{1}{2}$ AB เสมอ

แต่ AB คงที่ (โจทย์)

∴ CO คงที่

∴ เมื่อ AB เคลื่อนไป O จะเคลื่อนที่ไปห่างจาก C เป็นระยะทางคงที่เสมอ

∴ โลกัสของ O เดินเป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง

8/20 โจทย์ สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง บนฐานที่กำหนดให้และเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากด้วย จงหาโลกัสของมุมยอด (H & S 8/94)

วิธีหา แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O เขียนครึ่งวงกลม ให้มีรัศมี OA กำหนดจุด C, C^1, C^2 บนเส้นรอบวง ลาก AC, BC, AC^1, BC^1, AC^2, BC^2 โดยบ.ส.10 เราได้ △ ABC, △ ABC^1, △ ABC^2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

∴ โลกัสของจุด C เดินเป็นวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

9/20 โจทย์ A เป็นจุดตายตัว และจุด X เคลื่อนไปตาม
เส้นตรง BC ที่ตายตัว จงเขียนรูป หาโลกัสของจุด P
ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่าโลกัสนี้เป็น
เส้นตรงขนานกับเส้น BC (H & S 9/94)

วิธีหา ลาก AX^1 ให้ P^1 เป็นจุดกึ่งกลางของ AX^1

ลาก PP^1 ลาก AX^2, AX^3 ตัด PP^1 ที่จุด P^2 และ P^3

∴ P และ P^1 เป็นจุด กึ่งกลาง ของด้าน 2 ด้าน
ของสามเหลี่ยม AXX^1

∴ PP^1 ขนานกับ XX^1 หรือ BC (ข้อ 2/168)

และ P^2, P^3 เป็นจุดกึ่งกลางของ AX^2, AX^3
โดยลำดับ (ข้อ 1/168)

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า เมื่อ AX เคลื่อนที่ไปย่อมมีจุด
กึ่งกลางอยู่บนจุด PP^1

∴ โลกัสของจุด P คือเส้นตรง PP^1 ซึ่งขนาน
กับ BC

10/27 โจทย์ A เป็นจุดตายตัว X เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปตาม
เส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้ จงหาโลกัสของ P
ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่า โลกัสนี้เดิน

เป็นวงกลม (H & S 10/94)

คำเฉลย จากการสร้างรูปจะเห็นว่าโลกัสของ P เดินเป็นวงกลม

วิธีพิสูจน์ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

A เป็นจุดคงที่ C เป็นจุดกึ่งกลางของ AO

X เป็นจุดซึ่งเคลื่อนที่อยู่บนวงกลม P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

ลากต่อ CP, OX

∴ C และ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AO และ AX

∴ $CP = \frac{1}{2} OX$

แต่ OX เป็นรัศมีของวงกลม ย่อมมีค่าคงที่

∴ $CP = \frac{1}{2} OX$ = ค่าคงที่

และไม่ว่า X จะเคลื่อนไปที่ใด เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $CP = \frac{1}{2} OX$ และมีค่าคงที่เสมอ

∴ P เคลื่อนที่ไปโดยห่างจาก C คงที่หรือเท่า ๆ กันเสมอ

∴ โลกัสของ P เดินเป็นวงกลม

11/21 โจทย์ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ AX เป็นเส้นที่ลากจากจุด A ไปตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด B ถ้า BX หมุนไปรอบ ๆ จุด B จงหาโลกัสของจุดกึ่งกลางของ AX (H & S 11/95)

กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

เส้นตรง AX ตั้งได้ฉากกับ BX ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

วิธีหา แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O ลาก PO

เราพิสูจน์ได้ว่า PO // BX โดยข้อ 2 แบบฝึกหัดท้าย ท.บ.22 (หน้า 168)

ดังนั้น $\hat{APO} = \hat{PXB} = 1$∟ฉ

∵ $\hat{PXB}$ เป็นมุมฉากเสมอ (โดยโจทย์)

∴ $\hat{APO}$ เป็นมุมฉากเสมอไม่ว่าBXหมุนไปที่ใด

ดังนั้น △ APO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม APO เป็นมุมฉากเสมอ

∴ โลกัสของจุด P เคลื่อนที่ไปเป็นเส้นรอบวงของวงกลมครึ่งวง ซึ่งมี AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง (เช่นเดียวกับข้อ 8)

12/21 โจทย์ AO กับ OB บรรจบกันเป็นมุมฉาก P เป็นจุดเคลื่อนที่ไปในระหว่าง OA กับ OB เส้น PX ตั้งฉากกับ OA และ PR ตั้งฉากกับ OB จงหาโลกัสของจุด P ตามข้อกำหนด เมื่อ

(1) $PX + PR = 6$ ซม. เป็นนิจ (Constant)

(2) $PX - PR = 3$ ซม. เป็นนิจ (Constant)

[เพื่อป้องกันมิให้นักเรียนลอกวิธีทำลงไปโดยไม่เข้าใจ จงเปลี่ยนตัวอักษรในโจทย์เสีย]

วิธีหา (1) ให้ $A\hat{O}B$ เป็นมุมฉากตัด OA ที่จุด C และ OB ที่จุด D ทำ $OC = OD = 6$ ซม. ลาก CD

$\therefore$ โลกัสของจุด P คือเส้น CD ไม่ว่า P อยู่ที่ใด ๆ บน CD $PX + PR = 6$ ซม. เสมอ

(PX ตั้งฉากกับOA และ PRตั้งฉากกับ OB)

พิสูจน์ $\because PX \parallel OB$

$\therefore X\hat{P}C = O\hat{D}P$

$\because X\hat{C}P = O\hat{D}P$ (ท.บ. 5)

$\therefore X\hat{C}P = X\hat{P}C$

ดังนั้น $XC = PX$

เพราะว่าสี่เหลี่ยม XPRO เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า เรา

ได้ $OX = PR$

ดังนั้น $XC + OX = PX + PR$

$\therefore$ $XC + OX = OC = 6$ ซม.

$\therefore$ $PX + PR = 6$ ซม.

เราพิสูจน์โดยทำนองนี้ได้เสมอ ไม่ว่า P อยู่ที่

ใด ๆ บน CD $PX + PR = OC = 6$ ซม. เสมอ

$\therefore$ โลกัสของจุด P อยู่บน CD

วิธีหา (2) ตัด OB ออกเพียงจุด Q ให้ $OQ = 3$ ซม.

ลาก QT ขนานกับ OA (ตั้งฉากกับ OB)

ลาก QV แบ่งครึ่ง $\hat{TQB}$

โลกัสของจุด P คือ QV

พิสูจน์ กำหนดจุด P ลงบน QV

ลาก PX ตั้งฉาก OA ให้ PX ตัด QT ที่จุด S

ลาก PR ตั้งฉาก OB $PS = PR$ (ม.ส. 15)

$\therefore$ $PX - PS = XS = 3$ ซม.

$\therefore$ $PX - PR = 3$ ซม.

เราพิสูจน์ได้เสมอไปว่า ไม่ว่า P อยู่ที่ใดบน QV

จะได้ PX − QR = 3 ซม. เสมอ

∴ โลกัสของจุด P คือเส้น QV

13/22 โจทย์ เส้นตรง OX, OY ตัดกันเป็นมุมฉาก ที่จุด O และจากจุด P ซึ่งเคลื่อนที่ได้มีเส้นตรง PM, PN ลากไปตั้งได้ฉากกับ OX, OY ตามลำดับ

จงเขียนรูปหา (ไม่ต้องพิสูจน์) โลกัสของจุด P เมื่อ

(i) PM = 2 PN

(ii) PM = 3 PN (H & S 13/95)

วิธีหา แบ่ง OX และ OY ออกเป็นส่วน ๆ ส่วนละ 1 หน่วย เท่ากัน (1 unit)

ตัด OX ออกเพียงจุด M ทำ OM = 1 หน่วย

ตัด OY ออกเพียงจุด N ทำ ON = 2 หน่วย

ลากเส้นจากจุด M ให้ตั้งฉากกับ OX และ ลากเส้นจากจุด N ให้ตั้งฉากกับ OY ให้พบกันที่ จุด P ลาก OP

∴ OP เป็นโลกัสของจุด P มีเส้น ⊥ PM = 2 PN

[$PN = OM = 1$ หน่วย $PM = ON = 2$ หน่วย ดังนั้น $PM = 2\ PN$ หรือ $\frac{PN}{PM} = \frac{1}{2}$ ซึ่งจะเป็นความจริงเสมอไป ถ้า $\hat{PDY}$ ไม่เปลี่ยนขนาด]

ถ้าทำให้ $OM = 1$ หน่วย $ON = 3$ หน่วย เราจะได้ $PM = 3\ PN$

14/22 โจทย์ จงหาจุดๆหนึ่ง ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุดๆหนึ่งที่กำหนดให้ และมีระยะทางห่างจากเส้นขนานสองเส้นที่กำหนดให้เท่าๆ กัน

เมื่อไรจึงจะหาจุดนี้ได้สองจุด เมื่อไรได้จุดเดียว และเมื่อไรไม่ได้เลย (H & S 14/95)

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานสองเส้น O เป็นจุดๆหนึ่ง AB เป็นระยะทางที่กำหนดให้

จะต้องการหา จุดที่ห่างจาก CD, EF เท่าๆ กัน และห่างจาก O เป็นระยะทางเท่ากับ AB

วิธีหา ลาก RS ให้ขนานกับ CD และ EF ให้มีระยะห่างจาก CD และ EF เท่ากัน เอา O เป็นจุด

ศูนย์กลาง ใช้รัศมี AB เขียนส่วนโค้ง ตัด RS ที่จุด P และ Q

∴ P และ Q เป็นจุดที่อยู่ห่างจาก CD และ EF เท่ากัน และห่างจากจุด O ที่กำหนดให้เท่ากับ AB

(1) ถ้า AB ยาวกว่า เส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด O มายัง RS จุดที่ได้จะมี 2 จุด

(2) ถ้า AB เท่ากับ เส้นตั้งฉาก ที่ลาก จากจุด O มายัง RS จุดที่ได้จะมี 1 จุด

(3) ถ้า AB สั้นกว่าเส้นตั้งฉาก ที่ลากจากจุด O มายัง RS จะหาจุดเช่นนี้ไม่ได้เลย

15/22 โจทย์ S เป็นจุดที่ตายตัว มีระยะทางห่างจากเส้นตรง MX, 2 นิ้ว จงหาจุดสองจุด ซึ่งมีระยะทางห่างจาก S, $2\frac{3}{4}$ นิ้ว และให้มีระยะทางห่างจาก MX, $2\frac{3}{4}$ นิ้วด้วย

(H & S 15/95)

วิธีทำ ลาก PQ ขนานกับ MX และให้มีระยะทางห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้ว

เอา S เป็นจุดศูนย์ ใช้รัศมี $2\frac{3}{4}$ นิ้ว เขียนส่วนโค้งตัด PQ ที่จุด O

จุด O เป็นจุดที่ต้องการ

16/23 โจทย์ จงหาจุดต่าง ๆ ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุด S และเส้นตรง MX ที่กำหนดให้เท่า ๆ กัน แล้วเขียนส่วนโค้งผ่านจุดที่หาได้เหล่านั้นด้วย (H & S 16/95)

วิธีหา ลากPQ, RS และ TV ให้ขนานกับ MX มีระยะห่างเท่ากับ h^1 h^2 และ h^3 ตามลำดับ

เอา S เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี h^1 h^2 และ h^3 เขียนส่วนโค้งตัด PQ RS และ TV ที่จุด E, F และ G ตามลำดับ

แล้ว E, F; G จะมีระยะทางห่างจาก MX และ S เป็นระยะทาง h^1 h^2 h^3 เท่า ๆ กัน

17/23 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนฐานที่กำหนดให้ มีส่วนสูงเท่าที่กำหนดให้ และ มีมุมยอดอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย (H & S 16/95)

กำหนดให้ EF เป็นเส้นตรง BC เป็นฐาน h เป็นส่วนสูง จะต้องการสร้าง สามเหลี่ยมให้สูง h และมีมุมยอดอยู่บน EF

วิธีสร้าง ลากเส้น BC และ GH ให้ขนานกัน และมีระยะห่างกันเท่ากับ h ที่กำหนดให้

ให้ GH ตัดเส้น EF ซึ่งเป็นเส้นที่กำหนดให้ที่จุด A ลาก AB, AC

△ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

สำหรับวิธีพิสูจน์ ให้นักเรียนพิสูจน์เอาเองเพราะเห็นอยู่แล้ว

18/23 โจทย์ จงหาจุดจุดหนึ่ง ซึ่งมีระยะทางห่างจากด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเท่า ๆ กัน (H & S 18/95)

วิธีหา แบ่งครึ่งมุม BAC และมุม ABC

เส้นแบ่งครึ่งมุมตัดกันที่จุด P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ลาก PX, PY, PZ ตั้งฉากกับ AB, BC และ AC โดยลำดับ

PX = PY บ.ส. 15

PX = PZ บ.ส. 15

∴ PX = PY = PZ

นั่นคือ จุด P อยู่ห่างจาก AB, BC และ AC เท่ากัน

19/23 โจทย์ เส้นตรง OX, OY ต้องเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก Q และ R เป็นจุดอยู่บนเส้นตรง OX และ OY ตามลำดับ จงเขียนรูปหาโลกัสของจุดกึ่งกลางของ QR เมื่อ

(i) $OQ + OR$ มีค่าคงตัว

(ii) $OQ - OR$ มีค่าคงตัว (H & S 19/95)

กำหนดให้ $\hat{XOY}$ เป็นมุมฉาก QR เป็นเส้นตรง เส้นหนึ่ง P เป็นจุดกึ่งกลางของ QR

(1) จะต้องหาโลกัสของจุด P เมื่อ QR หมุนไปในระหว่าง OX และ OY

มีผลทำให้ $OQ + OR =$ นิจ (Constant)

วิธีสร้าง ลากCD ผ่านจุด P ทำให้ $OC = OD$

$\therefore$ CD เป็นโลกัสของจุด P

[วิธีสร้าง ลาก CD ให้ $OC = OD$ ให้ทำดังนี้ คือ ลาก $PM \perp OX$, $PN \perp OY$ และทำมุม MPC ให้เท่ากับ 45° ให้ C อยู่บน OX ต่อCP ทางจุด P ให้พบ OY ที่จุด D โดยวิธีนี้ จะได้ $OC = OD$]

พิสูจน์ $\because$ PM $\perp$ OX และ PN $\perp$ OY

$\therefore$ P เป็นจุดบน CD ซึ่งตัด OX และ OY ออกเป็นระยะ OC = OD เท่า ๆ กัน

$\therefore$ จากข้อ 12 เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

PM + PN = นิจ (Constant)

แต่โดยแบบฝึกหัดข้อ 1–3 หน้า 168 เราพิสูจน์ได้

PN $= \frac{1}{2}$ OQ และ PM $= \frac{1}{2}$ OR

$\therefore \frac{1}{2}$ OQ $+ \frac{1}{2}$ OR = นิจ (Constant)

และดังนั้น OQ + OR = นิจ (Constant)

$\therefore$ ถ้า P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ QR อยู่บน CD แล้ว (OQ + OR) จะมีค่าเป็นนิจเสมอ

$\therefore$ โลกัสของ P เดินอยู่บน CD

(2) จะต้องหา โลกัสของจุด P เมื่อ OQ − OR = นิจ (Constant)

วิธีสร้าง ลาก CD ให้ผ่านจุด P และให้ $\widehat{DCX} = 45^\circ$ เหมือนตอนแรก (วิธีสร้างทำดังนี้คือ ลาก PM $\perp$ OX สร้าง $\widehat{MPC} = 45^\circ$ ให้จุด C อยู่บน OX แล้วต่อ CP ทางจุด P ออกไปพอสมควรถึงจุด D)

แล้ว CD จะเป็นโลกัสของจุด P

พิสูจน์ ถาก CV $\perp$ OX ถาก PN $\perp$ OY และ PM $\perp$ OX

(ทำไว้แล้วตอนสร้าง)

$\because$ มุม VCX = 1 L ฉ และ $\hat{DCX} = 45^\circ$

$\therefore$ CD แบ่งครึ่ง $\hat{VCX}$

โดยข้อ 12 เราพิสูจน์ได้ว่า (PN − PM) หรือ

(OM − ON) = นิจ (Constant)

เมื่อจุด P อยู่บน CD โดยข้อ 1 − 3 ของแบบ

ฝึกหัดท้าย ท.บ. 22

เราพิสูจน์ได้ว่า $PN = OM = \frac{1}{2}OQ$ และ PN

$= ON = \frac{1}{2}OR$

$\therefore \frac{1}{2}OQ - \frac{1}{2}OR$ = นิจด้วย

$\therefore$ (OQ − OR) = นิจเสมอเมื่อจุด P อยู่บน CD

$\therefore$ โลกัสของ P เดินอยู่บน CD เช่นเดียวกับ

คอนแรก

20/23 โจทย์ S และ S′ เป็นจุดสองจุดที่คายตัว จงหาจุด

ต่างๆของ P ซึ่งทำให้

(1) SP + S′P = คงตัว (เช่น 3.5 นิ้ว)

(2) SP − S′P = คงตัว (เช่น 1.5 นิ้ว)

ในข้อหนึ่งๆ ให้เขียนส่วนโค้งผ่านจุดเหล่านั้น (H&S20/95)

วิธีสร้าง (i) เอา S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 3.5″ เขียนวงกลม SM ไปตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่ M

จาก $S'M$

จาก $S'P$ ทำมุม $\hat{SMS'} = \hat{PS'M}$ แล้ว P จะเป็นจุดที่ต้องการ ทำดังนี้หลาย ๆ ครั้งจะได้จุด

P, P_1, P_2

พิสูจน์ $\because \hat{PMS'} = \hat{PS'M}$ (สร้าง)

$\therefore PS' = PM$ (ท.บ.5)

$\therefore SP + MP = SP + PS' = 3.5''$

$\therefore$ P เป็นจุดที่ต้องการ

ถ้าต่อเส้นระหว่าง P, P_1, P_2 .... จะเห็นว่า

เป็นเส้นโค้งรูปไข่ (Ellipse)

$\therefore$ โลกัสของ P เดินเป็นเส้นโค้งรูปไข่ (Ellipse)

วิธีสร้าง (ii) เอา S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 1.5″ เขียนวงกลม

จาก SM ให้ตัดเส้นรอบวงที่ M และต่อเลยออก

ไป จาก $S'M$

จาก $S'P$ ทำมุม $\hat{MS'P} = \hat{MPS'}$

แล้ว P จะเป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \hat{MPS'} = \hat{MS'P}$ (สร้าง)

$\therefore MP = MS'$ (ท.บ.5)

$\therefore SP - MP = SP - S'P = 1.5''$

$\therefore$ P เป็นจุดที่ต้องการ

ทำดังนี้หลาย ๆ ครั้ง จะได้จุด P ในที่ต่าง ๆ กัน และถ้าต่อเส้นระหว่างจุด P ที่เกิดอื่นไปนี้ จะได้เส้นโค้ง ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

$\therefore$ โลกัสของ P เดินเป็นเส้นโค้ง ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

โจทย์ระคนของบทสร้าง

(ให้พิสูจน์ทุก ๆ ข้อ)

1/30 โจทย์ A เป็นจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ และ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ จากจุด A ลากเส้นตรงไปยัง BC ทำมุมกับเส้น BC เท่ากับมุม X ที่กำหนดให้

อยากทราบว่าจะมีเส้นตรงกี่เส้นที่สามารถลากไปได้ ? (H & S 1/98)

วิธีสร้าง ลาก PAQ ให้ผ่าน A และขนานกับ BC (บ.ส.6)

ที่ A ลาก AB, AC ทำมุม

$\hat{PAE}$ และ $\hat{QAF}$ ให้ต่างเท่ากับ $\hat{X}$ (บ.ส.5)

แล้ว $\hat{AEF}$ และ $\hat{AFE}$ จะเป็นมุมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ PAQ // BC มี AE, AF ลากตัด

$\therefore \hat{AEF} = \hat{PAE} = \hat{X}$ (บ.พ.14)

$\hat{AFE} = \hat{QAF} = \hat{X}$ (,,)

2/30 โจทย์ จงลากเส้นตรงให้แบ่งครึ่งมุม AOB ในการสร้างนี้ห้ามไม่ให้ใช้มุมยอด O (H & S 2/98)

วิธีสร้าง ลาก AB แบ่งครึ่ง OAB และ $\hat{ABO}$
เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองพบกันที่จุด C ลาก OC
∴ OC เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{AOB}$

[พิสูจน์โดยวิธีเดียวกับทฤษฎีข้อ 2 ซึ่งว่าด้วยเส้นตรงพบกันใน △]

3/30 โจทย์ P เป็นจุดๆหนึ่งอยู่ภายในมุม AOB จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด P และไปสุดที่เส้น OA และ OB และให้จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นนั้นด้วย

(H & S 2/98)

วิธีสร้าง ลาก OP ต่อเลยออกไปจนถึงจุด C ทำ OP = PC
ลาก CD ขนานกับ OB ให้พบ OA ที่จุด D
ลาก DP และต่อเลยไปพบ OB ที่จุด E
∴ DE เป็นเส้นตรงที่ต้องการ
(มี P เป็นจุดกึ่งกลาง)

พิสูจน์ ในสามเหลี่ยม PDC และ POE

$$\because \begin{cases} \hat{DCP} = \hat{POE} & (\text{ท.บ.}14) \\ \hat{CDP} = \hat{PEO} & (\text{,,}\ 14) \\ OP = PC \end{cases}$$

สามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ (ท.บ. 17)

$\therefore DP = PE$

ดังนั้น P เป็นจุดกึ่งกลางของ DE

4/30 โจทย์ OA, OB, OC เป็นเส้นตรง สามเส้นพบกันที่จุด O จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตัด OA และ OC และให้เส้น BC แบ่งครึ่งเส้นนั้นด้วย (H & S 4/98)

วิธีสร้าง ลาก BE ขนานกับ OC ให้พบ OA ที่จุด E

ลาก BF ขนานกับ OA ให้พบ OC ที่จุด F

ลาก EF ตัด OB ที่จุด K

$\therefore$ EF เป็นเส้นตรงที่ต้องการคือ EK = KF

พิสูจน์ ◻ EBFO เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ เส้นทะแยงมุม EF กับ OB ตัดแบ่งครึ่งกันที่จุด K (บทแทรก 3 บ.พ. 21)

5/30 โจทย์ จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด A ที่กำหนดให้ไปยังเส้นขนานคู่หนึ่ง ให้ส่วนที่อยู่ระหว่างเส้นขนานเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้

เมื่อไรการสร้างนี้จึงจะสร้างได้สองเส้น ? เมื่อไรจึงจะสร้างได้เส้นเดียว ? และเมื่อไรจึงจะสร้างไม่ได้ ?

(H & S 5/98)

กำหนดให้ PQ กับ RS เป็นเส้นขนานสองเส้น A เป็นจุดที่กำหนดให้ และ T เป็นความยาวเส้นตรงที่กำหนดให้

วิธีสร้าง กำหนดจุด F ลงไปจุดหนึ่งบน RS

เอา F เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่ากับ T

เขียนส่วนโค้งตัด PQ ที่จุด G ลาก FG และต่อเลยไปที่จุด H ลาก GA

ทำ $\hat{GAD} = \hat{HGA}$

ให้ AD ตัด PQ ที่จุด C และ RS ที่จุด D

$\therefore$ AD จะเป็นเส้นตรงที่ต้องการ

ข้อสังเกต (1) ถ้า T ยาวกว่าระยะห่าง (ตั้งฉาก) ระหว่าง PQ กับ RS เอา F เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี T เขียนส่วนโค้ง ตัด RS ได้จึงสร้างรูปได้

(2) ถ้า T เท่ากับระยะห่างระหว่าง PQ กับ RS เส้นตรง CD = T และ CD $\perp$ RS

(3) ถ้า T สั้นกว่าระยะห่าง PQ กับ RS เราไม่อาจลากเส้น FG ได้ ดังนั้นจึงลาก AD ไม่ได้ด้วย

พิสูจน์ $\therefore$ $\hat{AGH} = \hat{GAC}$ (สร้าง)

$\therefore$ HF // AD (บ.พ. 13)

แต่ PQ // RS

$\therefore$ DFGC เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ FG = CD = T (บ.พ. 21)

$\therefore$ AD เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

6/31 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC จงบรรจุสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้มุมมุมหนึ่งทับมุม A อย่างสนิท

(H & S 6/98)

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง $\hat{BAC}$ โดยเส้น AD

ทำ $\hat{ADF}$ ให้เท่ากับ $\hat{BAD}$

และทำ $\hat{ADE}$ ให้เท่ากับ $\hat{DAC}$

$\therefore$ $\square$ AEDF เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่ต้องการ

พิสูจน์ $\triangle$ ADE และ $\triangle$ DEF

$$\therefore \begin{cases} \hat{DAE} = \hat{DAF} \\ \hat{ADE} = \hat{ADF} \\ \text{AD เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

สามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากัน (ท.บ. 17)

$\therefore$ AE = AF และ DE = DF

$\therefore$ $\triangle$ ADF มี $D\hat{A}E = A\hat{D}E$

$\therefore$ AE = DE

นั่นคือ AE = AF = DE = DF

$\square$ AEDF เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Rhombus)

7/31 โจทย์ จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

(H & S 7/98)

กำหนดให้ AD เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จะต้องการ แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน

วิธีสร้าง ทำ $D\hat{A}O = 30^\circ$ และทำ $A\hat{D}O = 30^\circ$

แขนของมุมทั้งสองพบกันที่จุด O

ทำ $A\hat{O}B$ และ $D\hat{O}C$ ให้เท่ากับ 30° จุด B และ C อยู่บน AD

$\therefore$ AB = BC = CD

พิสูจน์ (โดยย่อ) โดย ท.บ 6 เราได้ AB = BO และ CD = CO

และโดยอาศัยท.บ.16 มุมแทรก เราได้มุมภายนอก

$\hat{OBC}$ = มุมภายนอก $\hat{OCB} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore \hat{BOC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ด้วย (ท.บ. 16)

$\therefore \triangle OBC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$\therefore BC = OB = AB$ และ $BC = CO = CD$

นั่นคือ AD ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

8/31 โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ในเมื่อกำหนด

(i) จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมให้

(ii) ความยาวของด้านสองด้าน และเส้นมัธยฐาน ซึ่งลากไปแบ่งครึ่งด้านที่สามให้

(iii) ความยาวของด้าน ๆ หนึ่ง และเส้นมัธยฐานสองเส้นซึ่งลากไปแบ่งครึ่งด้านที่เหลืออีกสองด้านให้

(iv) ความยาวของเส้นมัธยฐานสามเส้นให้

(H & S 8/98)

ตอบ (1) วิธีสร้าง ให้ X, Y และ Z เป็นจุด 3 จุดที่กำหนดให้

ลาก XY, YZ และ ZY

ลาก ZB ให้ขนานและเท่ากับ XY

ลากเส้นตรง BX และต่อออกไปถึงจุด A

ทำให้ XA = BX ลาก AY และต่อเลยออกไป

พบกับ BZ ซึ่งต่อออกไปที่จุด C

$\triangle$ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ ใช้วิธีพิสูจน์ในข้อ 1 ของแบบฝึกหัดท้าย ท บ 22 และ ท บ. 20

เราจะพิสูจน์ได้ว่า $AY = YC$ และ $BZ = ZC$

$\therefore$ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\triangle$ ABC

ตอน (2) วิธีสร้าง b และ c เป็นความยาวของด้าน 2 ด้าน m เป็นมัธยฐานที่กำหนดให้

ลาก AK ยาวเท่ากับ 2 เท่าของ m

เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี c เขียนส่วนโค้ง

เอา K เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี b เขียนส่วนโค้ง ตัดกับส่วนโค้งเดิมที่จุด B

อีกหนหนึ่ง เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี b และเอา K เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี c เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C

ลาก AB, AC, BK, KC และลาก BC ตัด AK ที่จุด O

$\triangle$ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\square$ ACKB เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (พิสูจน์ได้

โดยวิธีในแบบฝึกหัดท้าย บ.ท. 21)

$\therefore$ AK ตัดแบ่งครึ่งกันกับ BC ที่จุด O (บทแทรก ท.บ. 21)

ดังนั้น $AO = \frac{1}{2} AK = m$

$\because$ $AB = c$ และ $AC = b$ (โดยสร้าง)

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

ตอน (3) วิธีสร้าง m และ n เป็นความยาวของมีเดียน BC เป็นด้านที่กำหนดให้

เอา B เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี $\frac{2}{3}m$ เขียนส่วนโค้ง เอา C เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี $\frac{2}{3}n$ เขียนส่วนโค้ง ตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด O ลาก BO และ CO

จากจุด C ลากเส้นตรงให้ขนานกับ OB และจากจุด B ลากเส้นตรงให้ขนานกับ OC ให้เส้นตรงที่ลากขึ้นใหม่ทั้งสองนี้พบกันที่จุด K

ลาก OK ตัด BC ที่จุด X ต่อ XO ตรงไปถึงจุด A ทำ OA ให้เท่ากับ OK ลาก AB และ AC

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ (ย่อ) ต่อ CO ออกไปพบ AB ที่จุด Z และต่อ BO
ออกไปพบ AC ที่จุด Y

$\therefore$ □ BOCK เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (โดยสร้าง)

$\therefore$ BY // CK ใน $\triangle$ AKC

$\therefore$ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK และ OY // KC

$\therefore$ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AC (ดูข้อ 1/168)

เช่นเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า Z เป็นจุดกึ่งกลาง
ของ AB ดังนั้น BY และ CZ เป็นมัธยฐาน

โดยวิธีในข้อ 3 ของแบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 22

พิสูจน์ได้ว่า $OY = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{3}m$ และ $OZ = \frac{1}{2}BK$

$$= \frac{1}{3}n$$

นั่นคือ $BY = BO + OY$

$$= \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}m = m$$

และ $CZ = CO + OZ$

$$= \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n = n$$

$\triangle$ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ มีฐาน BC
และมีมัธยฐานยาวเท่ากับ m และ n ตามกำหนดให้

ตอน (4) วิธีสร้าง p, m, n เป็นความยาวของมีเดียน

ถ้าก KO ยาว $\frac{2}{3}$m เอา O เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี $\frac{2}{3}$n เอา K เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมี $\frac{2}{3}$p เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด B

ต่อ KO ออกไปถึงจุด A ทำ AO ให้เท่ากับ KO แบ่งครึ่ง KO ที่จุด X ถาก BX และต่อออกไปถึงจุด C ทำ CX = BX ถาก AB, AC

∴ △ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ (ย่อ) ต่อ BO, CO ออกไปพบ AC และ AB ที่ Y และ Z โดยบทแทรก 3 ท.บ. 21

∴ BC และ OK แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

∴ □ OBKC เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

∴ OC = BK = $\frac{2}{3}$p

โดยอาศัยวิธีพิสูจน์ ข้อ 1 – 3 แบบฝึกหัดท้าย ท.บ.22

เราได้ OZ = $\frac{1}{2}$BK = $\frac{1}{3}$p

OY = $\frac{1}{2}$KC = $\frac{1}{3}$n

ดังนั้น BO + OY = $\frac{2}{3}$n + $\frac{1}{3}$n = n

∴ BY = n

และ $OC + OZ = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}p = p$

$\therefore$ $CZ = p$ ใน $\triangle AKC$

$\because$ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK และ $\because$ $OY // CK$

$\therefore$ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AC (ข้อ 1/168)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า Z เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

$\therefore$ Z และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC โดยลำดับ

$\therefore$ BY และ CZ เป็นเส้นมีเดียนยาว n และ p ตามลำดับ

$\because$ $AX = AO + OX = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}m = m$ และ

$\because$ X เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

$\therefore$ AX เป็นเส้นมีเดียนด้วย

$\therefore$ ABC มี AX เป็นมีเดียนยาว m

มี BY ,, ,, ,, n

และ มี CZ ,, ,, ,, p

$\therefore$ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการสร้างรูป

ว – ร หน้า 38

1/38 โจทย์ จงเขียนรูปแสดงให้เห็นว่า

(1) 1 ตารางหลา = 3^2 ตารางฟุต

(2) 1 ตารางฟุต = 12^2 ตารางนิ้ว

(3) 1 ตาราง ซม. = 10^2 ตาราง มม.

(H & S 1/101)

วิธีสร้าง (1) เขียนเส้นตรง AB ให้ยาว 1 หลา หรือ 3 ฟุต
(รูปใช้มาตราส่วน 1 หน่วย = 1 ฟุต)
บน AB สร้างจตุรัส ABCD
∴ AB = AD = 3 ฟุต (กฎสี่เหลี่ยมจตุรัส)
แบ่ง AB, AD ออกเป็นเส้นละ 3 ส่วนเท่า ๆ กัน
และจากจุดแบ่งลากเส้นขนาน แล้วจตุรัส ABCD
จะถูกแบ่งด้วยเส้นขนานออกเป็นจตุรัสเล็ก ๆ
3 แถว ๆ ละ 3 รูป รูปหนึ่ง ๆ มีด้านยาวด้าน
ละ 1 ฟุต
∴ จตุรัส ABCD = 9 จตุรัสเล็ก ๆ = (3×3)

จตุรัสเล็ก หรือ 1 ตารางหลา = (3×3) ตารางฟุต

ข้อ 2 และ 3 อาจทำได้โดยวิธีเดียวกัน

2/38 โจทย์ จงเขียนรูปเพื่อแสดงว่า สี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง เป็นสี่เท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนครึ่งหนึ่งของเส้นตรงเส้นนั้น (H & S 2/101)

3/38 โจทย์ ใช้กระดาษกราฟเพื่อแสดงว่าสี่เหลี่ยมจตุรัสบน 1 นิ้ว = 10^2 เท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบน 0.1 นิ้ว

(H & S 3/101)

4/38 โจทย์ ถ้า 1″ แทน 5 ไมล์ อยากทราบว่า 6 ตารางนิ้ว แทนพื้นที่เท่าไร ? (H & S 4/101)

ข้อสังเกต โจทย์ข้อ 2–3–4 นี้ง่ายมาก และมีวิธีทำแบบเดียวกับโจทย์ข้อหนึ่ง จึงของดเสียไม่ทำให้ดูในที่นี้

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการสร้าง

ว. – ร. หน้า 43

ข้อสังเกต โจทย์เหล่านี้เกี่ยวกับการสร้างรูปและการคำนวณแบบธรรมดา สำหรับข้อง่าย ๆ จะของดไม่เฉลยไว้ในที่นี้ จะเฉลยแต่บางข้อที่เห็นว่ายากเท่านั้น

1-10/43 โจทย์ จงเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนกระดาษกราฟซึ่งมีส่วนยาว (a) และส่วนกว้าง (b) กำหนดให้ข้างใต้นี้ แล้วคำนวณหาพื้นที่ และนับจำนวนสี่เหลี่ยมจตุรัสในรูปเพื่อตรวจให้เห็นจริงด้วย (H & S 1-10/102)

1 $a = 2''$, $b = 3''$

2 $a = 1.5''$ $b = 4''$

3 $a = 2.8''$ $b = 3.5''$

4 $a = 2.5''$ $b = 1.4''$

5 $a = 2.2''$ $b = 1.5''$

6 $a = 1.6''$ $b = 2.1''$

จงคำนวณพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีกำหนดความยาวของด้านดังต่อไปนี้

7 a = 18 เมตร b = 11 เมตร

8 a = 7 ฟุต b = 72 นิ้ว

9 a = 2.5 ก.ม. b = 4 ม.

10 a = $\frac{1}{4}$ ไมล์ b = 1 นิ้ว

11/34 โจทย์ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ 30 ตร. ซม. และส่วนยาวเท่ากับ 6 ซม. จงหาส่วนกว้างแล้วเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนกระดาษกราฟ และตรวจดูโดยวิธีนับจำนวนของและรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส (H & S 11/102)

12/44 โจทย์ จงหาส่วนยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีพื้นที่ 3.9 ตร. นิ้ว และส่วนกว้าง 1.5" แล้วเขียนสี่เหลี่ยมพื้นผ้านั้นบนกระดาษกราฟ และตรวจดูโดยวิธีนับจำนวนของสี่เหลี่ยมจตุรัส (H & S 11/102)

13/44 โจทย์ (i) ในเมื่อเพิ่มส่วนยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขึ้นเป็นสามเท่า และส่วนกว้างไม่เพิ่ม อยากทราบว่าพื้นที่จะเพิ่มขึ้นเป็นกี่เท่า ?

(ii) ในเมื่อเพิ่มส่วนยาวและส่วนกว้าง ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าขึ้นเป็นสามเท่า อยากทราบว่าพื้นที่จะเพิ่มขึ้นเป็นกี่เท่า ? (H & S 13/102)

กฎที่ได้จากการสร้างรูปและการคำนวณ คือ

คำตอบข้อ (๑) ถ้าด้านกว้างหรือยาวเพิ่มขึ้นเป็น n เท่า พื้นที่ย่อมเป็น n เท่าของพื้นที่เดิม

คำตอบข้อ (๒) ถ้าทั้งด้านกว้างและยาวเพิ่มขึ้นเป็น n เท่า พื้นที่ย่อมเป็น n^2 เท่าของพื้นที่เดิม

14/45 โจทย์ แผนผังของสวน ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนยาวและส่วนกว้างเป็น 3.6″ และ 2.5″ ใช้ 1 นิ้ว แทน 10 หลา จงหาพื้นที่ของสวน

ถ้าพื้นที่เพิ่มขึ้น 300 ตร. หลา ส่วนกว้างคงเดิม ส่วนยาวจะเป็นเท่าไร และจะใช้กี่นิ้วแทนส่วนยาวของแผนผังนี้ ? (H & S 14/102)

ตอบ (1) มาตราส่วนที่เขียน 1″ = 10 หลา

ส่วนยาวและส่วนกว้างของสวน = 36 และ 25 หลา

∴ เนื้อที่ = (36×25) = 900 ต.ร. หลา

ตอบ (2) เนื้อที่เพิ่มขึ้นอีก 300 ต.ร. หลา

∴ เนื้อที่ทั้งหมด = (900+300) = 1200 ต.ร. หลา

ส่วนยาวคงเดิม = 25 หลา

$\therefore$ ส่วนกว้าง $= \frac{1200}{25}$,,

$= 48$,,

$\therefore$ มาตราส่วนที่เขียน 10 หลา = 1"

$\therefore$ ด้านยาวในแปลนวัดได้ 4.8"

15/45 โจทย์ จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งเป็นแผนผัง วัดได้ 6.5 ซม. และ 4.5 ซม. (มาตราส่วน 1 ซม. ต่อ 20 เมตร) (H & S 15/102)

16/45 โจทย์ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็น 1440 ตร. หลา ถ้าในแผนผังด้านทั้งสองของ สี่เหลี่ยม ผืนผ้า เท่ากับ 3.2 ซม. และ 4.5 ซม. ใช้มาตราส่วนเท่าไรเขียนแผนผัง (H & S 16/102)

อธิบาย เนื้อที่ในแผนผัง $= 3.2 \times 4.5 = 14.40$ ตาราง ซ.ม. ดังนั้น พื้นที่ในแผนผัง 14.40 ตาราง ซ.ม. แทนพื้นที่จริง 1440 ตารางหลา พื้นที่ในแผนผัง 1 ตาราง ซ.ม. แทนพื้นที่จริง 100 ตารางหลา

$\therefore$ มาตราส่วนย่อ 1 ซ.ม. แทนความยาว $\sqrt{100}$ หลา

$\therefore$ มาตราส่วนที่ใช้ 1 ซ.ม. ,, ,, ,, 10 หลา

17/45 โจทย์ นาสี่เหลี่ยม ผืนผ้าแห่งหนึ่ง มีพื้นที่ 52000 ตร. ฟุต ในแผนผัง เขียนส่วนยาว 3.25″ ใช้มาตราส่วน 1″ ต่อ 100 ฟุต ส่วนกว้างยาวเท่าไร ? (H&S 17/102)

แบบฝึกหัดข้อ 18 ถึง 25 ให้หาพื้นที่ของรูปที่กำหนดให้ซึ่งมีมุมทุกมุมที่กำหนดให้เป็นมุมฉาก และความยาว ของ ด้านที่กำหนดให้เป็นฟุต

18/45

อธิบาย ในข้อนี้ ถ้าตัดเอา รูป ที่ยื่นออก มาไป แทรกในรูปตอนที่เว้าเข้าไปจะแทนกันได้พอดี และพื้นที่ของรูปข้างบนเนื้อที่ของ สี่เหลี่ยม ผืนผ้า = (30×20) = 600 ตร. ฟุต

19

อธิบ ย ในข้อนี้มีวิธีทำเช่นเดียวกับข้อ 18 คือตัดตอน (คิดเอาโดยการสมมุติ) ส่วนที่ยื่นออกแทรกในช่องเว้าจะได้พอดี แล้วหาพื้นที่ของ □ ผืนผ้าจะได้ (24 × 28) หรือ 1152 ตร ฟุต

ตั้งแต่ข้อ 20 เป็นต้นไป ให้หาพื้นที่ตอนที่ระบายเงาสีดำไว้

20
อธิบาย หาพื้นที่รูปใหญ่ทั้งหมดจะได้เท่ากับ 10 × 15 = 150 ต.ร. ฟุต หาพื้นที่รูปสี่ขาวจะได้ 5 × 10 = 50 ต.ร. ฟุต แล้วเอาพื้นที่ของรูปสี่ขาวลบออกจากพื้นที่ของรูปใหญ่ทั้งหมดจะเป็นพื้นที่ของรูประบายสีดำ = 100 ต.ร. ฟุต

ส่วนกว้างของส่วนที่ระบายสีดำเท่ากับ $2\frac{1}{2}$ ฟุต เท่ากันหมด

21
(มิวธีทำเหมือนข้อ 20)

ส่วนกว้างของช่อง ที่ระบาย สีดำ เท่ากับ 4 ฟุต เท่ากันหมด

หมายเหตุ ในข้อ 20 และ 21 นี้ เราหาส่วนกว้างและส่วนยาวที่ต้องการได้ คือ

ในข้อ 20 ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสีขาวนั้น ก็คือความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปทั้งหมด หักออกด้วย 5 ฟุต เพราะว่าความ กว้าง ของ ส่วน ระบาย สีดำ เท่ากับ $2\frac{1}{2}$ ฟุต

2 ข้าง รวมเป็น 5 ฟุต และส่วนยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสีขาวก็อาจหาได้โดยเช่นเดียวกัน

ในข้อ 21 เราต้องหาความกว้างและความยาวของรูปใหญ่ เราอาจหาได้ดังนี้ คือ

เอาความกว้างทั้งสองข้างของส่วนสีดำ ซึ่งรวมกันได้ 8 ฟุต บวกเข้ากับความกว้างของรูปสีขาว และการหาความยาวก็คงมีวิธีเช่นเดียวกัน

22—23—24—25

อธิบาย วิธีทำข้อ 22 ถึง 25 มีดังนี้คือ

ในข้อ 22 เราสังเกตดูจะเห็นว่าถ้าหักความยาวของรูประบายสีดำออกแล้ว □ สีขาวสี่รูปทุกรูปมีความกว้าง 3.5 ความยาว 5 เราอาจหาพื้นที่ของรูปสีขาวได้ทั้ง 4 รูป ซึ่งมีขนาดเท่า ๆ กัน คือ พื้นที่ ๆ ได้จะเท่ากับรูปละ 17.5 รวม 4 รูป จะเป็นพื้นที่ 60.0 ส่วนพื้นที่รูปใหญ่เท่ากับ 180 พื้นที่รูประบายสีดำจึงเท่ากับ 120 (พื้นที่นับเป็นตารางฟุต ตามโจทย์)

ในข้อ 23 วิธีทำคล้าย ๆ ข้อ 22 พื้นที่ของรูปสี่ข้างมีขนาดเท่ากัน 2 คู่

ในข้อ 24 พื้นที่ของรูประบายสีดำ เท่ากับครึ่งหนึ่งของรูปใหญ่

ในข้อ 25 พื้นที่ของรูประบายสีดำเท่ากับครึ่งหนึ่งของรูปใหญ่เช่นเดียวกัน

แบบฝึกหัดของทฤษฎีที่ 24

ว – ร หน้า 48

(ภาคคำนวณและสร้างรูป)

1/48 โจทย์ จงหาเนื้อที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีด้าน

(1) ฐาน 5.5 ซ.ม. และส่วนสูง 4 ซ.ม.

(2) ฐาน $2.4''$ และส่วนสูง $1.5''$

(H & S 1/105)

คำเฉลย (1) เนื้อที่ = (5.5×4) = 22.0 ตร. ซม.

(2) " = (2.4×1.5) = 3.6 ตร. นิ้ว

2/48 โจทย์ จงเขียนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน A B C D เมื่อกำหนด $AB = 2\frac{1}{2}''$, $AD = 1\frac{1}{2}''$ และมุม A $= 65^\circ$ แล้วเขียนและวัดเส้นตั้งฉากจาก D มายัง AB และให้คำนวณหาค่าใกล้เคียงของพื้นที่ ทำไมจึงคิดแต่เพียงค่าใกล้เคียงของพื้นที่

แล้วลองคำนวณพื้นที่ดูอีก ใช้ความยาวของเส้น AD และเส้นตั้งฉาก ที่ลากจากจุด B มายัง AD คิดเฉลี่ยหาผลที่ได้สองครั้งว่าเป็นเท่าไร

คำเฉลย วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้มีด้าน $AB = 2\frac{1}{2}''$, $AD = 1\frac{1}{2}''$ $\hat{A} = 60^\circ$ นั้น ใช้สร้างตามบทสร้างที่ 12

ลาก DK, BM ให้ตั้งฉากกับ AB, AD ตามลำดับ

จากผลของการวัด $DK = 1.36''$

$\therefore$ เนื้อที่ของ $ABCD = 2.5 \times 1.36 = 3.400$ ตร.นิ้ว

เหตุที่คิดแต่เฉพาะค่าใกล้เคียงก็เพราะผลที่ได้จากการวัด อาจมีข้อผิดพลาด และเราไม่สามารถจะบอกความยาวที่แท้จริงได้ เช่นการที่บอกว่า DK วัดได้ราว $1.36''$ นั้น ตามจริงอาจยาวน้อยกว่าหรือมากกว่า $1.36''$ ความยาวที่แท้จริงต้องอยู่ในระหว่าง $1.355''$ ถึง $1.365''$ เพราะฉะนั้นการที่บอกว่า DK ยาว $1.36''$ นั้น ส่วนที่ผิดพลาดผิดได้ถึง $(1.36-1.355)$ หรือ $(1.365-1.36)$ คืออาจผิดได้ถึง $.005''$ แต่ไม่เกิน $.005''$

ฉะนั้นส่วนผิดพลาดของเนื้อที่อาจเป็นไปได้ถึง (2.5 × .005 ตร. นิ้ว หรือราว 0.0125 ตร นิ้ว

ตามรูปให้ BM เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจาก B มายัง AD ถ้าวัด BM ดูจะได้ยาวประมาณ 2.27″

$\therefore$ เนื้อที่ = AD.BM = (1.5×2.27) = 3.405 ตร. นิ้ว

$\therefore$ ผลเฉลี่ยของเนื้อที่ = $\frac{1}{2}(3.400+3.405)$ ตร.นิ้ว

= 3.4025 ,,

3/49 ด้านประชิดทั้งสองของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาว 30 เมตร และ 25 เมตร และมุมที่อยู่ระหว่างด้านประชิดเท่ากับ 50° จงเขียนแผนผังใช้ 1 ซม. แทน 5 เมตร และให้วัดส่วนสูงทีละครั้งโดยเปลี่ยนฐานแล้วคำนวณหาพื้นที่ทั้ง 2 ครั้ง เสร็จแล้วหาผลลัพธ์เฉลี่ย (H & S 3/105)

ข้อแนะนำ วิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ใช้ บ.ส. 12

ระยะตั้งฉากระหว่างด้านคู่ขนานยาว ถ้าวัดดูจะได้ 3.82 ซ.ม.

$\therefore$ 1 ซ.ม. แทน 5 เมตร

$\therefore$ 3.82 ,, = 5×3.82 เมตร

= 19.1 ,,

∴ เนื้อที่ $= (19.1 \times 30)$ ตร. เมตร

$= 573$,,

ถ้าวัดระยะตั้งฉากระหว่างด้านสั้น จะได้

4.6 ซ.ม.

∴ 1 ซ.ม. = 5 เมตร

∴ 4.6 ,, = 23 ,,

∴ เนื้อที่ $= 23 \times 25$ ต.ร. เมตร

$= 575$,,

∴ รายเฉลี่ยของพื้นที่ที่หาได้สองครั้ง

$= \frac{1}{2}(573+575)$ ต.ร. เมตร

$= 574$,,

4/49 พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ 4.2 ต.ร. นิ้ว ฐาน AB ยาว 2.8″ จะหาส่วนสูง ถ้า AD = 2″ จงเขียนสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(H & S 4/105)

วิธีหาส่วนสูง

∴ สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีเนื้อที่ 4.2 ต.ร นิ้ว.

ฐาน AB ยาว 2.8″

$\therefore$ ส่วนสูง $= \frac{4.2}{2.8} = 1.5$ นิ้ว

วิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

ลาก AB ยาว 2.8″ ลาก BE ให้ตั้งฉากกับ AB และให้ยาว 1.5″ ลาก XY ให้ผ่าน E และขนานกับ AB (บ.ส. 6) เอา A และ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 2″ เขียนส่วนโค้งตัด XY ที่จุด D และ C ลาก AD, BC แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

5/49 โจทย์ (5) ด้านหนึ่ง ๆ ของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาว 2″ และมีพื้นที่ 3.86 ตร. นิ้ว จงคำนวณหาส่วนสูง แล้วเขียนสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปนั้น และวัดดูมุมแหลมว่ากว้างกี่องศา

(H & S 5/105)

วิธีสร้างและคำนวณคล้ายข้อ 4

คำนวณ ส่วนสูง $= \frac{3.86}{2} = 1.93''$

สร้าง ตามแบบเดียวกับข้อ 4

จากผลของการวัด มุมแหลมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $= 75^\circ$

โจทย์แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 27

ว – ร หน้า 58

1/58 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งและ XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC ตัดด้านอีกสองด้านที่จุด X และ Y ลากเส้น BY และ CX และจงพิสูจน์ว่า

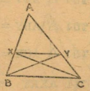
(1) พื้นที่ของ △ XBC = ของพื้นที่ △ YBC

(2) พื้นที่ของ △ BXY = พื้นที่ของ △ CXY

(3) พื้นที่ของ △ ABY = พื้นที่ของ △ ACX

(4) ถ้า BY กับ CX ตัดกันที่จุด K
ดังนั้น พื้นที่ของ △ BKX = พื้นที่ของ △ CKY

(H & S 1/109)



พิสูจน์ (1) ∵ △ XBC กับ △ YBC ตั้งอยู่บน
ฐาน BC ด้วยกัน และอยู่ในระหว่างเส้น

ขนาน BC กับ XY คู่เดียวกัน

∴ พื้นที่ของ △XBC = พื้นที่ของ △YBC ท.บ.26

(2) ∵ △ BXY กับ △ CXY ตั้งอยู่บนฐาน XY ด้วยกัน และอยู่ในระหว่างเส้นขนาน BC กับ XY คู่เดียวกัน

∴ พื้นที่ของ △BXY = พื้นที่ของ △CXY ท.บ.26

(3) ∵ △ ABY = △ AXY + △ BXY

และ △ ACX = △ AXY + △ CXY

△ BXY = CXY (พิสูจน์มาแล้วในข้อ 2)

∴ พื้นที่ของ △ ABY = พื้นที่ของ △ ACX

(4) ∵ พื้นที่ของ △ ABY = พื้นที่ของ △ ACX

พื้นที่ของ △ ABY = รูป AXKY + △ BKX

พื้นที่ของ △ ACX = รูป AXKY + △ CKY

∴ หักเอารูป AXKY ซึ่งเป็นรูปร่วมออกจาก △ ABY และออกจาก △ ACX จะได้

△ BKX = △ CKY

2/58 โจทย์ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าเส้นมัธยฐานเส้นหนึ่งของสามเหลี่ยม ย่อมแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสองส่วนมีพื้นที่เท่าๆ กัน

จงแบ่งรูปสามเหลี่ยม ออกเป็น สาม ส่วนเท่าๆ กันโดยวิธีลากเส้นตรงจากมุมยอด

(H & S 1/109)

วิธีทำตอนที่ 1

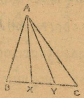
(ให้ AX เป็นเส้นมัธยฐานแบ่งครึ่งด้าน BC)

สร้าง ลาก AK ตั้งฉากกับ BC

พิสูจน์ $\triangle$ ABX กับ $\triangle$ ACX มีฐาน BX = CX

และมีส่วนสูง AK ร่วมกัน

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ ABX = พื้นที่ $\triangle$ ACX (ท.บ. 26)



วิธีทำตอนที่ 2

สร้าง แบ่ง BC ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน

ที่จุด X และ Y

ลาก AX, AY (บ.ส. 7)

พิสูจน์ △ ABY มี AX เป็นเส้นมัธยฐาน

∴ พื้นที่ △ ABX = พื้นที่ △ AXY (โดยตอน 1)

△ ACX มี AY เป็นเส้นมัธยฐาน

∴ พื้นที่ △ ACY = พื้นที่ △ AXY

∴ △ ABX = △ AXY = △ ACY (พื้นที่)

5/69 โจทย์ ก. ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ BP,DQ เป็นเส้นตั้งฉากจากจุด B และ D ไปยังเส้นทะแยงมุม AC

จงพิสูจน์ว่า AP = DQ

ข. ถ้า X เป็นจุดอยู่บนเส้น AC หรือส่วนต่อของ AC

จงพิสูจน์ว่า (i) △ ADX = △ ABX

(ii) △ CDX = △ CBX

(H & S 5/109)

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับพื้นที่ของสามเหลี่ยม

ว. – ร. หน้า 53

(ใช้วิธีคำนวณและสร้าง)

1/53 โจทย์ จงคำนวณหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ซึ่งมี

(i) ฐาน = 24 ฟุต สูง = 15 ฟุต

(ii) ฐาน = 4.8″ สูง = 3.5″

(iii) ฐาน = 160 เมตร สูง = 125 เมตร

(H & S 1/107)

วิธีคำนวณ

(i) พื้นที่ $= \frac{1}{2}(24 \times 15) = 180$ ต.ร. ฟุต

(ii) ,, $= \frac{1}{2}(4.8 \times 3.5) = 8.4$ ต.ร. นิ้ว

(iii) ,, $= \frac{1}{2}(160 \times 125) = 10000$ ต.ร. เมตร

2/53 โจทย์ จงเขียนสามเหลี่ยมจากสิ่ง ที่กำหนดให้ ต่อไปนี้ ในข้อหนึ่ง ๆ ต้องเขียนรูปและวัดส่วนสูงในเมื่อใช้ ด้านใดด้านหนึ่งเป็นฐาน และแล้วให้คำนวณหา พื้นที่โดยประมาณ

(i) $a = 8.4$ ซ.ม. $b = 6.8$ ซ.ม. $c = 4.0$ ซ.ม.

(ii) $b = 5.0$,, $c = 6.8$ ซ.ม. $A = 65^\circ$

(iii) $a = 6.5$,, $B = 5.2^\circ$ $C = 76^\circ$

(H & S 2/107)

คำเฉลย (i) วิธีสร้างใช้บทสร้างที่ 8

ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากจาก A มายัง BC $= 3.6$ ซ.ม.

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(8.4 \times 3.2) = 13.44$ ตร.ซม.

(ii) วิธีสร้างสามเหลี่ยม ลาก AC หรือ b ให้ยาว 5 ซม. ที่ A ทำมุม CAB กาง 65° ทำ AB ให้ยาว 6.8 ซม.

แล้ว ABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากจาก C มายัง AB ยาว 4.5 ซม.

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(6.8 \times 4.5) = 15.3$ ตร. ซม.

(iii) วิธีสร้างแบบเดียวกับตอน (ii)

ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากจาก A มายัง BC ยาว 6.3 ซม.

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(6.5 \times 6.3)$ ตร. ซม.

$= 20.48$,,

3/53 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี C เป็นมุมฉาก
จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ $= \frac{1}{2}$ BC × CA

ถ้ากำหนดให้ a = 6 ซ.ม. b = 5 ซม.
จงคำนวณหาพื้นที่ แล้วขยายสามเหลี่ยม แล้ว
วัดด้านซึ่งอยู่ตรงข้ามมุมฉาก ลากและวัดเส้นตั้ง
ฉากจากจุด c ไปยังด้านตรงข้ามมุมฉาก เสร็จ
แล้วคำนวณพื้นที่โดยประมาณ (H & S 3/107)

คำเฉลย ∵ ABC เป็น △ มุมฉาก

∴ AC ตั้งฉากกับ BC

∵ ถ้าคิด BC เป็นฐาน AC จะเป็นส่วนสูง

∴ เนื้อที่ △ ABC $= \frac{1}{2}$ BC × CA

เมื่อ a = 6 ซม. b = 5 ซม.

∴ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(6 \times 5) = 15$ ตร. ซม. -- (i)

วิธีสร้าง △ มุมฉาก ABC ให้ทำแบบ เดียว
กับข้อ 2 ตอน (ii)

เสร็จแล้วลาก CK ให้ตั้งฉากกับ AB

ถ้าวัดดูจะได้ ด้านตรง ข้าม มุมฉาก AB ยาว
7.8 ซ.ม. CK = 3.8 ซม.

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(7.8 \times 3.8) = 14.82$ ตร.ซม. --@

(1) เป็นผลที่ได้จากการคำนวณ คือ

น.ท. $\triangle$ = 15 ต.ร. ซ.ม.

(2) เป็นผลที่ได้จากการสร้างรูป คือ

น.ท. $\triangle$ = 14.82 ,,

$\therefore$ ส่วนที่ผิดพลาดไป

$= 15 - 14.82 = 0.18$,,

$\therefore$ คิดเป็นร้อยละจะได้

$= \frac{0.18}{15} \times 100 = 1.2$ %

4 / 53 โจทย์ จงสร้างรูปและคำนวณตามแบบเดียวกับข้อ 3 ทั้งหมด สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี $a = 2.8''$. และ $b = 4.5''$ C คงเป็นมุมฉาก เหมือนคราวก่อน (H & S 4/107)

คำเฉลย เนื้อที่ของสามเหลี่ยมมุมฉาก $= \frac{1}{2}(2.8 \times 4.5)$

$= 6.3$ ต.ร. นิ้ว

ถ้าวัดดูจะได้ $c = 5.30''$, ระยะตั้งฉากจาก C มายัง AB ยาว $2.38''$

∴ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}\left(5.30\times2.38\right)$ ต.ร.นิ้ว

$= 6.307$,,

∴ ส่วนที่ผิดพลาด $= 6.307-6.3$,,

$= 0.007$,,

∴ ถ้าคิดเป็นร้อยละ $= \frac{0.007}{6.3} \times 100 = 0.1\ \%$

5/54 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้

(i) พื้นที่ = 80 ตร. นิ้ว ฐาน = 1 ฟุต 8 นิ้ว

จงคำนวณหาส่วนสูง

(ii) พื้นที่ = 10.4 ตร. ซม. สูง = 1.6 ซม.

จงคำนวณหาฐาน (H & S 5/107)

คำเฉลย (i) ∵ เนื้อที่ของ $\Delta = \frac{1}{2}$ ฐาน × สูง

∴ สูง $= \frac{2\Delta}{\text{ฐาน}} = \frac{2\times80}{20} = 8$ นิ้ว

(ii) เช่นเดียวกัน

ฐาน $= \frac{2\Delta}{\text{สูง}} = \frac{2\times10.4}{1.6}$ ซม.

$= 13$ ซ.ม.

6/55 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยม ABC กำหนดให้

$a = 3.0''$, $b = 2.8''$, $c = 2.6''$ ฉากแล้ววัดเส้นตั้งฉากจาก A มายัง BC แล้วคำนวณหาพื้นที่โดยประมาณ (H & S 6/107)

วิธีสร้าง ใช้บทสร้างที่ 8 สร้าง △

ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากจาก A มายัง

$BC = 2.24''$

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2}(3.0 \times 2.24)$ ตร. นิ้ว

$= 3.36$,,

ข้อสังเกตุ คำเฉลยบางข้อให้ไว้แต่เพียงคำแนะนำย่อ ๆ ส่วนการสร้างรูปอื่นแท้จริงนั้นจะทิ้งไว้ให้นักเรียนสร้างเอง

3/59 โจทย์ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้าลากเส้นทะแยงทั้งสองแล้ว จะแบ่ง ▱ ด้านขนานออกเป็นสามเหลี่ยมสี่รูปมีเนื้อที่เท่า ๆ กัน

(H & S 3/109)

พิสูจน์ AO = OC (โดยบทแทรก 3 ท.บ.21)

$\therefore$ △ ABC มี BO เป็นมีเดียน

ดังนั้นพื้นที่ $\triangle$ BAO = พื้นที่ $\triangle$ BCO

โดยทำนองนั้นพิสูจน์ได้ว่า :-

พื้นที่ $\triangle$ DAO = พื้นที่ $\triangle$ DCO

และพื้นที่ $\triangle$ CDO = พื้นที่ $\triangle$ BCO

$\therefore$ $\triangle$ BAO = $\triangle$ BCO = $\triangle$ CDO = $\triangle$ DOA

(พื้นที่) ซ.ต.พ.

4/59 โจทย์ สามเหลี่ยม ABC มี X เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน BC ถ้า Y เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่บนเส้นมีเดียน AX จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ ABY มีพื้นที่ = $\triangle$ ACY

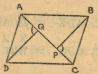
(H & S 4/109)

พิสูจน์ พื้นที่ $\triangle$ ABX = พื้นที่ $\triangle$ BCX (โดยข้อ 2)

และพื้นที่ $\triangle$ YBX = พื้นที่ $\triangle$ YCX (โดยข้อ 2)

$\therefore$ $\triangle$ ABX − $\triangle$ AYB = $\triangle$ ACX − $\triangle$ YCX

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ ABY = พื้น $\triangle$ ACY



พิสูจน์ ก. พื้นที่ $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ × AC × BP

พื้นที่ $\triangle ADC = \frac{1}{2} \times AC \times DQ$

แต่ $\triangle ABC = ADC$ (โดย ท.บ. 21)

ดังนั้น $\frac{1}{2} AC \times BP = \frac{1}{2} AC \times DQ$

$\therefore BP = DQ$

พิสูจน์ ข. ถ้า BD ตัด AC ที่จุด O

$\therefore$ AC ตัดแบ่งครึ่งกับ BD ที่จุด O

(บทแทรก 3 ท.บ. 21)

ดังนั้น AO เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle AXD$

และ XO ,, ,, ,, $\triangle DOB$

,, CO ,, ,, ,, $\triangle BCD$

พื้นที่ $\triangle ADO$ = พื้นที่ $\triangle ABO$ (ข้อ 2)

,, $\triangle DXO$ = ,, $\triangle CXO$,,

ดังนั้น $\triangle ADO - \triangle DXO = \triangle ABO - \triangle CXO$

$\therefore \triangle ADX = \triangle AXB$ (พื้นที่) . . . . (1)

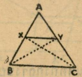
พื้นที่ $\triangle CDO$ = พื้นที่ CBO (ข้อ 2)

ดังนั้น $\triangle CDO + \triangle DXO = \triangle CBO + \triangle BOX$

$\therefore \triangle CDX = \triangle CBX$ . . . . (2)

6/59 โจทย์ จงพิสูจน์โดยอาศัยบทพิสูจน์ที่ 26 และ 27 ว่า เส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของสามเหลี่ยม ย่อมขนานกับด้านที่สาม

(H & S 6/109)



ให้ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AC

สร้าง ลาก BY, CX

พิสูจน์ พื้นที่ $\triangle$ BCX = พื้นที่ $\triangle$ CAX (โดยข้อ 2)

$\therefore$ $\triangle$ BCX = $\frac{1}{2}$ ของ $\triangle$ ABC

พื้นที่ $\triangle$ BCY = พื้นที่ $\triangle$ BAY

$\therefore$ $\triangle$ BCY = $\frac{1}{2}$ ของ $\triangle$ ABC

นั่นคือ พื้นที่ $\triangle$ BCX = พื้นที่ $\triangle$ BCY

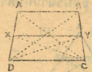
สามเหลี่ยมทั้งสองอยู่บนฐาน BC ร่วมกัน

$\therefore$ $\triangle$ BCX กับ $\triangle$ BCY อยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน (ท.บ. 27)

$\therefore$ XY ขนานกับ BC

7/60 โจทย์ เส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านคู่ที่ไม่ขนาน
กับของสี่เหลี่ยมคางหมู ย่อมขนานกับด้านคู่ขนาน

(H & S 7/109)



ให้ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ BC

สร้าง ลาก AC, BD CX และ DY ตามลำดับ

พิสูจน์ พื้นที่ $\triangle$ ACX = พื้นที่ $\triangle$ DCX . . . (ข้อ 2)

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ ACX = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ $\triangle$ ADC

โดยทำนองเดียวกัน เราอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

พื้นที่ $\triangle$ DCY = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ $\triangle$ BCD

แต่พื้นที่ $\triangle$ ADC = พื้นที่ $\triangle$ BDC (ท.บ.26)

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ DCX = พื้นที่ $\triangle$ DCY

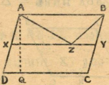
และ $\therefore$ DC ขนานกับ XY . . . . (ท.บ.27)

$\therefore$ XY ก็ขนานกัน AB ด้วย . . (ท.บ.15)

ซ.ต.พ.

8/60 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ X, Y
เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ถ้า Z เป็นจุด

อยู่ในเส้น XY หรือส่วนต่อของ XY จงพิสูจน์ว่า
สามเหลี่ยม AZB เป็นเศษหนึ่งส่วนสี่ของสี่เหลี่ยม
ด้านขนาน A B C D (H & S 8/109)



สร้าง ลาก AQ ตั้งฉากกับ CD

พิสูจน์ โดย บ.ท. 20 เราจะได้ว่า
□ ABXY และ □ XYCD เป็น □ ด้านขนาน
และโดย ท.บ. 14 เราจะได้ว่า AP ตั้งฉากกับ XY
ใน △ ADQ เส้นตรง XP ซึ่งขนานกับ DQ
ย่อมตัด AQ ออกทำให้ AP = DQ
(ข้อ 3 หลัง ท.บ. 22)

∴ □ ABXY กับ □ YYCD มีพื้นที่เท่ากันโดย
(ท.บ. 24 บทแทรก)

ดังนั้น □ ABYX $= \frac{1}{2}$ □ ABCD

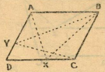
∴ △ AZB $= \frac{1}{2}$ □ ABYX (ท บ.26)

ดังนั้นพื้นที่ △ AZB $= \frac{1}{2}$ ของ $\frac{1}{2}$ □ ABCD

$= \frac{1}{4}$ ของ □ APCD

9/60 โจทย์ ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ X,Y เป็นจุดอยู่ในเส้น DC และ AD ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า ABX มีพื้นที่ = △ BCY

(H & S 8/109)



พิสูจน์ △ AXB กับ □ ABCD มีฐาน AB เดียวกันและอยู่ในระหว่างเส้นขนาน AB กับ CD คู่เดียวกัน แ

∴ พื้นที่ △ AXB = $\frac{1}{2}$ □ ABCD

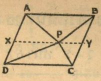
และ △ BCY กับ □ ABCD มีฐาน BC ร่วมกัน และอยู่ในระหว่างเส้นขนาน BC กับ AD คู่เดียวกัน

∴ พื้นที่ △ BYC = $\frac{1}{2}$ □ ABCD

∴ △ AXB = △ BCY (พื้นที่)

10/60 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ P เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมนั้น จงพิสูจน์ให้เห็นว่าผลบวกของ △ PAB กับ PCD มีพื้นที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (H & S 8/109)

สร้าง จากจุด P ลาก PX ให้ขนานกับ AB แล้วพบ AD



ที่จุด X ต่อ PX ทางจุด P ออกไปพบ BC ที่จุด Y

พิสูจน์ AB ขนานกับ XY และ DC (ท.บ. 15)

พื้นที่ $\triangle$ PAB $= \frac{1}{2} \square$ ABXY

(บทแทรก ท.บ. 25)

และพื้นที่ $\triangle$ DCP $= \frac{1}{2} \square$ XYCD

(บทแทรก ท.บ. 25)

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ PAB + พื้นที่ $\triangle$ PCD

$= \frac{1}{2} \square ABXY + \frac{1}{2} \square XYCD$

$= \frac{1}{2} (\square ABXY + \square XYCD)$

$= \frac{1}{2} \square ABCD$

โจทย์แบบฝึกหัดว่าด้วยพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

ว – ร หน้า 61

[คำนวณและสร้าง]

1/61 โจทย์ ด้านทั้งสามของนาสามเหลี่ยมยาว 370 หลา 200 หลา และ 190 หลา จงเขียนแผนที่ (มาตราส่วน 1″ ต่อ 100 หลา) จงลากและวัดส่วนสูงแล้วคำนวณ หาพื้นที่โดยประมาณของนาเป็นตารางหลา (H & S 1/110)

วิธีสร้าง ใช้บทสร้างที่ 8 สร้างรูป △ ให้มีด้านยาว 3.7″, 2.0″ 1.9″

ถ้าใช้ด้านที่ยาว 2.0″ เป็นด้านฐาน

ส่วนสูงถ้าวัดดูจะได้ 1.14″

∴ เนื้อที่ในแผนผัง $= \frac{1}{2}$ (ฐาน × สูง)

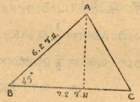
$= \frac{1}{2}(2.0 \times 1.14)$ ตร. นิ้ว

∴ เนื้อที่จริง $= \frac{1}{2}(2.0 \times 1.14) \times 100$ ตร.หลา

$= 11400$,,

2/61 โจทย์ ด้านทั้งสองของรูปสามเหลี่ยมยาว 124 เมตร และ 144 เมตร ตามลำดับ มุมระหว่างด้านทั้งสองนี้เท่ากับ 45° จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน 1 ซ.ม. ต่อ 20 เมตร) แล้ววัดส่วนที่จำเป็น และคำนวณหาพื้นที่โดยประมาณ

(H & S 2/110)



วิธีสร้าง ลาก BC ให้ยาว 7.2 ที่ B ทำมุม $\hat{CBA} = 45^\circ$

ทำ AB ให้เท่ากับ 6.2 ซ.ม. ลาก AC

จาก A ลาก AX ให้ตั้งฉากกับ BC

วัด AX จะได้ยาว 4.4 ซ.ม.

$\therefore$ เนื้อที่ในแผนผัง $= \frac{1}{2}(7.2 \times 4.4)$ ตร. ซม.

$\because$ 1 ซ.ม. = 20 เมตร

$\therefore$ 1 ตร. ซ.ม. = 400 ตร. เมตร

$\therefore$ เนื้อที่จริง $= \frac{1}{2}(7.2 \times 4.4) \times 400$ ตร.เมตร

$= 6336$,,

3/61 โจทย์ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 6.6 ตร.ซม. และฐาน BC = 5.5 ซม. จงหาส่วนสูงแล้วจงหาโลกัสของจุดยอด A ถ้าเพิ่มสิ่งที่กำหนดให้ข้างบนต่อไปอีก คือ BA = 2.6 ซม. จงสร้าง $\triangle$ และ CA (H & S 3/110)

ลาก $AK \perp BC$

หาส่วนสูง พื้นที่ของ $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC.AK$

$$\therefore \quad 6.6 = \frac{1}{2} \times 5.5 \times AK$$

$$= 2.75\ AK$$

$$AK = \frac{6.6}{2.75} = 2.4 \text{ ซ.ม.}$$

สร้าง ลาก BC ยาว 5.5 ซ.ม.

ลาก AK ยาว 2.4 ซ.ม. ให้ $\perp$ กับ BC ตรงที่หนึ่งที่ใดก็ได้

ลาก XY ให้ผ่านจุด A

ให้ XAK เป็นมุมฉาก

ลาก AB, AC

$\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

หาโลกัส ถ้า $\triangle$ ABC ตั้งอยู่บน XY

พื้นที่ △ ABC ย่อมเท่ากับ 6.6 ตาราง ซม. เสมอ

(ท.บ. 26)

∴ XY เป็นโคไซน์ของ $\hat{A}$

(วิธีทำตอนที่ 2 ไม่ได้อธิบายไว้ เพราะเป็นทางปฏิบัติอย่างง่าย ๆ)

4/62 โจทย์ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 3.06 ตร.นิ้ว และ $a = 3.0''$ จงหาส่วนสูง และโคไซน์ของจุด A ถ้ากำหนดมุม $C = 68°$ จงสร้างสามเหลี่ยมและวัดด้าน b (H & S 4/110)

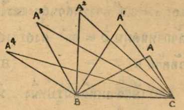
5/62 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้าน BC, BA ยาวคงตัว คือ 6 ซม. และ 5 ซม. ถ้า BC ตายตัว และ BA หมุนไปรอบจุด B จงหาการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ของสามเหลี่ยม เมื่อมุม B เพิ่มขึ้นจาก 0° ถึง 180°

ให้ตอบคำถามนี้โดยวิธีสร้าง สามเหลี่ยมหลายรูป เพิ่มมุม B ขึ้นครั้งละ 30° จงหาพื้นที่ทุกครั้ง แล้วเอาผลตรอกลงในตาราง

(H & S 5/110)

จำนวนองศาของมุม 8	30°	80°	90	120°	150°
พื้นที่เป็นตาราง ซ.ม. ของ △ ABC	7.5	1.29	15	12.9	7.5

(โจทย์ข้อนี้ถ้านักเรียนชั้นสูง ซึ่งเรียนตรีโกณมิติแล้ว อาจหาคำตอบได้โดยคำนวณไม่ต้องวัดส่วนสูง)



สามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ เมื่อ

$\hat{CAB} = \hat{CAG}$ หรือ $\hat{EDF}$ (ท.บ. 4)

แต่โจทย์กำหนดให้ $\hat{CAB} + \hat{EDF} = 2$ ∟ฉ

$\therefore \hat{CAB} = \hat{EDF} = 1$ ∟ฉ

∴ สามเหลี่ยมจะเท่ากันทุกประการได้ เมื่อสามเหลี่ยมทั้งสองที่กำหนดให้ต่างเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

6/62 โจทย์ สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ๆ ต่อด้าน และมุมในระหว่างด้านเท่ารวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นมีพื้นที่เท่ากัน และเมื่อไรสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นจึงจะเท่ากันทุกประการ (H & S 6/110)

กำหนดให้ ABC กับ DEF เป็น △ สองรูป

มีด้าน AB = DE และ AC = DF

$\hat{BAC} + \hat{EDF} = 2$ ∟ฉ

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ △ ABC เท่ากับพื้นที่ △ DEF

พิสูจน์ ยก △ DEF เข้าทับกับ △ ABC

ให้จุด D ทับจุด A ให้ด้าน DF ทับ AC

∵ DF = AC

∴ จุด F ทับจุด C ให้ G เป็นตำแหน่งใหม่ของ E

∴ △ ACG แทน △ DEF ในที่ใหม่

∴ AB = AG $\hat{GAC}$ แทน $\hat{EDF}$

$\hat{BAC} + \hat{GAC} = 2$ ∟ฉ

ดังนั้น AB กับ AG ต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือรูป △ GBC เป็นรูป △ มี BG เป็นฐาน

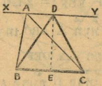
และ CA เป็นเส้นเดียว

ดังนั้น พื้นที่ △ ABC = พื้นที่ △ GAC

(โดยข้อสองหน้า 58)

∴ พื้นที่ △ ABC = พื้นที่ △ DEF

7/63 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง บนฐานของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมที่กำหนดให้นั้นด้วย (H & S 4/110)



สร้าง ลาก XY ให้ผ่านจุด A และให้ขนานกับ BC

แบ่งครึ่ง BC ที่จุด E ลาก ED ให้ตั้งฉาก

กับ BC และพบ XY ที่จุด D

ลาก BD และ DC

พิสูจน์ พื้นที่ △ DBC = พื้นที่ ABC (โดย ท บ. 26)

∵ DE แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC (สร้าง)

BD = CD (บ.ต. 14)

∴ △ DBC เป็น △ หน้าจั่ว

8/61 โจทย์ ถ้าต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ารูปหนึ่งไปตามลำดับ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดขึ้น (แบบฝึกหัดหลัง บ.พ. 22 ข้อ 7) เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (H & S 8/110)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน E,F,G,H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ EFGH = $\frac{1}{2}$ ABCD

สร้าง ลาก EH และ FG ให้ตัด AC ที่ P และ Q ลาก EC

พิสูจน์ ∵ E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ AB,BC

∴ EF ขนานและเท่ากับครึ่งหนึ่งของ AC

(ข้อ 3/168)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า GH ขนาน

และเท่ากับ $\frac{1}{2}$ AC („)

∴ EF ขนานและเท่ากับ GH

∴ FG „ „ EH

$\therefore$ EFGH และ EFQP, PQGH เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$\therefore$ EFQP $= 2\ \triangle$ EFC (มีฐาน EF ร่วมกันและอยู่ในระหว่างคู่ขนาน EF, AC เดียวกัน)

แต่ $\triangle$ CEF $= \triangle$ BEF (ท.บ.26)

$\therefore$ EFQP $= 2\ \triangle$ EFC $= \triangle$ CEF $+ \triangle$ BEF

$= \triangle$ BEC

แต่ $\triangle$ BEC $= \triangle$ AEC (ท.บ. 26)

$\therefore$ EFQP $= \triangle$ AEC

$= \frac{1}{2}\ \triangle$ ABC .... (1)

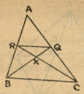
เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

PQGH $= \frac{1}{2}\ \triangle$ ACD .... (2)

(1)+(2) EFQP+PQGH $= \frac{1}{2}$ ($\triangle$ ABC $+ \triangle$ ACD)

$\therefore$ EFGH $= \frac{1}{2}$ ABCD

9/64 โจทย์ R และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AC ของสามเหลี่ยม ABC ถ้า BQ และ CR ตัดกันที่จุด X จงพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยม BXC มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยม AQXR (H & S 9/110)



พิสูจน์ RQ // BC (ข้อ 2/168)

∴ △ BRQ = △ BRQ (ท.บ. 26)

เอา △ RQX หักออกทั้งสองข้าง จะได้

△ BRX = △ CQX

∵ △ ARC = △ RBC (ท.บ. 26)

∴ พื้นที่ △ ARC = พื้นที่ △ RBA

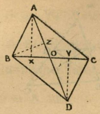
พื้นที่ △ ARC − พื้นที่ △ CXQ = พื้นที่

△ RBC − พื้นที่ △ BXR

∴ พื้นที่ □ AQXB = พื้นที่ △ BXC

10/64 โจทย์ สามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีพื้นที่เท่ากันตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน แต่อยู่คนละข้างของฐาน จงพิสูจน์ว่าเส้นที่ต่อมุมยอดของสามเหลี่ยม ทั้งสองจะถูกแบ่งครึ่งด้วยฐานหรือส่วนต่อของฐาน

(H & S 10/110)



กำหนดให้ ABC, DBC เป็นสามเหลี่ยมสองรูปมีเนื้อที่เท่ากัน

จะต้องพิสูจน์ว่า AO = OD

ลาก AX ตั้งฉากกับ BC (หรือส่วนต่อของ BC)

ลาก DY ตั้งฉากกับ BC (,, ,, BC)

ลาก BZ ตั้งฉากกับ AD

พิสูจน์ พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AX$

พื้นที่ $\triangle DBC = \frac{1}{2} BC \times DY$

แต่พื้นที่ $\triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle DBC$

$\therefore \frac{1}{2} BC \times AX = \frac{1}{2} BC \times DY$

ดังนั้น $AX = DY$

$\therefore \triangle ABO, \triangle DBO$ ตั้งอยู่บนฐาน BO ร่วมกัน

และมีส่วนสูง AX กับ DY เท่ากัน

$\therefore$ พื้นที่ ABO กับ $\triangle DBO$ เท่ากัน

ดังนั้น $\frac{1}{2} BZ.AO = \frac{1}{2} BZ \times OD$

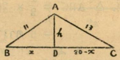
$\therefore AO = OD$

แบบฝึกหัด ว–ร หน้า 66

1/66 โจทย์ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมอาศัยวิธีข้างบนนี้โดย
กำหนดด้านทั้งสามให้ดังต่อไปนี้

(1) 20 ฟุต, 13 ฟุต, 11 ฟุต

(H & S 1/111)



วิธีทำ ให้ ABC เป็น △ ที่กำหนดให้
ลาก AD ตั้งฉากกับ BC
สมมติให้ AD = h BD = x

$$\therefore \quad DC = 20 - x$$

$$AD^2 = 11^2 - x^2 = 121 - x^2$$

$$AD^2 = 13^2 - (20 - x^2)$$

$$= 169 - 400 + 40x - x^2$$

$$= -231 + 40x - x^2$$

$$\therefore \quad 121 - x^2 = -231 + 40x - x^2$$

$$40x = 352$$

$$x = 8.8$$

$$\therefore AD^2 = 121 - 77.44$$

$$= 40.56$$

$$AD = \sqrt{43.56}$$

$$= 6.6$$

$\therefore$ พ.ท. $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2} \times 20 \times 6.6$

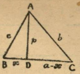
= 6 ตารางฟุต

โจทย์ (ต่อ) จงหาเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยมโดยกำหนดด้านทั้งสามให้ ดังต่อไปนี้ คือ (H & S หน้า 111)

(2)	15 หลา	14 หลา	13 หลา
(3)	21 เมตร	20 เมตร	13 เมตร
(4)	30 เซ็นติเมตร	25 เซ็นติเมตร	11 เซ็นติเมตร
(5)	37 ฟุต	30 ฟุต	13 ฟุต
(6)	51 เมตร	37 เมตร	20 เมตร

[ข้อ 2 – 6 ทำวิธีอย่างเดียวกับข้อ 1]

7/66 โจทย์ ถ้าด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ยาว a, b และ c หน่วย จงพิสูจน์จากรูปว่า



(1) $x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

(2) $p^2 = c^2 - \left\{ \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right\}^2$

(3) พื้นที่ของ

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

(4) ถ้า $S = \dfrac{a+b+c}{2}$ (S ย่อมาจาก Semi-peri--meter = ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบเขตต์) ก็จะได้

พื้นที่ของ $\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

(H & S 7/111)

วิธีทำ ตามรูปข้างบน

(1) ใน $\triangle$ ABD $x^2 = c^2 - p^2$ (ท.บ. 29)

,, $\triangle$ ACD $\because p^2 = b^2 - (a-x)^2$ (,,)

$$= b^2 - (a^2 - 2ax + x^2)$$

$$= b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$\therefore x^2 = c^2 - (b^2 - a^2 + 2ax - x^2)$$

$$= c^2 - b^2 + a^2 - 2ax - x^2$$

$$2ax = c^2 - b^2 + a^2$$

$$\therefore x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

(2) $$p^2 = c^2 - x^2$$

แทนค่าของ x ในข้อ 1

$$\therefore p^2 = c^2 - \left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right\}^2$$

(3) พื้นที่ $\Delta = \frac{1}{2}\,ak$

$$\therefore p^2 = c^2 - \left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right\}^2 \quad \text{โดยข้อ 2}$$

$$\therefore p = \sqrt{c^2 - \left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)}{2a}\cdot\frac{\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)}{2a}}$$

$$\therefore p = \sqrt{\frac{\left(b^2-a^2+2ac-c^2\right)}{2a}\cdot\frac{\left(a^2+2ac+c^2-c^2\right)}{2a}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{b^2-\left(a^2-2ac+c^2\right)}{2a}\right\}\left\{\frac{\left(a^2+2ac+c^2\right)-b^2}{2a}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{b^2-\left(a-c\right)^2}{2a}\right\}\left\{\frac{\left(a+c\right)^2-b^2}{2a}\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{\left(b-a+c\right)\left(b+a-c\right)}{2a}\right\}\left\{\frac{\left(a+c-b\right)\left(a+c+b\right)}{2a}\right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(b-a+c\right)\left(b+a-c\right)\left(a+c-b\right)\left(a+b+c\right)}{4a^2}}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b+c\right)}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(-a-b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)}$$

เอาค่าของ p แทน

พื้นที่ $\triangle$

$$= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2a}\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)}$$

(4) $\because \; S = \dfrac{a+b+c}{2}$

จากข้อ 3 เราได้ว่า

พื้นที่ $\triangle$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(-a+b+c)\frac{1}{2}(a-b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b+c-2a)\frac{1}{2}(a+b+c-2b)\frac{1}{2}(a+b+c-2c)}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-b\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-c\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

เอาค่า S แทน $\dfrac{a+b+c}{2}$

พื้นที่ $\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

หมายเหตุ วิธีพิสูจน์ในข้อ 1–4 นี้ ได้นำวิธีและสูตรของพีชคณิตมาใช้ด้วย

ก. สูตร ผลตบของกำลัง 2 ของเลข 2 จำนวนย่อมเท่ากับผลคูณของ ผลบวกและผลลบ ของ 2 จำนวน นั้นเองเช่น

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

เราอาจจะนำสูตรนี้มาใช้แทนจำนวน ที่เป็นเทอมผสมก็ได้เช่นในข้อ 3

$$b^2-(a-c)^2 = \{b-(a-c)\}\{b+(a-c)\}$$
$$= (b-a+c)(b+a-c) \text{ เป็นต้น}$$

ข. สูตร กำลัง 2 ของผลบวกของเลข 2 จำนวน ย่อมเท่ากับ ผลบวก ของ กำลัง 2 ของ 2 จำนวน นั้น บวกกับ 2 เท่าของผลคูณของ 2 จำนวนนั้นเช่น

$$(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$$

ค. สูตร กำลัง 2 ของผลตบของเลข 2 จำนวนย่อมเท่ากับผลบวกของกำลัง 2 ของ 2 จำนวนลบด้วย 2 เท่าของผลคูณของ 2 จำนวนนั้นเช่น

$$(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$$

แบบฝึกหัด ว–ร หน้า 70
(เกี่ยวกับการคำนวณและการสร้าง)

1/70 โจทย์ จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีด้านคู่ขนานยาว 4.7 นิ้ว และ 3.3 นิ้ว และส่วนสูง 15 นิ้ว (H & S 1/113)

วิธีทำ พ.ท. สี่เหลี่ยมคางหมู

$$= \frac{1}{2} \text{สูง} \times (\text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน})$$

$$= \frac{1}{2}(1.5) \times (4.7 + 3.3) \text{ ตร.นิ้ว}$$

$$= 6 \text{ ตร.นิ้ว}$$

2/70 โจทย์ สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD มีเส้นทะแยงมุม AC ยาว 17 ฟุต และเส้นกิ่งจาก B และ D ยาว 11 ฟุต และ 9 ฟุต จงหาพื้นที่ (H & S 2/113)

วิธีทำ จากรูป $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}(11 \times 7)$ ตร.ฟุต

$\triangle$ ADC $= \frac{1}{2}(9 \times 17)$,,

$$\therefore \text{ABCD} = \triangle \text{ABC} + \triangle \text{ADC}$$

$$= \frac{1}{2}(11 \times 7) + \frac{1}{2}(9 \times 17) \quad ,,$$

$$= \frac{1}{2} \times 17\,(11 + 9) \quad ,,$$

$$= \frac{1}{2}\,20 \times 17 = 170 \text{ ตร.ฟุต}$$

3/70 โจทย์ ABCD เป็นแผนผังของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เส้นทะแยงมุม AC วัดได้ 8.2 ซม. และเส้นดิ่งจาก B และ D วัดได้ 3.4 ซม. และ 2.6 ซม. ตามลำดับ ถ้า 1 ซม. ในแผนผังใช้แทน 5 เมตร จงหาพื้นที่ของที่นั้น (H & S 3/113)

วิธีหา จากรูปในข้อ 2

เนื้อที่ในแปลงนี้ $= \frac{1}{2}(3.4+2.6)\times 8.2 = 24.6$ ตร.ซม.

มาตราส่วนที่ใช้ 1 ซม. $=$ 5 เมตร

$\therefore$ 1 ตร.ซม. $=$ 25 ตร.เมตร

$\therefore$ เนื้อที่ในแผนผัง 24.6 ตร.ซม.

$= 24.6 \times 25$ ตร.เมตร

$= 615$,,

4/70 โจทย์ ส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดให้ใน รูป สี่เหลี่ยม ABCD นั้นเป็นนิ้ว

จงสร้างสี่เหลี่ยมและวัดเส้นดิ่ง ซึ่งลากจาก A และ C ไปยัง BD และแล้วให้คำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ (H & S 4/113)

วิธีสร้าง รูปแผนผังที่กำหนดให้มีด้านยาวเป็นหน่วย วิธี

สร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้มีด้านยาว เป็นนิ้วให้ทำดังนี้ คือ ใช้บทสร้างที่ 8 สร้าง $\triangle$ DAB ให้มีด้าน AB, BD, DA ยาว 4.0", 4.2" และ 2.6" ตาม ใช้ B และ D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 3.4" และ 2.0" เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C ลาก CD, CB

แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมีด้านยาว เป็นนิ้วและมีลักษณะเหมือนแผนผังทุกประการ

จาก A และ C ลากเส้นตั้งฉากมายัง BD และถ้าวัดความยาวของเส้นตั้งฉากทั้งสองนี้จะได้

2.4" และ 1.6"

$\therefore$ น.ท.ของ ABCD $= \frac{1}{2}(1.6+2.4)\times 4.2 = 8.4$ ตร.นิ้ว

(สำหรับโจทย์ข้อนี้จะขอแนะนำแต่เฉพาะวิธีสร้างเท่านั้น ส่วนการสร้างรูปจริงนั้นจะทิ้งไว้ให้นักเรียนสร้างเอาเอง)

5/71 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจากสิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดให้ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD แต่ให้มีด้านยาวเป็นเซ็น-ติเมตร

จงเขียนรูปให้ถูกต้อง แล้ววัดสิ่งที่จำเป็น แล้วให้หาเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ (H & S 5/113)

วิธีสร้าง เหมือนข้อ 4

ถ้าวัดดูจะได้ BD ยาว 8.5 ซม.

และระยะตั้งฉากจาก C มายัง BD = 4.1 ซม.

$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2}$ ฐาน × สูง

$= \frac{1}{2}(8.5 \times 4.1) = 17.43$ ตร.ซม.

น.ท. ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

$= \frac{1}{2} AD.AB = \frac{1}{2}(3.6 \times 7.7)$

$= 13.86$ ตร.ซม.

$\therefore$ นท. ของ ABCD $= \triangle BCD + \triangle ABD$

$= 31.29$ ตร.ซม.

6/71 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คือ ให้ AB และ CD เป็นด้านคู่ขนาน

AB = 4 นิ้ว AD = BC = 2 นิ้ว

มุม A = มุม B = 60°

จงวัดแต่ส่วนที่จำเป็น และคำนวณหาพื้นที่

(H & S 6/113)

วิธีสร้าง ลาก AB ยาว 4 นิ้ว (ในรูป $1'' = 1$ ซม)

ที่ A และ B ทำมุม BAD และ $\hat{ABD} = 60^\circ$

ทำ $AD = BC$ ให้ยาว $2''$

ลาก CD

แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่ต้องการ

วิธีคำนวณ ลาก DE ให้ตั้งฉากกับ AB

ถ้าวัดดูจะได้ $DE = 1.73''$ (1.73 ซม.ในรูป)

และ CD ยาว $2''$

$\therefore$ เนื้อที่ $= \frac{1}{2} DE (AB + CD)$

$= \frac{1}{2} (1.73) (2 + 4)$ ตร.นิ้ว

$= 5.19$ "

7/71 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ AB และ CD เป็นด้านคู่ขนาน $AB=9$ ซม., $CD = 3$ ซม., และ $AD = BC = 5$ ซม. วัดแต่ส่วนที่จำเป็น แล้วคำนวณหาพื้นที่

(H & S 7/113)

วิธีสร้าง สร้าง $\triangle$ BCP ให้ BP ยาว 6 ซม.

$BC = PC = 5$ ซม. ต่อ BP ไปถึง A

ทำ $PA = 3$ ซม.

$\therefore BA = 6 + 3 = 9$ ซม.

ที่ C ลาก CD // AB และยาว 3 ซม.

ลาก AB

แล้ว ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมคางหมูที่ต้องการ

[มาตราส่วนที่เขียนลดครึ่งตัว]

พิสูจน์ ∴ CD เท่าและขนานกับ PA (สร้าง)

∴ AD ,, ,, CP (ท.บ. 20)

∴ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

∴ AD = CP = BC = 5 ซม. (ท.บ. 21)

PA = CD = 3 ซม. (,, ,,)

∴ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่ต้องการ

8/71 โจทย์ จากสูตร พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า = $\frac{1}{2}$ เส้นทะแยงมุม × (ผลบวกของเส้นกิ่ง) จงพิสูจน์ว่า ถ้าเส้นทะแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ากัน = $\frac{1}{2}$ (ผลคูณของเส้นทะแยงมุม) (H & S 8/113)

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = $\frac{1}{2}$ × AC × BD

พิสูจน์ $\therefore$ เส้น Offsets คือ เส้นที่ลากจากจุดมุมมาตั้งฉากกับเส้นทะแยงมุม

ถ้า BD และ AC ตัดตั้งฉากที่ O

$\therefore$ BO, DO เป็น Offsets ที่ลากจาก B และ D มายัง AC

$$\therefore \text{พื้นที่ ABCD} = \frac{1}{2}\,AC\,(BO + OD)$$
$$= \frac{1}{2}\,AC \times BD$$

9/71 โจทย์ กำหนดความยาวของเส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า และมุมที่เส้นทะแยงมุมตัดกันให้ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าไม่ว่าเส้นทะแยงมุมจะตัดกันที่ไหนก็ตาม พื้นที่ของสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นเหล่านั้นย่อมเท่ากันหมด (H & S 9/113)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า AC และ BD เป็นเส้นทะแยงมุมที่มีความยาวคงที่ และตัดกันเป็นมุม BOC ที่คงที่เสมอ

จะต้องพิสูจน์ ไม่ว่า AC และ BD จะตัดกันอย่างไรก็ตาม ABCD มีเนื้อที่คงที่เสมอ

พิสูจน์ ลาก PAS, QCR ให้ผ่าน A

และต่างขนานกับ BD ตามลำดับ

ลาก PDQ, SBR ให้ผ่าน B

และต่างขนานกับ AC ,,

∴ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ไม่ว่า BD จะตัด AC ที่ใดก็ตาม ถ้า AC และ BD คงที่ และมุม BOC คงที่ด้วยแล้ว สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS จะเป็นสี่เหลี่ยมที่คงที่เสมอ (ให้นักเรียนลองวาดรูปดูหลาย ๆ รูป)

∴ $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}$ $\square$ ACRS

และ $\triangle$ ACD $= \frac{1}{2}$ $\square$ ACQP

บวกกันจะได้ ABCD $= \frac{1}{2}$ PQRS

แต่ PQRS มีค่าคงที่

∴ ABCD คงที่ด้วย

แบบฝึกหัด

ว่าด้วยการหาเนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยมตรง

ว. – ร. หน้า 76

1/76 โจทย์ จงคำนวณหาพื้นที่ของรูป (i) และ (ii) จากแผนผังและขนาด (เป็นเซ็นติเมตร) ข้างล่างนี้

(i) AC = 6 ซม. AD = 5 ซม. ความยาวของเส้นกิ่งตั้งในรูป

(ii) AB = BD = DA = 6 ซม.

EY = CZ = 1 ซม. DX = 5.2 ซม.

(H & S 1/115)

วิธีคำนวณ (i) ดูรูปซ้ายมือ

$\triangle$ AED $= \frac{1}{2}(3\times5) = 7.5$ ตร. ซม.

$\triangle$ ADC $= \frac{1}{2}(4\times6) = 12$,,

$\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}(2\times6) = 6$,,

รวมกันจะได้เนื้อที่ทั้งหมด $= 25.5$,,

วิธีคำนวณ (ii) ดูรูปขวามือ

$\triangle^{s}$ ADE, BCD มีฐาน AD = BD และมีส่วนสูง

EY = CZ

$\therefore \quad \triangle ADE = \triangle BCD$ โดยเนื้อที่

$\therefore$ เนื้อที่ของ $AEDCB = \triangle ABD = \frac{1}{2}(6 \times 5.2)$

$= 15.6$ ตร. ซม.

2/76 โจทย์ จากแผนผังและขนาดที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ จง เขียนรูปให้ได้ขนาดเต็มที่ และคำนวณหาพื้นที่ของรูปหนึ่ง ๆ ด้วย (H & S 2/115)

(i) รูปนี้มีด้านเท่ากันทุกด้านด้านละ $2\frac{1}{2}''$

(ii) $AX = 1\frac{1}{4}''$ $XY = 2\frac{3}{4}''$, $YB = 1\frac{3}{4}''$

วิธีคำนวณ (i) ดูรูปซ้าย

จตุรัส $AEDB = 2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 6.25$ ตร.นิ้ว

$\triangle BDC = \frac{1}{2}(2.5 \times 2.16) = 2.7$,,

บวกกันจะได้เนื้อที่ทั้งหมด $= 8.95$,,

วิธีคำนวณ (ii) ดูรูปขวา

$\triangle AXD = \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2}\right) = 1.5625$ ตร.นิ้ว

$\triangle CYB = \frac{1}{2}\left(1\frac{3}{4} \times 2\right) = 1.75$,,

สี่เหลี่ยมคางหมู $DXYC = \frac{1}{2}(DX + CY)$

$= \frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2} = 6.1875$,,

บวกกันจะได้เนื้อที่ทั้งหมด

$= (1.5625 + 1.75 + 6.875) = 9.5$,,

3/76 โจทย์ จงหาพื้นที่ของรูป ABCDEF จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และเขียนแผนผังมาให้ดูด้วย โดยกำหนด 1 ซม. แทน 20 เมตร (H & S 3/115)

	เมตร	
	ถึง C	
	180	
80 ถึง D	150	
40 ถึง E	120	50 ถึง B
60 ถึง F	50	
	จาก A	

วิธีคำนวณ

$\triangle$ AXF $= \frac{1}{2}$ AX.XF $= \frac{1}{2}\times 50\times 60 = 1500$ ตร.ม.

$\triangle$ AYB $= \frac{1}{2}$ AY.YB $= \frac{1}{2}\times 120\times 50 = 3000$,,

$\triangle$ CYB $= \frac{1}{2}$ CY.YB $= \frac{1}{2}\times 60\times 50 = 1500$,,

$\triangle$ CDZ $= \frac{1}{2}$ CZ.ZD $= \frac{1}{2}\times 30\times 80 = 1200$,,

สี่เหลี่ยมคางหมู AZYE $= \frac{1}{2}$YZ (DZ + EY)

$= \frac{1}{2}\times 30\times 120 = 1800$,,

,, ,, EYXF $= \frac{1}{2}$XY (EY + FX)

$= \frac{1}{2}\times 70\times 100 = 3500$,,

รวมกันจะได้เนื้อที่ทั้งหมด $= 12500$,,

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

ว - ร หน้า 78

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

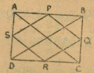
1/78 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง มีรูป PQRS สร้างขึ้นจากจุดกึ่งกลางของ ด้าน ทั้งสี่โดย ลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(i) PQRS เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

(ii) พื้นที่ของ PQRS เป็นครึ่งหนึ่งของ ABCD

(iii) แล้วแสดงให้เห็นว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทะแยงมุม

(iv) ผลอันนี้จะเป็นความจริง หรือสำหรับเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ตัดกันเป็นมุมฉาก ให้อธิบายโดยวิธีเขียนรูป (H & S 1/116)



พิสูจน์ (i) SP หรือ QR เท่ากับ $\frac{1}{2}$BD (ข้อ 3/168)

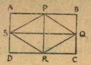
และ PQ หรือ RS เท่ากับ $\frac{1}{2}$AC

แต่ $\because$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น เส้นทะแยงมุม $AC =$ เส้นทะแยงมุม BD (ข้อ 5/156)

$\therefore SP = QR = PQ = RS$

$\square$ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



พิสูจน์ (ii)

$\because AD$ เท่าและขนานกับ BC

$\therefore \frac{AD}{2}$,, ,, $\frac{BC}{2}$

$\therefore AS$,, ,, BQ

$\therefore AB$,, ,, QS (ท บ. 20)

$\therefore$ ABQS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

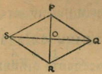
$\therefore \triangle PSQ = \frac{1}{2} \square ABQS$ (ท.บ. 25)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle SQR = \frac{1}{2} \square SQCD$ (,,)

บวกกันจะได้ $\square PQRS = \frac{1}{2} \left[ABQS + SQBD\right]$

$= \frac{1}{2} \square ABCD$



พิสูจน์ (iii)

เราพิสูจน์ได้ว่า PR กับ QS ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด O

$\therefore$ พื้นที่ $\square$ PQRS $= \triangle$ PQS $+ \triangle$ QRS

$$= \frac{1}{2} SQ \times (PO \times OR)$$

$$= \frac{1}{2} SQ \times PR$$

$\therefore$ พื้นที่ $\square$ ขนมเปียกปูน = ครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทะแยงมุม

(iv) จริง

เพราะถ้า EFGH เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ามีเส้นทะแยงมุม EG และ HF ตัดตั้งฉาก

$\therefore$ พื้นที่ $\square$ EFGH $\triangle$ EGH $+ \triangle$ EFG

$$= \frac{1}{2} EG \times (FN + NH)$$

$$= \frac{1}{2} EG \times FH$$

$\therefore$ รูป $\square$ ซึ่งมีเส้นทะแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก มีวิธีหาพื้นที่ได้อย่างเดียวกับวิธีหาพื้นที่สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

2/78 โจทย์ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม เส้นใดเส้นหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมรูปนั้นแล้ว จงแสดงให้เห็นว่าสี่เหลี่ยมด้านขนานถูกแบ่งครึ่ง อย่างไรด้วยเส้นตรงที่ลาก

(i) ผ่านจุด P ที่กำหนดให้

(ii) ตั้งได้ฉากกับด้าน AB

(iii) ขนานกับด้าน QR ที่กำหนดให้ (H & S 2/116)

ให้ ABCD เป็น □ ด้านขนาน RS เป็นเส้นลากผ่านจุด X ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของ BD

วิธีสร้าง ลาก AM ⊥ DC

ลาก CN ⊥ AB

พิสูจน์ ใน Δ^s ADM, BCN

$$\because \begin{cases} AD = BC & (\text{ท.บ. } 21) \\ A\hat{M}B = B\hat{N}C & (\text{มุมฉาก}) \\ A\hat{D}M = C\hat{B}N & (\text{ท.บ. } 21) \end{cases}$$

$\therefore \Delta\ ADM = \Delta\ BCN$ (ท.บ. 17)

$\therefore AM = CN$

ใน Δ^s BXR, DXS

$$\therefore \begin{cases} \angle BRX = \angle XSD & (\text{ท.บ. } 14) \\ \hat{RXB} = \hat{SXD} & \\ BX = DX & (\text{บทแทรก ท.บ } 21) \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle RXB = \triangle DXS$ ทุกประการ

$\therefore$ $BR = DS$

แต่ $AB = CD$ (ท.บ. 21)

ลบกันจะได้ $AR = CS$

พื้นที่ $\square$ คางหมู $ARSD = \frac{1}{2} \times AM \times (AR + DS)$

พื้นที่ $\square$ คางหมู $BCSR = \frac{1}{2} \times CN \times (BR + CS)$

$\therefore$ พื้นที่ $\square$ คางหมูทั้ง 2 รูปนี้เท่ากัน

นั่นคือ RS แบ่งครึ่ง ABCD ออกเป็น 2 รูปเท่าๆกัน

ข้อสังเกต ข้อ 2 ตอน (i) วิธีสร้าง ลาก PX และต่อเลยไปตัด AD, BC ที่ S และ R และ RS จะแบ่ง ABCD ออกเป็นสองส่วนตามต้องการ วิธีพิสูจน์ดำเนินแบบเดียวกับ ข้อ 2

ข้อ 2 ตอน (ii) วิธีสร้าง ลาก RS ให้ผ่าน X และตั้งฉากกับ AB

ข้อ 2 ตอน (iii) ลาก ST ให้ผ่าน X และขนานกับ QR

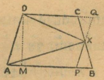
(วิธีลาก ST ให้ขนานกับ QR ให้ทำดังนี้ คือ
ลาก XY ให้ตัด QR ที่ Y ลาก ST ทำมุม
$\hat{QYX} = \hat{YXT}$ แล้ว ST จะเป็นเส้นขนาน
กับ QR และแบ่งครึ่ง ABCD ที่ต้องการ)

ส่วนการพิสูจน์นั้นก็อย่างตามที่พิสูจน์มาแล้ว
ในตอนแรกแห่งข้อนี้

3/79 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD, AB ขนานกับ DC และ X เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC ที่ X ลาก PQ ขนานกับ AD ไปพบ AB และ DC ซึ่งถูกต่อออกไปแล้วที่จุด P และจุด Q จงพิสูจน์ว่า

1. □ คางหมู ABCD = พื้นที่ □ ด้านขนาน APQD
2. □ คางหมู ABCD = สองเท่าของพื้นที่ △ AXD

สร้าง ลาก DM ⊥ AB



พิสูจน์ (1)

$$\therefore \begin{cases} XB = XC & \text{(โจทย์)} \\ \hat{PXB} = \hat{CXQ} & \text{(ท.บ. 3)} \\ \hat{XPB} = \hat{CXQ} & \text{(ท.บ. 14)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle PXB = \triangle CXQ$

$\because PB = CQ$

พื้นที่ □ คางหมู ABCD $= \frac{1}{2} DM \times (AB+DC)$

$= \frac{1}{2} DM \times (AP+PB+DC)$

$= \frac{1}{2} DM \times (AP+CQ+DC)$

$= \frac{1}{2} DM \times (AP+DQ)$

$AP = DQ$ (ท.บ. 21)

$\therefore$ พื้นที่ □ คางหมู ABCD $= \frac{1}{2} DM \times (AP+AP)$

$= \frac{1}{2} DM \times 2AP$

$= DM \times AP$

แต่พื้นที่ □ ด้านขนาน APQD $= DM \times AP$

$\therefore$ พื้นที่ □ คางหมู ABCD = พื้นที่ □ ด้านขนาน APQD

พิสูจน์ (2) △ AXD กับ □ ด้านขนาน ABCD ตั้งอยู่บนฐาน AD และอยู่ในระหว่างเส้นขนาน AD กับ BC คู่เดียวกัน

$\therefore$ พื้นที่ △ AXD = $\frac{1}{2}$พื้นที่ □ ด้านขนาน APQD

= $\frac{1}{2}$พื้นที่ □ คางหมู ABCD

นั่นคือ พื้นที่ □ คางหมู ABCD

= 2 เท่าของพื้นที่ △ AXD

[เกี่ยวกับการสร้าง]

4/79 โจทย์ เส้นทะแยงมุม ทั้งสองของ สี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่า ตัดกันเป็นมุมฉาก และวัดเส้นทะแยงมุมได้ยาว 3.0 นิ้ว และ 2.2 นิ้ว ตามลำดับ จงหาพื้นที่และเขียนรูปแสดงให้เห็นว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่าเท่ากันเสมอไป ไม่ว่าเส้นทะแยงมุมจะตัดกันเป็นมุมฉากที่ใดก็ตาม (H&S 4/116)

วิธีคำนวณ ดูรูปข้อ 1 ตอน 4 ให้ EFGH เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า มีเส้น ทะแยงมุม EG และ HF ตัด กันตั้งฉาก

$\therefore$ พื้นที่ EFGH $= \frac{1}{2}$ EG $\times$ FH (ดูข้อ 1 ตอน 4)

$= \frac{1}{2}(3.0 \times 2.2)$ ตร.นิ้ว

$= 3.3$,,

ตอน 2 ดูข้อ 9 หน้า 71

5/80 โจทย์ สี่เหลี่ยม ด้านขนาน ABCD, AB = 8.0 ซม. AD = 3.2ซม. และเส้นตั้งฉากระหว่างด้าน AB และ DC เท่ากับ 3.0 ซม. จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงคำนวณหาระยะระหว่าง AD และ BC และสอบผลดูโดยวิธีวัด (H & S 5/116)

วิธีสร้าง ลากเส้นตรง AB ให้ยาว 8.0 ซม.

ลากเส้นขนานกับ AB และให้ห่างจาก AB 3 ซม.

เอา A และ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 3.2 ซม.

เขียนวงกลมตัดเส้นขนานที่ D และ C

แล้ว ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

วิธีคำนวณ ให้ x เป็นระยะทางระหว่าง AD และ BC

น.ท. ของ ABCD เมื่อคิด AB เป็นฐาน $= \frac{1}{2}$ AB

(ระยะตั้งฉากระหว่าง AB,DC) $= 8 \times 3$ ตร.ซม.

น.ท. ของ ABCD เมื่อคิด AD เป็นฐาน $= \frac{1}{2}$ AD

(ระยะตั้งฉากระหว่าง AD,BC) $= (3.2 \times x)$ ตร.ซม

$\therefore (3.2 \times x) \qquad = 8 \times 3$

$\therefore \quad x \qquad = 7.5$ ซม.

$\therefore$ ระยะตั้งฉากระหว่าง AD,BC ยาว 7.5 „

(สำหรับการสร้างรูปให้นักเรียนสร้าง และวัดดูเอง เพราะได้บอกวิธีทำให้แล้ว)

6/79 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีด้าน ๆ หนึ่งยาว 2.5 นิ้ว และเส้นทะแยงมุมทั้งสองยาว 3.4 นิ้ว และ 2.4 นิ้ว แล้ววัดแต่ส่วนที่จำเป็น คำนวณหาพื้นที่ (H & S 6/116)

วิธีสร้าง สร้าง $\triangle ABO$ ให้มีด้าน $AB = 2.5''$, $AO = 1.7''$
และ $BO = 1.2''$ (บ.ส. 8)
ต่อ AO,BO ถึง C และ D ทำ $AO = OC$, $BO = OD$
ลาก AD, DC, CB แล้ว ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle^s$ AOB, COD

$$\because \begin{cases} AO = OC & (\text{สร้าง}) \\ BO = OD & (\;,,\;) \\ A\hat{O}B = C\hat{O}D & (\text{ท.บ. } 3) \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB = \triangle COD$ (ท.บ. 7)

$\therefore O\hat{A}B = O\hat{C}D$ และ $AB = CD$

$\therefore$ AB เท่าและขนานกับ CD (ท.บ. 14)

$\therefore$ AD เท่าและขนานกับ BC (ท.บ. 20)

$\therefore$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากระหว่าง $AB, DC = 1.44''$

$\therefore$ น.ท. สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$= 2.5 \times 1.44 = 3.6$ ตร.นิ้ว

[มาตราส่วน 1 ซม. = 1 นิ้ว]

7/79 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานตั้งอยู่บนฐาน AB ที่ตายตัว และมีพื้นที่คงตัว

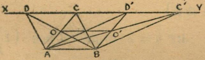
จงหาโลกัสของจุดที่เส้นทะแยงมุมตัดกัน

(H & S 7/116)

กำหนดให้ ให้ ABCD เป็น □ ด้านขนาน มีพื้นที่ตายตัว และมีฐาน AB ตายตัว O เป็นจุดที่เส้นทะแยงมุม AC กับ BD ตัดกัน

จะต้องหา โลกัสของจุด O ซึ่งเคลื่อนที่ไปเมื่อ □ ABCD มีพื้นที่ไม่เปลี่ยนแปลง

หา ลาก OO′ ขนานกับ AB



$\therefore$ OO′ เป็นโลกัสของจุด O

พิสูจน์ $\because$ AO = CO (บทแทรก 3 ท.บ. 21)

$\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \triangle BOC$ (ท.บ. 26)

$= \frac{1}{2} \triangle ABC$

แต่ $\triangle ABC = \triangle ACD$ (ท.บ. 21)

$\therefore \quad \triangle AOB = \frac{1}{4} ABCD$

แต่ ABCD คงที่ (โจทย์)

$\therefore$ $\triangle$ AOB ,, ด้วย

และ $\because$ ฐาน AB คงที่ (โจทย์)

$\therefore$ ส่วนสูงของ $\triangle$ AOB คงที่

$\therefore$ O เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปโดยมีระยะทางห่างจาก AB เท่า ๆ กัน

$\therefore$ โลกัสของ O เดินอยู่บน OO' ที่ลากขนานกับ AB

แบบฝึกหัด ๗–ร หน้า ๙๐

(เกี่ยวกับคำนวณและสร้าง)

1/90 โจทย์ จงเขียนสามเหลี่ยม ABC ให้มุม C เป็นมุมฉาก และมีสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ :

(i) $a = 3$ ซม., $b = 4$ ซม.

(ii) $a = 2.5$ ซม., $b = 6.0$ ซม.

(iii) $a = 1.2$ นิ้ว, $b = 3.5$ นิ้ว

ในข้อหนึ่ง ๆ ให้คำนวณหาความยาวของเส้นทะแยง c และตอบผลโดยการวัด

(H & S 1/121)

วิธีสร้าง (i) ลาก BC ให้ยาว $a = 3$ ซม.

ที่ c ทำมุม $B\hat{C}A = 90^\circ$

และให้ AC ยาว $= b = 1.0$ ซม.

· ลาก AB

แล้ว ABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

ความยาวของเส้นทะแยง $c = \sqrt{a^2+b^2}$ (ท.บ. 29)

$= \sqrt{3^2+4^2}$ ซม.

ตอน (ii) และ (iii) อาจทำได้โดยวิธีเดียวกัน

ตอน (ii) จากผลการคำนวณ c = 6.5 ซม.

ตอน (iii) ,, ,, c = 3.7″

2/90 โจทย์ จงเขียนสามเหลี่ยม ABC ให้มุม C เป็นมุมฉาก และมีสิ่งกำหนดให้ ดังนี้:

(i) c = 3.4 นิ้ว, a = 3.0 นิ้ว (ดูบทสร้างที่ 10)

(ii) c = 5.3 ซม. b = 4.5 ซม.

ในข้อหนึ่ง ๆ ให้คำนวณ หาความยาว ของด้านที่เหลือ และสอบผลดูโดยการวัด

(H & S 2/90)

(สร้างตามวิธีสร้างของ บทสร้างที่ 10 คือ ตัดด้าน AB ให้ยาว c ตามที่กำหนดให้ และแบ่งครึ่งด้าน AB สร้างครึ่งวงกลมบน AB ต่อจากนั้น ก็อาจสร้าง ด้าน BC หรือ AC ได้ตามต้องการ)

จากผลการคำนวณ (i) b = 1.6″

(ii) a = 2.8 ซม.

3/91 โจทย์ บันไดอันหนึ่งวางพาดไปที่ขอบหน้าต่างซึ่งสูงจากพื้นดิน 40 ฟุต และตีนบันไดห่างจากบ้าน 9 ฟุต จงหาความยาวของบันได (H & S 3/112)

จากรูป ให้ x แทนความยาวของบันได

$$x^2 = (40)^2+(9)^2 \text{ ตร. ฟุต}$$

$$= 1681 \quad ,,$$

$$\therefore \quad x = 41 \quad \text{ฟุต}$$

[มาตราส่วนที่เขียนใช้ 1 ฟุต = 1 มม.]

4/91 โจทย์ เรือลำหนึ่งแล่นตรงไปทางทิศใต้ 33 ไมล์ แล้วเลี้ยวไปทางทิศตะวันตกอีก 56 ไมล์ ดังนั้นเรืออยู่ห่างจากที่ตั้งต้นกี่ไมล์

(มาตราส่วน 1 ซม. ต่อ 10 ไมล์)

วิธีทำ ให้ A เป็นที่ตั้งต้น AC เป็นแนวทางตรงไปทางทิศใต้ยาว 33 ไมล์ (3.3 ซม.)

CB เป็นแนวทางมุ่งไปทางทิศตะวันตกยาว 56 ไมล์ (5.6 ซม.)

ทิศเหนือกับทิศตะวันตกทำมุม 90°

$\therefore \hat{C}$ เป็นมุมฉาก ฉาก AB

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 33^2 + 56^2$$
$$= 1089 + 3136$$
$$= 4225$$
$$AB = 56$$

ตอบ ห่างจากที่เดิม 65 ไมล์

5/91 โจทย์ ที่สถานีส่งสัญญาณแห่งหนึ่งมองไปยังเรือ 2 ลำ ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ มีระยะทางห่างจากสถานี 6.0 กม. และ 1.1 กม. ตามลำดับ อยากทราบว่าเรือสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

(H & S 5/121)

(แนวเส้นทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ กับตะวันตกเฉียงเหนือทำมุม 90° ดังนั้นให้ทำตามวิธีในข้อ 4)

6/91 โจทย์ บันไดอันหนึ่งยาว 65 ฟุต พาดขึ้นไปบนบ้านแห่งหนึ่ง ถึงจุดจุดหนึ่งซึ่งสูงจากพื้นดิน 63 ฟุต ตีนบันไดอยู่ห่างจากบ้านเท่าไร? (H & S 6/121)

วิธีทำ ให้ A เป็นชายคาเรือน

AC เป็นความสูงของชายคาจากพื้นดิน

AB เป็นบันได

$\therefore$ AB = 65 ฟุต AC = 63 ฟุต

$\hat{C}$ เป็นมุมฉาก

$CB^2 = AB^2 - AC^2$

$= (65)^2 - (63)^2$

$= 4225 - 3969$

$= 256$

AB $= 16$

ตอบ 16 ฟุต

7/91 โจทย์ B อยู่ทางทิศตะวันออกของ A แต่ไม่ทราบระยะทาง C อยู่ทางทิศใต้ของ B มีระยะทางห่างกัน 55 เมตร AC ห่างกัน 73 เมตร จงหา AB

(H & S 7/121)

วิธีทำ แนวทาง AB กับ BC ทำมุมฉากกัน

$\triangle$ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

มีมุม $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{73^2 - 55^2} \text{ เมตร}$$

$$= 48 \text{ เมตร}$$

[ข้อสังเกต รูปนี้เป็นรูปจำลอง นักเรียนควรเขียนรูปจริงใช้มาตราส่วน 1 ซม. = 10 ม.]

8/91 โจทย์ ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศใต้ 27 ไมล์ แล้วเดินไปทางทิศตะวันตก 24 ไมล์ ในที่สุดเดินไปทางทิศเหนืออีก 20 ไมล์ เขาอยู่ห่างจากที่ตั้งต้นเท่าไร ? (H & S 8/121)

ให้ O เป็นจุดตั้งต้น

OA = 27 ไมล์ AB = 24 ไมล์

และ BC = 20 ไมล์

จะต้องการหา ความยาวของ OC

วิธีหา ลาก CD // AB

$\therefore$ CD = 24 ไมล์

OD = OA − AD = OA − BC = (27−20) ไมล์

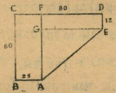
= 7 ไมล์

$$\therefore OC = \sqrt{7^2+24^2}$$

$$= 25 \text{ ไมล์}$$

[รูปนี้เขียนใช้มาตราส่วน 1 ซม. = 1 ไมล์]

9/91 โจทย์ จาก A ไปทางทิศตะวันตก 25 เมตร แล้วไปทางเหนือ 60 เมตร แล้วไปทางทิศตะวันออก 80 เมตร ในที่สุดไปทางใต้ 12 เมตร อยากทราบว่าอยู่ห่างจาก A เท่าไร? (H & S 9/121)



วิธีทำ ใช้มาตราส่วนย่อ 1 ซม. ต่อ 10 เมตร

ลาก AB ยาว 2.5 ซม ลาก BC ยาว 6 ซม. ตั้งฉากกับ AB ลาก CD ยาว 8 ซม. ตั้งฉากกับ BC ลาก DE ยาว 1.2 ซม. ตั้งฉากกับ CD ดังในรูป ลาก AE ลาก AF⊥CD ลาก EG⊥AF โดยการสร้างจะได้ □ ABGF และ □ EFGD เป็น □ ผืนผ้า

$\therefore$ AB = CF = 2.5 ซม.

BC = AF = 6.0 ซม.

$\therefore$ FD = 5.5 ซม. และ EG = 5.5 ด้วย

$\therefore$ DE = 1.2

$\therefore$ FG = 1.2

ดังนั้น AG = 4.8

$\triangle$ AGE เป็นสามเหลี่ยม มี $\hat{G}$ เป็นมุมฉาก

$$AE^2 = AG^2 + EG^2$$

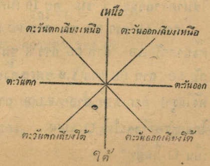
$$= (4.8)^2 + (5.5)^2$$

$$= 23.04 + 30.25$$

$$= 53.29$$ ตาราง ซม.

AE = 7.3 ซม.

$\therefore$ ท่านอยู่ห่างจากที่เดิม 73 เมตร



หมายเหตุ ในแบบฝึกหัดที่แล้วนี้ มีโจทย์หลายข้อที่กล่าวถึง เรื่องทิศ ดังนั้นจึงควรทำความเข้าใจในเรื่องทิศไว้พอสังเขป ดังนี้

ก. ถ้าเราดูรูปทิศสำคัญ 8 ทิศ จะเห็นว่ามุม 8 มุมๆละเท่ากัน แขนของมุมแยกออกจากจุด ๆ เดียวกัน มุมรอบจุดย่อมเท่ากับ 360 องศา ดังนั้นมุมหนึ่ง ๆ ย่อมเท่ากับ 45° เพราะฉะนั้นแนวทางของทิศสำคัญ 2 ทิศ ซึ่งแนวทางทิศสำคัญอีกทิศหนึ่งอยู่กลาง ผ่านทำมุม 90° เช่นทิศเหนือกับทิศตะวันออก หรือตะวันออกเฉียงเหนือกับทิศตะวันตกเฉียงเหนือ เป็นต้น.

ข. แนวทางเดินซึ่งเดียว เป็นทิศที่ประกอบ 90° ต้องสร้างแนวทางขึ้น โดยถือการหักเป็นมุม 90 จากแนวทางเดิม เช่นในข้อ 7 ของแบบฝึกหัดที่แล้วมา

10/91 โจทย์ บันไดอันหนึ่งยาว 50 ฟุต วางพาดไปถึงหน้าต่างซึ่งสูง 48 ฟุต และหันปลายบันไดไปยังอีก

ฟากหนึ่งของถนน ถึงจุด ๆ หนึ่งซึ่งอยู่สูงจาก
พื้นดิน 14 ฟุต จงหาว่าถนนกว้างเท่าไร ?

(H & S 10/121)

กำหนดให้ AB, DE เป็นกำแพงสูง $48'$ และ $14'$

AB, CD เป็นบันไดยาวด้านละ 50 ฟุต

จะต้องการหา ความยาวของถนน BE

วิธีหา ใน $\triangle$ มุมฉาก ABC

$BC^2 = AC^2 - AB^2$ (ท.บ. 29)

$= 50^2 - 48^2$

$= 196$ ฟุต

$\therefore BC = 14$ „

ใน $\triangle$ มุมฉาก DCE

$CE^2 = CD^2 - DE^2$

$= 50^2 - 14^2$

$= 2304$

$\therefore CE = 48$ ฟุต

$\therefore BE = BC + CE$

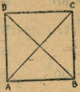
$= 14 + 48$ „

$= 62$ „

แบบฝึกหัด ว–ร หน้า 95

1/95 โจทย์ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้จะเป็น 2 เท่าของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสนั้น (H & S 1/123)

ให้ ABCD เป็น □ จตุรัส มี AC เป็นเส้นทะแยงมุม



จะต้องพิสูจน์ว่า $AC^2 = 2\,AB^2$

พิสูจน์ $\because AB = BC$

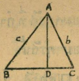
$\therefore AB^2 = BC^2$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= AB^2 + AB^2 \\ &= 2AB^2 \end{aligned}$$

(คุณสมบัติของสี่เหลี่ยมจตุรัส)

2/95 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC, AD ตั้งฉากกับฐาน BC ถ้าด้าน c ยาวกว่าด้าน b จงพิสูจน์ว่า

$$c^2 - b^2 = BD^2 - DC^2 \quad (H \;\&\; S\; 2/123)$$



พิสูจน์

$$\because AD^2 + BD^2 = AB^2$$

$$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - BD^2$$

$$AD^5 + DC^2 = AC^2$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 - DC^2 = b^2 - DC^2$$

ดังนั้น $c^2 - BD^2 = b^2 - DC^2$

$$\therefore c^2 - b^2 = BD^2 - DC^2$$

3/95 โจทย์ ถ้า O เป็นจุดหนึ่งจุดใดในรูปสามเหลี่ยม ABC, XO, OY และ OZ ลากไปตั้งฉากกับ BC, CA และ AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BZ^2$$

(H & S 3/123)

พิสูจน์ ใน $\triangle$ AOZ มี $\widehat{AZO}$ = 1 มุมฉาก

$\therefore OZ^2 = OA^2 - AZ^2$
โดยทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า
$OZ^2 = OB^2 - BZ^2$ (1)

$OX^2 = OB^2 - BX^2$
$OX^2 = OC^2 - CX^2$ (2)

$OY^2 = OC^2 - CY^2$
$OY^2 = OA^2 - AY^2$ (3)

ดังนั้นจากสมการคู่ที่ 1 เราได้

$OA^2 - AZ^2 = OB^2 - BZ^2$ ......(5)

จากสมการคู่ที่ 2

$OB^2 - BX^2 = OC^2 - CX^2$ ......(6)

จากสมควรคู่ที่ 3

$OC^2 - CY^2 = OA^2 - AY^2$ ......(7)

(5+(6)+(7) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - AZ - {}^2BX^2 - CY^2$

$= OB^2 + OC^2 + OA^2 - BZ^2 - CX^2 - AY^2$

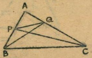
หักส่วนที่เท่ากันออกเสียทั้ง 2 ข้าง

$-AZ^2 - BX^2 - CY^2 = -AY^2 - CX^2 - BZ^2$

$\therefore AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$

4/95 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมีมุม A เป็นมุมฉาก PQ เป็นเส้นตรงที่ลากตัดด้าน AB, AC และลากเส้น BQ, PC จงพิสูจน์ว่า

$$BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2 \quad (H \& S\ 4/123)$$



พิสูจน์ $\because PC^2 = AP^2 + AC^2$ (ท.บ. 29)

$BQ^2 = AB^2 + AQ^2$

$\therefore BQ^2 + PC^2 = AB^2 + AC^2 + AP^2 + AQ^2$

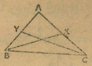
แต่ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

และ $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$

$\therefore$ โดยการแทนค่าเราจะได้

$BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$

5/95 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง สี่เท่าของผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นมีเดียน ซึ่งลากจากมุมแหลมทั้งสอง เท่ากับห้าเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนเส้นทะแยง (H & S 5/123)



ให้ ABC เป็น $\triangle$ มี $\hat{A} = 1$ มุมฉาก

ให้ BX กับ CY เป็นเส้นมีเดียน

จะต้องพิสูจน์ว่า $4(BX^2+CY^2) = 5\ BC^2$

พิสูจน์ BX^2	$= AB^2+AX^2$	(ท บ. 29)
CY^2	$= AC^2+AY^2$	(,, ,,)
$\therefore\ BX^2+CY^2$	$= AB^2+AC^2+AX^2+AY^2$	
ดังนั้น $4(BX^2+CY^2)$	$= 4\ AB^2+4\ AC^2+4\ AX^2+4AY^2$	
$\because\ AY$	$= \frac{1}{2}\ AB$	(โจทย์)
AY^2	$= \frac{1}{4}\ AB^2$	
$4\ AY^2$	$= AB^2$	
และ AX	$= \frac{1}{2}\ AC$	
AX^2	$= \frac{1}{4}\ AC$	
$4\ AX^2$	$= AC^2$	
$\therefore\ 4(BX^2+CY^2)$	$= 4\ AB^2+4\ AC^2+AB^2+AC^2$	
	$= 5\ AB^2+5\ AC^2$ ....(A)	

แต่ $\because BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ท.บ. 29)

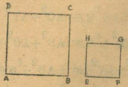
$\therefore 5\,BC^2 = 5\,AB^2 + 5\,AC^2$

แทนค่าใน (A) จะได้

$4(BX^2+CY^2) = 5\,BC^2$

6/95 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับ ผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสทั้งสองที่กำหนดให้

(H & S 6/123)



ให้ ABCD และ EFGH เป็น □ จตุรัส 2 รูป

จะต้องสร้าง □ จตุรัส PQRS ให้มีพื้นที่เท่ากับ พื้นที่ □ จตุรัส ABCD + พื้นที่ □ จตุรัส EFGH

สร้าง ลาก ST ให้ยาวเท่ากับ AB และ PS ยาวเท่ากับ EF และให้ตั้งฉากกับ ST ลาก PT

สร้าง □ จตุรัส PQRT บน PT

$\therefore$ PQRT เป็น □ จตุรัสที่ต้องการ

พิสูจน์ พื้นที่ □ จตุรัส ABCD $= AB^2 = TS^2$

พื้นที่ □ จตุรัส EFGH $= EF^2 = PS^2$

ใน $\triangle$ PST

$\therefore PT^2 = TS^2 + PS^2$

แต่พื้นที่ □ จตุรัส PQRT $= PT^2$

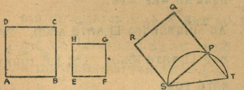
$\therefore$ พื้นที่ □ จตุรัส PQRT $= TS^2 + PS^2$

$= AB^2 + EF^2$

= พื้นที่ □ จตุรัส ABCD + พื้นที่ □ จตุรัส EFGH

7/95 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับผลต่างของสี่เหลี่ยมจตุรัสทั้งสองที่กำหนดให้

(H & S 7/123)



ให้ ABCD และ EFGH เป็น □ จตุรัส 2 รูป จะต้องสร้าง □ PQRS ให้มีพื้นที่เท่ากับผลต่างของสี่เหลี่ยมจตุรัส ABCD กับ EFGH

สร้าง ลาก ST ให้ยาวเท่ากับ AB สร้างครึ่งวงกลมบน ST เอา T เป็นจุดศูนย์กลางใช้รัศมี EF เขียนส่วนโค้งตัดเส้นรอบวงที่จุด P ลาก PS และ PT สร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส PQRS บน PS

∴ □ จตุรัส PQRS เป็นรูป □ ที่ต้องการ

พิสูจน์ เพราะว่าการสร้างทำตามวิธีบทสร้างที่ ๑๐

∴ △ PST เป็น △ มุมฉาก มี $\hat{P}$ เป็นมุมฉาก

และ $TP = EF$, $ST = AB$

$$ST^2 = PT^2 + PS^2$$

$$\therefore \quad ST^2 - PT^2 = PS^2$$

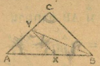
ดังนั้น $AB^2 - EF^2 = PS^2$

∵ AB^2 เป็นพื้นที่ของ □ จตุรัส ABCD, EF^2 เป็นพื้นที่ □ จตุรัส EEGH และ PS^2 เป็นพื้นที่ □ จตุรัส PQRS

∴ พื้นที่ □ จตุรัส PQRS = พื้นที่ □ จตุรัส ABCD − พื้นที่ □ จตุรัส EFGH

ซ.ต.พ.

8/97 โจทย์ จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งออกเป็นสองส่วน ให้สี่เหลี่ยมจตุรัสบนส่วนหนึ่ง เท่ากับสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง. (H & S 8/123)



ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จะต้องการแบ่ง เส้นตรง AB ออกเป็น 2 ส่วนที่ X และให้ได้ผลว่า $AX^2 = 2BX^2$

สร้าง ทำ $\hat{BAC}$ และ $\hat{ABC}$ ให้เท่ากันและต่างเท่ากับมุมละ 45° ให้แขนของมุมพบกันที่จุด C

โดยอาศัย ท.บ. 16 เราพิสูจน์ได้ว่า

ลาก BY แบ่งครึ่งมุม $\hat{ABC}$ ให้พบ AC ที่จุด Y

ลาก YX ขนานกับ BC พบ AB ที่จุด X

$\therefore$ X เป็นจุดที่ต้องการซึ่งมี $AX^2 = 2BX^2$

พิสูจน์ $\because$ $\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 45^\circ + 45^\circ + \hat{ACB} = 180^\circ$

$\therefore$ $\hat{ACB} \qquad = 90^\circ$

$\because$ XY // BC มี BY ลากผ่าน

$\therefore$ $\hat{XYB} = \hat{YBC}$ (ท.บ. 14)

แต่ $\hat{YBC} = \hat{YBX}$ โดยสร้าง

$\therefore \quad \hat{XYB} = \hat{YBX}$

ดังนั้น $\quad XY = BX$ (ท.บ. 6)

$\because XY \,//\, BC$ มี AB ตัดผ่าน

$\therefore \hat{AXY} = \hat{XBC} = 45^\circ$

ดังนั้น $\hat{AXY} = \hat{XAY} = 45^\circ$

$\therefore \quad AY = XY$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $AY = YX = BX$

และ $AY^2 = YX^2 = BX^2$

$\because XY \,//\, BC$ มี AC ตัดผ่าน

$\therefore \hat{AYX} = \hat{YCB} = 90^\circ$

ดังนั้น $AX^2 = AY^2 + XY^2$

$= XY^2 + XY^2$

$= 2\,XY^2$

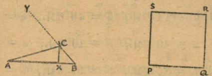
$= 2\,BX^2$

ซ.ต.พ.

9/97 โจทย์ จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งออกเป็นสองส่วน ให้ผลบวกของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนส่วนทั้งสอง เท่ากับ

สี่เหลี่ยมจตุรัสที่กำหนดให้. (H & S 9/123)

ให้ PQRS เป็น □ จตุรัสที่กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้



จะต้องการ แบ่ง AB ที่จุด X

ให้ $AX^2 + BX^2 = PQ^2$

สร้าง ลาก BY ทำมุม ABY $= 45^\circ$

เอา A เป็นจุดกึ่งกลางใช้รัศมี PQ เขียนส่วนโค้งตัด BY ที่จุด C ลาก AC จากจุด C ลาก CX ตั้งฉากกับ AB

$\therefore$ X เป็นจุดที่ต้องการ คือ $AX^2 + XB^2 = PQ^2$

พิสูจน์ ใน $\triangle$ XBC

$\because$ $B\hat{X}C = 90^\circ$ และ $X\hat{B}C = 45^\circ$

$\therefore$ $X\hat{C}B = 45^\circ$

ดังนั้น $CX = BX$ (ท.บ.6)

$\therefore$ $AX^2 + CX^2 = AC^2$ (ท.บ.29)

$\therefore AX^2+BX^2 = PQ^2$ (เพราะ $AC = PQ$ โดยสร้าง)

(เกี่ยวกับคำนวณและการสร้าง)

10/97 โจทย์ จงตรวจดูว่าสามเหลี่ยมไหนมีมุมเป็นมุมฉาก

(i) $a = 14$ ซม., $b = 48$ ซม., $c = 50$ ซม.,

(ii) $a = 40$ ซม., $b = 10$ ซม., $c = 41$ ซม.,

(iii) $a = 20$ ซม., $b = 99$ ซม., $c = 101$ ซม.

(H & S 10/123)

อธิบายวิธีทำ สามเหลี่ยมมุมฉาก ย่อมมีด้านตรงข้ามยาวที่สุด ส่วนสมบัติโดยฉะเพาะของมันย่อมเป็นไปตาม ท บ. 29 หรือ ท บ. 30 ซึ่งเป็นบททกลับกัน อาจทดลองดูได้ เช่น:-

(i) ถ้า $\triangle$ รูปนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$c^2 = a^2 + b^2$

โดยการแทนค่า

$2500 = 196 + 2304$

$= 2500$

$\therefore \triangle$ รูปนี้เป็น $\triangle$ มุมฉากจริง

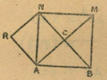
ในข้อ (ii) และข้อ (iii) ก็ทำเช่นเดียวกัน ถ้า

จำนวนทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของสมการไม่เท่ากัน △ รูปนั้นก็ไม่ใช่ △ มุมฉาก

11/97 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุม C เป็นมุมฉาก อาศัยบทพิสูจน์ที่ 29 จงพิสูจน์ว่า

$$AB^2 = 2\,AC^2$$

แสดงผลนี้โดยการเขียนรูป คือสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้าน AB ลากเส้นทะแยงมุมสองเส้นและสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้าน AC ลากเส้นทะแยงมุม เส้นเดียว ถ้า AC = BC = 2 นิ้ว จงหาความยาวของ AB ทศนิยม 2 ตำแหน่ง และตรวจสอบผลที่คำนวณได้โดยสร้างรูปและวัดให้ถูกต้อง (H & S 11/123)



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AC = BC และมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + BC^2$$

แต่ ∵ ABC เป็น △ หน้าจั่ว

$\therefore \quad AC = BC$

$AC^2 = BC^2$

$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + AC^2 = 2\,AC^2$

จากรูปที่สร้างขึ้นอาจพิสูจน์ได้ว่า

จตุรัสบน $AB = 4 \triangle ABC$

หรือ $AB^2 = 4 \triangle ABC \ldots (1)$

เช่นเดียวกัน จตุรัสบน $AC = 2 \triangle ACN$

หรือ $AC^2 = 2 \triangle ACN \ldots (2)$

แต่ $\triangle ACN = \triangle ABC$

$\therefore$ จาก (1) และ (2) $AB^2 = 2\,AC^2$

ถ้า $AC = BC = 2$ นิ้ว

$\therefore \quad AB^2 = 2\,AC^2$

$= (2 \times 4)$ ตร. นิ้ว

$\therefore \quad AB = \sqrt{8}$,,

$= 2.83$,,

12/97 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปหนึ่งให้มีเส้นทะแยงมุมยาว 6 ซม. ให้คำนวณและวัดความยาวของด้านและหาพื้นที่ (H & S 12/123)

วิธีสร้าง ลาก AB = 6 ซม. แบ่งครึ่ง AB ที่ O เอา O เป็นจุดศูนย์กลางเขียนครึ่งวงกลม จาก O ลาก COD ให้ตั้งฉากกับ AB พบเส้นรอบวงที่ C และ D แล้ว ABCD จะเป็นจัตุรัสที่ต้องการ

วิธีคำนวณ ให้ AC = CB = x ซม.

$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2x^2 = 36$

$\therefore \quad x = 4.24$ ซม.

$\therefore$ เนื้อที่ $= x^2 = 18$ ตร.ซม.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 29, 30

(ต่อ) ว - ร หน้า 101

13/101 โจทย์ จงพิสูจน์ เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัส = ด้าน × $\sqrt{2}$ แล้วจงหาความยาวของเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีด้านยาวละ 50 เมตร ให้มีค่าถึงเซ็นติเมตร

จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน 1 ต่อ 10 เมตร) แล้ววัดดูให้ได้ผลลัพธ์ใกล้ที่สุด

(H & S 13/124)

วิธีพิสูจน์ ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส มี BD เป็นเส้นทะแยงมุม ให้ AB = a

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

$\therefore AC = a\sqrt{2}$

เส้นทะแยงมุม $= a\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$

$= 50 \times 1.414$ เมตร

$= 70.71$ ”

14/102 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวด้านละ 2 m หน่วย และความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดไปยังด้านตรงข้าม เท่ากับ p จงพิสูจน์ว่า $p = m\sqrt{3}$

ตรวจผลนี้โดยวาดสร้าง เมื่อด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมยาว 8 ซม. (H & S 14/124)

อธิบาย เราใช้ ท.บ. 18 พิสูจน์ได้ว่า $\triangle ABD = \triangle ACD$

$BD = CD = m$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= 4m^2 - m^2$

$p^2 = 3m^2$

$p = \sqrt{3m^2} = m\sqrt{3}$

15/102 โจทย์ ถ้าในรูปสามเหลี่ยม รูปหนึ่ง $a = m^2 - n^2$ $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ จงพิสูจน์ตามวิธีพีชคณิตว่า $c^2 = a^2 - b^2$

จงหาค่าของ m และ n ซึ่งเมื่อแทนค่าลงในด้านของรูปสามเหลี่ยมแล้ว รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

(H & S 15/124)

วิธีพิสูจน์ $\because a = m^2 - n^2 \quad \therefore a^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$

$\because b = 2mn \quad \therefore b^2 = 4m^2n^2$

$\therefore a^2 + b^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$

$= c^2$

ค่าที่สมมุติมีดังนี้ แล้วทำให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากคือ

เมื่อ $n = 1,\ m = 2$ จะได้ $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$

,, $n = 1,\ m = 3$,, $a = 8,\ b = 6,\ c = 10$

,, $n = 1,\ m = 4$,, $a = 15,\ b = 8,\ c = 17$

,, $n = 5,\ m = 6$,, $a = 11,\ b = 60,\ c = 61$

เป็นต้น

16/102 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC AD เป็นเส้นตั้งฉาก ที่ลากจาก A พบกับ BC และให้ AD ยาว = P

(1) ถ้า $a = 25$ ซม. $p = 12$ ซม. และ BD = 9 ซม. จงหาค่าของ b และ c

(2) ถ้า $b = 41''$ $c = 50''$ BD $= 30''$ จงหาค่าของ p และ a และจงพิสูจน์ว่า

$\sqrt{b^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2} = a$ (H & S 16/125)

(ก) เพราะว่าเรารู้ค่าของ BC แล้วเราจะรู้ค่าของ DC ได้ วิธีทำอื่น เราหาค่าของ b และ c ได้

ก) $b^2 = p^2 + DC^2 = (12)^2 + (16)^2$

และ $c^2 = p^2 + BD^2 = (12)^2 + (9)^2$

โดยวิธีนี้จะได้ $b = 20$ ซม. และ $c = 15$ ซม.

ข) วิธีทำคล้ายข้อ ก. เมื่อได้ค่าของ a กับ p แล้ว เอาไปแทนค่าใน $\sqrt{b^2-p^2} + \sqrt{c^2-p^2} = a$

17/103 โจทย์ ในรูป $\triangle$ ABC AD ตั้งฉากกับ BC จงพิสูจน์ว่า $c^2 - BD^2 = b^2 - CD^2$

จงหาค่าของ BD แล้วหา P ซึ่งเป็นความยาวของ AD และพื้นที่ของ $\triangle$ ABC (H & S 17/125)

อธิบาย โดยอาศัย ท.บ. 29 เราได้

ใน $\triangle$ ABD, $AD^2 = c^2 - BD^2$

ใน $\triangle$ ACD, $AD^2 = b^2 - DC^2$

$\therefore c^2 - BD^2 = b^2 - CD^2$ ....@

ให้ $BD = x \quad \therefore CD = (51 - x)$

แทนค่าลงในสมการ @

จะได้ $37^2 - x^2 = 20^2 - (51-x)^2 \quad \therefore x = 35$

ใน $\triangle$ มุมฉาก ABD $\because AD^2 = AB^2 - BD^2$

$\therefore p^2 = 37^2 - 35^2 = 144 \qquad \therefore p = 12$

$\therefore$ เนื้อที่ $\triangle = \frac{1}{2}$ ฐาน $\times$ สูง $= \frac{1}{2}\,ap$

$= 306$ ตร.ซม.

18/103 โจทย์ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมตามวิธีของ แบบฝึกหัดข้อ 17 โดยกำหนดด้านสามด้านให้

(i) $a = 17''$ $b = 10''$ $c = 9''$

(ii) a = 25 ฟุต b = 17 ฟุต c = 12 ฟุต

(iii) a = 41 ซม. b = 28 ซม. c = 15 ซม.

(iv) a = 40 หลา b = 37 หลา c = 13 หลา

(H & S 18/125)

วิธีทำ โดยแบบเดียวกับข้อ 17 เมื่อกำหนดด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมให้ เราอาจหาค่าของ BD และ P ได้ดังนี้ คือ (ดูข้อ 17)

(i) BD = $7\frac{16}{17}$ นิ้ว, P = $4\frac{4}{17}$ นิ้ว

เนื้อที่ = 36 ตร.นิ้ว

(ii) BD = 9.6 ,, P = 7.2 ,,

เนื้อที่ = 90 ตร.ฟุต

(iii) $BD = 13\frac{28}{41}$ ซม. $P = 12$ ซม.

เนอท $= 126$ ตร.ซม.

(iv) $BD = 5$ หลา, $P = 12$ หลา,

เนอท $= 240$ ตร หลา

19/104 โจทย์ ไม้ตรง PQ วางเลื่อนอยู่ระหว่างไม้บรรทัดตรงสองอัน คือ OX, OY ซึ่งวางเป็นมุมฉากซึ่งกันและกัน ในตำแหน่งหนึ่งของไม้ตรงทำให้ $OP = 5.6$ ซม และ $OQ = 3.3$ ซม. ถ้าในอีกตำแหน่งหนึ่ง $OP = 4.0$ ซม. จงหา OQ โดยวิธีสร้าง และตรวจสอบดูโดยการคำนวณ

(H & S 19/125)

อธิบาย PQ^2 ต้องเท่ากับ OQ^2+OP^2 เสมอ

$\therefore PQ = (3.3)^2 + (5.6)^2$

$= 42.25$

$42.25 = OQ^2 + 16$

$OQ^2 = 26.25$

$OQ = \sqrt{26.25} = 5.12$

20/104 โจทย์ ABC เป็น $\triangle$ มีมุม C เป็นมุมฉาก P เป็น
ความยาว ของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด C มายัง
AB จงอ้างว่าเราหาพื้นที่ของ $\triangle$ ABC ได้ 2 ทาง
แล้วพิสูจน์ว่า PC = AB และแล้วแสดงให้เห็น
อีกว่า $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ (H & S 20/125)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก

CD $\perp$ กับ AB ให้ = CD = p

AC = b BC = a AB = c

พิสูจน์ ตอน 1 พื้นที่ $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}\, a \times b = \frac{1}{2}\, ab$

และพื้นที่ $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}\, p \times c = \frac{1}{2}\, pc$

ดังนั้น $\frac{1}{2}\, pc = \frac{1}{2}\, ab$

$\therefore \quad pc = ab$

ตอน 2 $\quad p^2c^2 = a^2b^2$

$\therefore \quad \frac{1}{p^2c^2} = \frac{1}{a^2b^2}$ ....(1)

$\therefore \quad c^2 = a^2+b^2$ ....(2)

แทนค่า (2) ลงใน (1)

$$\frac{1}{p^2(b^2+a^2)} = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{b^2}{b^2a^2} + \frac{a^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

หมายเหตุ เศษส่วนทุก เศษส่วน อาจแยก ออกเป็น ผลบวก หรือผลลบของ 2 เศษส่วนได้ เช่น:-

$\frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}$ หรือ

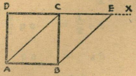
$\frac{5}{9} = \frac{8}{9} - \frac{3}{9}$ หรือ $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$ ฯลฯ

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการสร้าง

ว_ร. หน้า 105

1/105 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสบนด้านยาว 5 ซม. และสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานบนฐานเดียวกันกับให้มีพื้นที่เท่ากับจตุรัสที่กำหนดให้ และมีมุมเท่ากับ 45°

จงหา (i) ด้วยการคำนวณ (ii) ด้วยการวัด ความยาวของด้านเฉียงของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (H & S 1/127)



วิธีสร้าง ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส บนด้านยาว 5 ซม

ต่อ DC ถึง E

ลาก BE // AC ไปพบ DC ต่อออกไปที่ E

แล้ว ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

พิสูจน์ โดยอาศัยบทพิสูจน์ที่ 7 เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle ABC = \triangle ACD$

$\therefore \hat{DAC} = \hat{BAC}$

แต่ $\hat{BAD} = 90^\circ \quad \therefore \hat{BAC} = 45^\circ$

$\therefore$ ABCD และ ABCE เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมีฐาน AB ร่วมกันและอยู่ในระหว่างเส้นขนาน AB, DE เดียวกัน

$\therefore \square ABCD = \square$ ด้านขนาน ABEC (ท.บ. 24)

จากรูป $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 50$ ตร.ซม.

$\therefore \quad AC = 5\sqrt{2} = 7.1$ ซม.

2/107 โจทย์ สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ซึ่งมี AB $= 2\frac{1}{2}$ นิ้ว และ AD = 2 นิ้ว บนฐาน AB จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (H & S 2/127)

วิธีสร้าง สร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้มีด้าน AB, AD ยาว $2\frac{1}{2}''$ และ $2''$ (บทสร้าง 12)

จะได้สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ที่ต้องการ

เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AB เขียนส่วนโค้ง
ตัด CD ที่ F

ที่ B ลาก BE // AF ตัด CD ต่อออกไปที่ E

แล้ว ABEF จะเป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเนื้อที่
เท่ากับ ABCD ที่ต้องการ

พิสูจน์ ∴ สี่เหลี่ยม ABCD, ABEF มีฐาน AB ร่วมกัน
และอยู่ในระหว่างคู่ขนาน AB, DE เดียวกัน จะ
ต้องมีเนื้อที่เท่ากัน (ท.บ. 24)

3/107 โจทย์ จากรูปจงพิสูจน์ด้วยบทพิสูจน์ที่ 21 ว่า รูป
ประกอบสี่เหลี่ยมด้านขนาน EG,HF มีพื้นที่เท่ากัน

ถ้ากำหนดสี่เหลี่ยมด้านขนาน EG และเส้น
ตรง HK ให้ จงเขียนสี่เหลี่ยมด้านขนานบน HK
ให้มีพื้นที่และมุมเท่ากับสี่เหลี่ยมด้านขนาน EG

(H & S 3/127)

พิสูจน์ เราอาจพิสูจน์ได้โดยวิธีนี้ คือ:-

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle\ KGC & = \triangle\ KFC \\ \triangle\ AEK & = \triangle\ AHK \\ \triangle\ ABC & = \triangle\ ADC \end{array}\right\}\ \text{ท.บ. 21}$$

$\therefore \triangle ABC - \triangle KGC - \triangle AEK$

$= \triangle DAC - \triangle KFC - \triangle AHK$

$\therefore \square EBGK \qquad = \square HKFD$

วิธีสร้าง วาง HK,KG ให้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จาก H ลาก HA // KE ตัด BE ต่อออกไปที่ A ลาก AK ให้ตัด BG ต่อออกไปที่ C สร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ต่อ EK ออกไปพบ CD ที่ F แล้ว HF จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

4/107 โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าใหม่พื้นที่เท่ากับ □ ผืนผ้า CDEF ที่กำหนดให้และมีด้าน ๆ หนึ่งเท่ากับเส้น AB ที่กำหนดให้.

ถ้า AB = 6 ซม. CD = 8 ซม. CF = 3 ซม. จงสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้ววัดด้านที่เหลือ

(H & S 4/127)

ให้ CDEF เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามี CD, CF ยาว 8 และ 3 ซม. AB เป็นเส้นตรงยาว 6 ซม.

จะต้องการสร้าง สี่เหลี่ยมผืนผ้าใหม่เนื้อที่เท่ากับ CDEF และให้มีด้านหนึ่งเท่ากับ AB

วิธีสร้าง ต่อ DE ถึง G ทำ EG = AB = 6 ซม.
สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก EGHF ลาก HE และต่อเลยออกไปพบ CD ต่อออกไปที่ K
สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก HCKL ต่อ FE ออกไปพบ KL ที่ M แล้ว EMLG จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการ

วิธีพิสูจน์ ดูข้อ 3.

[มาตราส่วน $\frac{1}{10}'' = 1$ ซม.]

5/108 โจทย์ กำหนดสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มี AB $= 2.4''$, AD $= 1.8''$, และมุม A $= 55^\circ$

จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้มุมทุกมุมและ พื้นที่ เท่ากับ สี่เหลี่ยม ด้านขนาน ที่กำหนดให้ และด้านที่ยาววัดได้ 2.7″ จงวัดด้านที่สั้นกว่า

ให้ทำเช่นเดียวกัน แต่เปลี่ยนค่าของมุม A ให้มีค่าต่าง ๆ แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้ดูและจะเขียนสรุปความว่าอะไร ? (H&S 5/127)

วิธีสร้าง ต่อ BC ถึง K ทำ CK $= 2.7''$
ลาก KL ให้ผ่าน K ขนานกับ BA พบ AD ที่ L

ลาก LC ให้ตัด AB ที่ P

จาก P ลาก PQ // AD ตัด LK ที่ Q

ลาก DC ให้ตัด PQ ที่ R

แล้ว KCRQ จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเนื้อที่

เท่ากับ ABCD ที่ต้องการ

พิสูจน์ เหมือนข้อ 3

[มาตราส่วน 1 ซม. = 1"]

6/109 โจทย์ จงเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนด้านยาว 5 ซม. ให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งสร้างบนด้านยาว 6 ซม.

จงวัดด้านที่เหลือของสี่เหลี่ยมผืนผ้า และคำนวณพื้นที่โดยประมาณ (H & S 6/127)

คำเฉลย ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่ามีด้านยาว 6 ซม.

วิธีสร้าง จาก BC ตัดเอาแต่เพียง BD ให้ยาว 5 ซม.

ลาก AD

จาก C ลาก CE ให้ขนานกับ AD ไปพบ BA

ต่อออกไปที่ E

ลาก DE แล้ว BDE จะเป็น △ มีเนื้อที่เท่ากับ

△ ABC

จาก E ลาก EF ให้ตั้งฉากกับ BD
แบ่งครึ่ง EF ที่ G (บ.ส.1)
ลากเส้นขนานกับ BD ให้ผ่าน G
จาก B และ D ลาก BK, DH ให้ตั้งฉากกับ BD
ไปตัดเส้นขนานที่ K และ H แล้ว BDHK จะเป็น
สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \square BDHK = BD \times FG = BD \times \frac{EF}{2}$

$= \frac{1}{2}$ สี่เหลี่ยมที่มี BD

เป็นฐานและสูง EF

$= \triangle BDE$

แต่เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle BDE$

= สามเหลี่ยมด้านเท่า ABC

$\therefore \square BDHK = \triangle ABC$

$\therefore$ BDHK เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ต้องการ

(สำหรับการวัดด้านที่เหลือและวิธีคำนวณนั้น
ง่ายมาก ให้นักเรียนทำดูเอง)

แบบฝึกหัด

(เกี่ยวกับวิธีแปลงรูปหลายเหลี่ยมให้เป็นรูปสามเหลี่ยม)

ว. – ร. หน้า 113

1/113 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ตามสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ AB = BC = 5.5 ซม.

CD = DA = 4.5 ซม. $\hat{A} = 75^\circ$

จงย่อรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าลงเป็นรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากัน และวัดฐานและส่วนสูงของสามเหลี่ยม แล้วคำนวณหาพื้นที่ของรูปที่กำหนดให้โดยประมาณ (H & S 1/130)

ข้อแนะนำ วิธีสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานใช้บทสร้างที่ 11 เสร็จแล้วย่อสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้ลงเป็นรูปสามเหลี่ยมมีเนื้อที่เท่ากัน โดยใช้บทสร้างที่ 8

ดูรูปหน้า 111 สมมติว่า △ ADX เป็นสามเหลี่ยมที่มีเนื้อที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ถ้าวัดระยะตั้งฉากจาก X มายัง AD จะได้ 10.6 ซม.

∴ น. ท. สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

$= $ น.ท. $\triangle$ ADX

$= \frac{1}{2}(10.6 \times 4.5)$ ตร. ซม.

$= 23.85$ (โดยประมาณ)

2/113 โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD ซึ่งกำหนดให้ $AB = 2.8''$ $BC = 3.2''$,

$CD = 3.3''$ $DA = 3.6''$

และเส้นทะแยงมุม $BD = 3.0''$

จงสร้างรูป สามเหลี่ยมใหม่พื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยม ABCD และแล้วคำนวณหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยประมาณ (H & S 2/130)

ข้อแนะนำในการสร้าง ครั้งแรกใช้บทสร้างที่ 8 สร้าง $\triangle$ ADB และแล้วให้สร้าง $\triangle$ DBC ให้มีส่วนต่าง ๆ เท่ากับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

จาก C ลาก CX ขนานกับ DB ตัด AB ต่อออกไปที่ X

ลาก DX แล้ว ADX จะเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

ถ้าวัดดูจะได้ระยะตั้งฉากจาก X มายัง AD

$= 4.67$ (คิดใกล้เคียงที่สุด)

$\therefore$ พ.ท. สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า = พ.ท. $\triangle$

$= \frac{1}{2}(4.67 \times 3.6) = 8.4$ ตร.นิ้ว

3/113 โจทย์ บนฐาน AB ซึ่งยาว 4 ซม. จงสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า, มีมุมที่ A และ B กางมุมละ 108°

จงย่อรูปห้าเหลี่ยมนี้ลงเป็นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากัน แล้ววัดฐานและส่วนสูงดู คำนวณหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าโดยประมาณ

(H & S 3/130)

ข้อแนะนำในการสร้าง ที่ A และ B ตาก AE = BC = AB ทำมุม $\hat{BAE} = \hat{ABC} = 108^\circ$

เอา E และ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AB เขียนส่วนโค้งตัดกันที่ D แล้ว ABCDE จะเป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่ต้องการ

วิธีย่อรูปห้าเหลี่ยม ลงเป็นรูป สามเหลี่ยม ใช้บทแทรกบทสร้างที่ 18

ถ้าวัดดูจะได้ XY = 8.9 ซม. และระยะตั้งฉากจาก D มายัง XY วัดได้ 6.2 ซม.

$\therefore$ เนื้อที่ของรูปห้าเหลี่ยม = เนื้อที่ $\triangle$

$= \frac{1}{2}(6.2 \times 8.9)$ ตร.ซม.

$= 27.59$ ”

4/113 โจทย์ นารูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD ตามที่วัดได้ดังนี้:

AB = 450 เมตร, BC = 380 เมตร,

CD = 330 เมตร, AD = 390 เมตร,

และเส้นทะแยงมุม AC = 660 เมตร.

จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน 1 ซม. ต่อ 50 เมตร) แล้วย่อแผนผังลงเป็นรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากัน และวัดฐานและส่วนสูง แล้วคำนวณหาพื้นที่นั้น (H & S 4/130)

วิธีสร้าง ครั้งแรกสร้าง △ ABC ให้มีด้าน AB = 9 ซม. BC = 7.6 ซม. AC = 13.2 ซม.

ต่อไปสร้างรูป △ ACD บน AC ให้มีด้าน AD = 7.8 ซม. CD = 6.6 ซม. แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่ต้องการ

ต่อไปเขียนรูปสามเหลี่ยม ADX ให้มีพื้นที่เท่ากับ ABCD ตามบทสร้างที่ 18

วัดส่วนสูงในแปดนจาก X มายัง AD จะได้ = 13.3

∴ เนื้อที่ของ ABCD = น.ท. △ ADX

$= \frac{1}{2}$ AD.DX

$= \frac{1}{2}$ (7.8×13.3) ตร.ซม.

$= 51.87$ „

แต่ในแปลน 1 ซม. $= 50$ เมตร

∴ „ 1 ตร.ซม. $= 2500$ ตร. เมตร

∴ เนื้อที่จริง $= 2500 \times 51.87$ „

$= 129675$ „

มาตราส่วน $\frac{1}{10}''$ $= 1$ ซม.

$= 50$ เมตร

(เกี่ยวกับการสร้างและพิสูจน์ด้วย)

5/115 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้ และมีฐานเท่ากับ BD ที่กำหนดให้ด้วย. (จุด D อยู่ใน BC, หรือส่วนต่อของเส้น BC ก็ได้) (H & S 5/130)

วิธีสร้าง ลาก AD ลาก CE // AD และไปพบ BA ที่ต่อออกไปที่จุด E ลาก DE

∴ △ EBD ก็เป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ พื้นที่ △ ADE = พื้นที่ △ ADC (ท.บ.27)

พื้นที่ $\triangle$ ADE + $\triangle$ ABD = พื้นที่ $\triangle$ ADC + $\triangle$ ABD

$\therefore$ $\triangle$ พื้นที่ $\triangle$ EBD = พื้นที่ $\triangle$ ABC

6/115 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และมีส่วนสูงเท่าที่กำหนดให้ (H & S 6/130)

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม h เป็นส่วนสูง จะต้องการ $\triangle$ ให้สูง h และมีเนื้อที่เท่ากับ $\triangle$ ABC

สร้าง ลาก XY // BC ซึ่งเป็นฐานของ $\triangle$ ABC ที่กำหนดให้และให้มีระยะห่างกันเท่ากับ h ซึ่งเป็นส่วนสูงที่กำหนดให้ ต่อ BA ออกไปพบ XY ที่จุด E และลาก EC ลาก AD ให้ // EC แล้วลาก ED

$\therefore$ $\triangle$ EBD เป็น $\triangle$ ตามต้องการ

(วิธีพิสูจน์ข้อ 6 เหมือนข้อ 5)

7/115 โจทย์ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และ X เป็นจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ จงสร้างสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยม ABD และมีมุมยอดอยู่ที่ X, และมีฐานเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันกับ BC

(H & S 7/130)

วิธีสร้าง ลาก XC ลาก AD ให้ // กับ XC ลาก DX
และ BX ลาก AE // กับ BX พบ BC ที่ต่อ
ออกไปที่จุด E ลาก EX

∴ △ XED เป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ พื้นที่ △ ADC = พื้นที่ △ ADX (ท.บ. 27)
เอา △ ABD บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ พ.ท. □ ABDX = พ.ท. ของ △ ABC

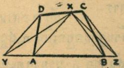
พ.ท. △ XEB = พ.ท. ของ △ ABX

เอา △ XBD บวกเข้าทั้งสองข้าง

จะได้ดังนี้ พ.ท. △ XED = พ.ท. □ ABDX

= พ .ท. △ ABC

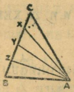
8/115 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD มีจุดยอดอยู่ที่ X ซึ่งอยู่บนด้าน DC และมีฐานเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกับ BC (H & S 8/130)



อธิบาย ขั้นมูลฐานสร้างดังนี้ คือ:-
ลาก AX กับ BX แล้วลาก DY // AX ลาก CZ // BX ตามในรูป ลาก XY และ XZ จะได้ △ XYZ เป็น △ ที่ต้องการ

ส่วนการพิสูจน์นั้น ๆ คล้าย ๆ กับวิธีพิสูจน์ในบ.ส. 18 หรือ 19

9/115 โจทย์ จงแบ่งรูป △ ออกเป็น n รูปโดยเส้นตรงซึ่งลากจากมุมหนึ่งของ △ รูปนี้ (H&S 9/130)

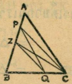


อธิบาย แบ่งด้านตรงข้ามออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วลากเส้นตรงจากมุมมายังจุดส่วนแบ่งนั้น ๆ ตามต้องการ

วิธีสร้าง แบ่งด้านฐานออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน (บ ส. 7) ลากเส้นจาก A มายังจุดแบ่ง จะได้สามเหลี่ยม n รูปมีพื้นที่เท่ากัน (ตาม ท.บ. 26)

10/116 โจทย์ จงลากเส้นจากจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ให้แบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยมนั้น (H & S 10/131)

ให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง ซึ่งมี P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ในด้าน AB



จะต้องการ แบ่ง Δ ABC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน โดยเส้นตรงซึ่งลากมาจากจุด P

วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด Z ลากเส้น CZ, CP จากจุด Z ลาก ZQ ให้ขนานกับ CP ลากเส้น PQ

ดังนั้น เส้น PQ จะแบ่ง Δ ABC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ $\because \Delta$ ACZ $= \Delta$ CBZ (ท.บ.26)

$\because$ = PZQ $= \Delta$ QZC ต่างก็ตั้งอยู่บนฐาน QZ อันเดียวกัน และอยู่ในระหว่างเส้นขนาน

PC, QZ คู่เดียวกัน

$\therefore \triangle$ PZQ = QZC (ท.บ.26)

บวก $\triangle$ BQZ เข้าทั้งสองข้าง

$\therefore \triangle$ PZQ + $\triangle$ BQZ = $\triangle$ QZC + $\triangle$ BQZ

$\therefore \triangle$ PBQ = $\triangle$ CBZ

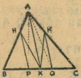
โดยท่านองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\square$ APQC = $\triangle$ ACZ โดยพื้นที่

แต่ $\triangle$ CBZ = $\triangle$ ACZ (ท.บ. 26)

$\therefore \triangle$ PBQ = $\triangle$ AQC

11/116 โจทย์ จงลากเส้นตรงสองเส้นจากจุด ๆ หนึ่ง ที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ให้แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (H & S 11/131)



ให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี X เป็นจุดหนึ่งอยู่ในด้าน BC

จะต้องการแบ่ง $\triangle$ ABC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยเส้นตรงซึ่งลากมาจากจุด X

สร้าง แบ่ง BC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันที่จุด P และ Q ลากเส้น AX จากจุด P และ Q ลากเส้น PH และ QK ให้ขนานกับ AX ลากเส้น XH, XK

ดังนั้น XH และ XK จะแบ่ง $\triangle$ ABC เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ ลากเส้น AP, AQ

$\because$ BP $=$ PQ $=$ QC (โจทย์)

$\therefore$ $\triangle$ ABP $= \triangle$ APQ $= \triangle$ AQC

โดยพินท์ (ท.บ. 26)

$\therefore$ $\triangle$ ABP $= \triangle$ APQ $= \triangle$ ACQ $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC

$\because$ $\triangle$ APX $= \triangle$ PHX (ท.บ. 26)

เอา $\triangle$ APH บวกเข้าทั้งสองข้างจะได้

$\triangle$ BHX $= \triangle$ ABP $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC .... (1)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle$ CKX $= \triangle$ ACQ $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC .... (2)

$\because$ $\triangle$ APX $= \triangle$ PHX (ท.บ. 26)............ (3)

และ $\triangle$ AXQ = $\triangle$ AXK („ „)............(4)

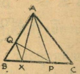
(3)+(4) จะได้ $\triangle$ APQ = สี่เหลี่ยม AKXH

$= \frac{1}{๓}$ $\triangle$ ABC ....(5)

(1)=(2)=(5) $\triangle$ BHX = $\triangle$ CKX = AKXH

$\therefore$ XH, XK แบ่ง $\triangle$ ABC ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน

12/117 โจทย์ จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุด ๆ หนึ่ง ที่กำหนดให้บนด้านใดด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม ให้ตัดรูปสามเหลี่ยมนั้นออกเป็น $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ฯลฯ ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ (H & S 12/131)



ให้ P เป็นจุดที่กำหนดให้ใน $\triangle$ ABC

วิธีสร้าง สมมติว่าจะลากเส้นจาก P ให้รูปที่เกิดขึ้นเป็น $\frac{1}{4}$ ABC ก่อน แบ่ง BC ออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน

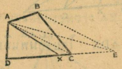
$\therefore$ BX เป็น $\frac{1}{4}$ ของ BC ลาก XQ ขนานกับ AP ลาก PQ

$\therefore$ PQ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ (คล้ายข้อ 11)

หมายเหตุ ถ้าต้องการให้แบ่งพื้นที่เป็น $\frac{1}{5}$ ก็ทำ BX ให้เท่ากับ $\frac{1}{5}$ ของ BC ถ้าต้องการแบ่งพื้นที่เป็น $\frac{1}{6}$ ก็ทำ BX เท่ากับ $\frac{1}{6}$ ของ BC

13/117 โจทย์ จงลากเส้นตรงจากมุมใดมุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าให้แบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่านั้น (H & S 13/131)



ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง

วิธีสร้าง สร้าง $\triangle$ ADE ให้มีพื้นที่เท่ากับ $\square$ ABCD

โดยใช้ บ.ส. 18

แบ่งครึ่ง DE ที่จุด X ลาก AX

$\therefore$ AX เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ เราพิสูจน์ได้โดยอาศัยแบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 26 ได้

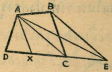
$\triangle$ ADX $= \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\triangle$ ADE

แต่พื้นที่ $\triangle$ ADE $= \square$ ABCD

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ ADX $= \frac{1}{2}$ $\square$ ABCD

14/118 โจทย์ จงลากเส้นตรงจากมุมยอดของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ให้ตัดสี่เหลี่ยมนั้นออก เป็นหนึ่งในสี่, ในห้า หรือในเท่าไรก็ได้ตามต้องการ

(H & S 14/131)



วิธีสร้าง สร้าง △ ADE โดยให้มีพื้นที่เท่ากับ □ ABCD โดยวิธีบทสร้าง 18

แบ่ง DE ออกเป็น 4 ส่วน ให้ DX เป็น $\frac{1}{4}$ ของ DE ลาก AX

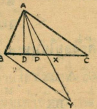
∴ AX เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ (คล้าย ๆ ข้อ 13)

แบบฝึกหัดระคน ว–ร หน้า 118

1/118 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้าน AB และ AC ยาวไม่เท่ากัน AX เป็นเส้นมีเดียนจากจุด A, AP เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC, และ AD เป็นเส้นตั้งฉากกับด้าน BC จงพิสูจน์ว่า AP มีตำแหน่งและส่วนยาวอยู่ระหว่าง AX กับ AD

(H & S 1/138)



ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มี AC ยาวกว่า AB, AD เป็นเส้นตั้งฉาก

AX เป็นเส้นมีเดียน $(BX = CX)$

AP เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC

จะต้องพิสูจน์ว่า AP ยาวกว่า AD และสั้นกว่า AX

สร้าง ต่อ AX ออกไปให้ถึงจุด Y ทำ XY ให้เท่ากับ AX ลาก BY

พิสูจน์ $\because$ AD เป็นเส้นตั้งฉาก

$\therefore$ AD ย่อมเป็นเส้นสั้นที่สุด (ท.บ. 21)

ดังนั้น AP ยาวกว่า AD .... (1)

$\therefore \hat{ABD} + \hat{ADB} + \hat{BAD} = \hat{ACD} + \hat{ADC} + \hat{DAC}$

$= 180^\circ$

แต่ $\hat{ADB} = \hat{ADC} = 90^\circ$

$\therefore \hat{ABD} + \hat{BAD} = \hat{ACD} + \hat{DAC}$

$\therefore \hat{ABD} > \hat{ACD}$ ตาม ท.บ. 9

$\therefore \hat{BAD} < \hat{DAC}$

นั่นคือ AP ต้องอยู่ในมุม $\hat{DAC}$

ใน $\triangle$ AXC, $\triangle$ BXY

$$\because \begin{cases} CX = BX \\ AX = XY \\ \hat{BXY} = \hat{CXY} \end{cases} \qquad (\text{ท.บ. } 3)$$

$\therefore \triangle$ ทั้งสองเท่ากันทุกประการตาม ท บ. 4

AC = BY และ $\hat{CAX} = \hat{BYX}$

$\therefore$ BY ยาวกว่า AB

ดังนั้น $\hat{BAX} > \hat{BYX}$

ดังนั้น $\hat{BAX} > \hat{CAX}$ ด้วย

∴ AP ต้องอยู่ในมุม $B\hat{A}X$ เมื่อ AP ต้องอยู่ในมุม $D\hat{A}C$ และ $B\hat{A}X$ เช่นนี้

AP ต้องอยู่ในมุม $D\hat{A}P$

∴ AP อยู่ระหว่าง AD กับ AX ....(2)

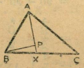
ระยะ DX ต้องมากกว่า DP

∴ AP สั้นกว่า AX ....(3)

2/118 โจทย์ ในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าลากเส้นจากปลายข้างหนึ่งของฐานให้ไปตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมยอดแล้ว

(i) จะทำให้มุมที่เกิดขึ้นระหว่างเส้นตั้งฉากนั้นกับด้านใดด้านหนึ่งที่ประกอบมุมยอดของสามเหลี่ยมนั้นเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของมุมที่ฐาน

(ii) จะทำให้มุมที่เกิดขึ้นในระหว่างเส้นตั้งฉากกับด้านฐานเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างของมุมที่ฐาน (H & S 2/138)



ให้ ABC เป็น $\triangle$ มี AX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง

มุม A ลาก BP ตั้งฉากกับ AX

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{ABP} = \frac{1}{2}\left(\hat{ABX} + \hat{ACX}\right)$

และ $\hat{PBX} = \frac{1}{2}\left(\hat{ABX} - \hat{ACX}\right)$

พิสูจน์ $\hat{ABP} = 90^\circ - \hat{BAP}$

$$= 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$$

$$= \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{ABX} + \hat{ACX}\right)$$

$$\hat{PBX} = 90^\circ - \hat{BXO}$$

$$= 90^\circ - \left(\hat{XAC} + \hat{ACX}\right)$$

$$= 90^\circ - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$$

$$= 90^\circ - \left\{\left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}\right) + \hat{C}\right\}$$

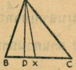
$$= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} + C\right)$$

$$= 90^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} - C$$

$$= \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{ABX} - \hat{ACX}\right)$$

3/119 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่เกิดขึ้นในระหว่างเส้นที่แบ่งครึ่งมุมยอดกับเส้นตั้งฉากที่ลากจากมุมยอดไปยังฐาน จะเท่ากับครึ่งหนึ่งผลต่างของมุมที่ฐาน (H & S 3/138)



ให้ AD ตั้งฉากกับ BC และ AX แบ่งครึ่ง $\hat{BAC}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{DAX} = \hat{ABC} - \hat{ACB}$

พิสูจน์ $\hat{DAX} = 90^\circ - \hat{AXD}$

$= 90^\circ - \left(\hat{XAC} + \hat{ACX}\right)$

$= 90^\circ - \left\{\frac{\hat{A}}{2} + \hat{C}\right\}$

แต่ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$\therefore \; A = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C}$

$\therefore \; \hat{DAX} = 90^\circ - \left\{\frac{(180^\circ - \hat{B} - \hat{C})}{2} + C\right\}$

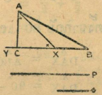
2

$= 90^\circ\left(\frac{180 - \hat{B} - \hat{C} + 2\hat{C}}{2}\right)$

$$= \frac{180^\circ - 180^\circ + \hat{B} - \hat{C}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(A\hat{B}C - A\hat{C}B\right)$$

4/119 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปหนึ่งให้มีด้านตรงข้ามมุมฉากเท่าที่กำหนดให้ และผลต่างของด้านอีก 2 ด้านตามกำหนดให้ (H & S 4/138)



ให้ C เป็นความยาวของด้านทะแยง P เป็นผลต่างของ 2 ด้าน

วิธีสร้าง ลาก BX ยาว = P ทำมุม BXA = 135°
เอา B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาว = C เขียนส่วนโค้งตัด CA ที่จุด A ต่อ BX ออกไปที่จุด Y
ที่จุด A ทำ $X\hat{A}C = A\hat{X}Y$
∴ △ ABC เป็น △ มุมฉากที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ $A\hat{X}B = 135^\circ$

$\therefore \quad \hat{AXC} = 45^\circ$

ดังนั้น $\quad \hat{XAC} = \hat{AXC} = 45^\circ$

$\therefore \quad \hat{ACX} = 90^\circ$

และ $\quad AC = CX \qquad$ (ท.บ. 6)

$\therefore \quad BC - AC = BX$

$= P$

5/119 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งให้มีฐาน เท่าที่กำหนดให้ ผลต่างของมุมที่ฐานเท่าที่กำหนดให้ และ

(i) ผลต่างของด้านที่เหลือ

(ii) ผลบวกของด้านที่เหลือ

(H & S 5/138)

ให้ AB เป็นด้านฐาน X เป็นผลต่างของมุมที่ฐาน K เป็นผลต่างของด้านอีกสองด้านที่เหลือ จะต้องการสร้าง $\triangle$ ABC ให้มีสิ่งต่าง ๆ ตามโจทย์กำหนด

วิธีสร้าง (ตอน 1) ที่ B ทำมุม $\hat{ABE} = \frac{1}{2}\hat{X}$

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี K เขียนวงกลมตัด BE ที่ D และ D′ ให้ D เป็นจุดที่อยู่ใกล้ B

จาก AD และต่อเลยไปถึงจุด C ทำมุม $\hat{DBC}$

ให้เท่ากับ $\hat{BDC}$ แล้ว ABC จะเป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \hat{BDC} = \hat{DBC}$ (สร้าง)

$\therefore BC = CD$ (ท.บ. 6)

$\therefore AC - CD = AC - BC = AD = K$

$\because \hat{ABC} = \hat{CBD} + \frac{1}{2}\hat{X}$

$= \hat{CDB} + \frac{1}{2}\hat{X}$ ($\because \hat{CBD} = \hat{CDB}$ สร้าง)

แต่ $\hat{CDB} = \hat{A} + \frac{1}{2}\hat{X}$

$\therefore \hat{ABC} = \hat{A} + \hat{X}$

$\therefore \hat{ABC} - \hat{BAC} = \hat{X}$

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

วิธีสร้าง (ตอน 2) ที่ B บน AB ทำ $\hat{ABD} = \frac{\hat{X}}{2}$

ทำ $\hat{DBE} = 90^\circ$

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี K เขียนส่วนโค้งตัด BE ที่ E ที่ B ทำมุม $\hat{EBC} = \hat{E}$

แล้ว ABC จะเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \hat{ABC} = \hat{ABE} - \hat{CBE}$

$= \left(90^\circ + \frac{\hat{X}}{2}\right) - \hat{CBE}$

$$= 90^\circ + \frac{\hat{X}}{2} - \hat{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\hat{A} = \hat{BDE} - \frac{\hat{X}}{2} \qquad (\text{บ.พ. } 16)$$

$$= 90^\circ - \hat{E} - \frac{\hat{X}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$(1)-(2)$ $\hat{ABC} - \hat{A} = \hat{X}$

และ $\therefore$ $\hat{CBE} = \hat{E}$ (สร้าง)

$\therefore$ $BC = CE$

$\therefore$ $AC + CE = AC + BC$

$= K$

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

6/120 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง ให้มีฐาน ผลบวกของด้านที่เท่ากัน และเส้นตั้งได้ฉากซึ่งฉากจากมุมยอดมายังฐานเท่าที่กำหนดให้

(H & S 6/138)

ให้ AB เป็นฐานของรูป $\triangle$ K เป็นความยาวของด้านๆ หนึ่ง + ระยะตั้งฉากจาก มุมยอดมายังด้านฐาน

จะต้องการสร้าง $\triangle$ ให้มีส่วนต่าง ๆ ตามโจทย์

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ D ฉาก DE ⊥ AB

และให้ยาวเท่ากับ K ฉาก DE ที่ A

ทำมุม $\hat{EAC} = \hat{E}$ แล้ว ABC จะเป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \hat{E} = \hat{EAC}$

$\therefore CE = AC$ (ท.บ. 5)

$\because EC+CD = K$ (โจทย์)

$\therefore AC+CD = K$

และ $\because$ DE ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AB

$\therefore AC = BC$ (บ.ต. 14)

$\therefore$ ABC เป็น △ หน้าจั่วที่ต้องการ

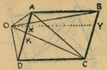
7/120 โจทย์ จงแสดงให้เห็นว่าจะแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้อย่างไร จึงจะทำให้สี่เหลี่ยมจตุรัสบนส่วนหนึ่งที่ถูกแบ่งเป็นสองเท่าของสี่เหลี่ยมจตุรัสบนอีกส่วนหนึ่ง (H & S 7/138)

วิธีทำ เหมือนข้อ 8 ว – ร หน้า 97

8/120 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้า O เป็นจุดอยู่ภายนอกมุม BAD และอยู่ในมุมยอดซึ่งอยู่ตรงข้ามกับ BAD จงพิสูจน์ให้เห็นว่าสามเหลี่ยม

OAD เท่ากับผลบวกของสามเหลี่ยม OAD กับ OAB

ถ้า O เป็นจุดอยู่ภายในมุม BAD และอยู่ในมุมยอดซึ่งอยู่ตรงข้ามกับ BAD จงพิสูจน์ว่า สามเหลี่ยม OAC เท่ากับผลต่างของสามเหลี่ยม OAD กับ OAB (H & S 8/138)



พิสูจน์ ลาก OY ขนานกับ AB ตัด AD ที่จุด X ให้ OC ตัด AD ที่จุด K

XY ย่อมขนานกับ AB และ DC (ท.บ. 15)

พื้นที่ $\triangle$ OAB $= \frac{1}{2} \square$ ด้านขนาน XYBA

พื้นที่ $\triangle$ ODC $= \frac{1}{2} \square$ ด้านขนาน XYCD

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ OAB + พื้นที่ $\triangle$ ODC

$= \frac{1}{2} \square$ ด้านขนาน ABCD

$= \triangle$ ACD

$(\because \triangle \text{ ACD} = \frac{1}{2} \square \text{ ABCD})$

ดังนั้นพื้นที่ $\triangle$ OAB + $\triangle$ ODC − $\triangle$ DKC

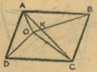
= พื้นที่ $\triangle$ ADC − $\triangle$ DKC

พื้นที่ $\triangle$ OAB + $\triangle$ OKD = พื้นที่ $\triangle$ AKC

พื้นที่ $\triangle$ OAB + $\triangle$ OKD + $\triangle$ OAK

= พื้นที่ $\triangle$ AKC + $\triangle$ OAK

$\therefore$ พื้นที่ $\triangle$ OAB + $\triangle$ OAD = พื้นที่ $\triangle$ OAC



ข. พิสูจน์ ถ้าลากเส้นตรงให้ผ่านจุด O และให้ขนานกับ AB และ CD เราจะพิสูจน์ได้ว่า

พื้นที่ $\triangle$ OAB + $\triangle$ ODC

$= \frac{1}{2}$ □ ด้านขนาน ABCD

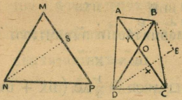
= $\triangle$ ADC

= พื้นที่ $\triangle$ OAC + $\triangle$ OAD + $\triangle$ ODC

$\therefore$ $\triangle$ OAB − $\triangle$ OAD = OAC

ซ.ค.พ.

9/120 โจทย์ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจะเท่ากับพื้นที่ของสามเหลี่ยม ในเมื่อด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเท่ากับเส้นทะแยงมุมทั้งสองของสี่เหลี่ยม และมุมในระหว่างด้านเท่า เท่ากับมุมใดมุมหนึ่งซึ่งอยู่ในระหว่างเส้นทะแยงมุมตัดกัน



(H & S 9/120)

ให้เส้นทะแยงมุม AC = ด้าน MP เส้นทะแยงมุม BD เท่ากับ MN และ $\hat{DOC} = \hat{NMP}$

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ □ ABCD = △ MNP

สร้าง ลาก DX ⊥ AC และ BY ⊥ AC

ต่อ DX ออกไปถึงจุด E ทำ XE ให้เท่ากับ BY

ลาก BE ดังนั้น DE = XD + BY

ลาก NS ให้ตั้งฉากกับ MP

พิสูจน์ โดย ท.บ. 20 เราได้ XY // BE

$\therefore \hat{DBE} = \hat{DOC}$ (ท.บ. 14)

ดังนั้น $D\hat{B}E = N\hat{M}P$

โดย ท.บ. 16 เราได้ $B\hat{D}E = M\hat{N}S$

$\triangle$ DBE และ $\triangle$ MNS

$$\therefore \left\{ \begin{array}{lll} BD = MN & & \\ D\hat{B}E = N\hat{M}P & & \text{(พิสูจน์แล้ว)} \\ B\hat{D}E = M\hat{N}S & & \text{(มุมฉาก)} \end{array} \right.$$

$\therefore$ สามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันทุกประการ (ท.บ. 17)

ดังนั้น DE = NS

พื้นที่ $\square$ ABCD $= \frac{1}{2} AC \, (DX + BY)$

$= \frac{1}{2} AC \times DE$

$= \frac{1}{2} AC = NS$

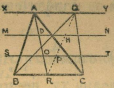
$= \frac{1}{2} MP = NS$

= พื้นที่ $\triangle$ MNP

10/121 โจทย์ จงหาโลกัสของจุดที่เส้นมัธยฐานตัดกันของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสร้างขึ้นบนฐานที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ากับที่กำหนดให้ (H & S 10/138)

ให้ ABC เป็น $\triangle$ มี AR เป็นมัธยฐาน

(R เป็นจุดกึ่งกลางของ BC)



วิธีหา จาก XY ผ่านจุด A ขนานกับ BC แบ่ง AR ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด O และ D จาก MDN และ SOT ขนานกับ BC ดังนั้นเส้นตรงทั้งสองนี้ย่อมขนานกับ XY ด้วย

ST เป็นโลกัสของจุดร่วม ของมีเดียน ของสามเหลี่ยมทุกรูปที่มีพื้นที่เท่ากับบนฐาน BC

พิสูจน์ $\because \triangle$ OR $= \frac{1}{3}$ AR (ดูหน้า 29)

$\therefore$ O เป็นจุดร่วมของเส้นมัธยฐานของ $\triangle$ ABC

จาก RQ ตัด ST, MN ที่จุด P และ H และพบ XY ที่จุด Q ถ้าลากเส้น BQ, CQ เราพิสูจน์ได้ว่า $\triangle$ ที่เกิดขึ้นมีพื้นที่เท่ากับ $\triangle$ ABC

และ RP = PH = HQ โดย ท.บ. 22

$$RP = \frac{1}{3} RQ$$

$\therefore$ P เป็นจุดร่วมมีเดียนของ $\triangle$ BQC (ถ้าลาก

BQ, CQ) เราพิสูจน์โดยทำนองเดียวกันนั้นได้เสมอว่า

(1) สามเหลี่ยมทุกรูปซึ่งมี BC เป็นฐานและมีมุมยอดบน XY ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

(2) เส้นมัธยฐานซึ่งลากจากจุด R ไปยังมุมยอด ย่อมถูกตัดเป็น $\frac{1}{3}$ โดย ST ซึ่งได้ผลว่าจุดร่วมของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมทุกรูปซึ่งสร้างโดยกำหนดนี้ย่อมอยู่ใน ST

∴ โลกัสที่ต้องการคือ ST ซึ่งเป็นเส้นตรงขนานกับ BC (มีระยะห่างดิ่งจากกับ BC เป็น $\frac{1}{3}$ ของระยะห่างระหว่าง BC กับ XY)

11/121 โจทย์ บนฐานของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้มีพื้นที่เท่ากับสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และมีส่วนสูงเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้ (H & S 11/138)

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี BC เป็นฐาน DE เป็นเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง

จะต้องการสร้าง สามเหลี่ยมให้มีจุดยอดอยู่บน DE และมีเนื้อที่เท่ากับสามเหลี่ยม ABC

วิธีสร้าง ลาก AF ให้ขนานกับ BC ตัด DE ที่ F

ลาก BF, CF

แล้ว BFC จะเป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ ใช้ ท.บ. 26

12/121 โจทย์ ใช้ไม้ตรง ต่อเป็นรูป สี่เหลี่ยม ด้าน ขนาน ABCD ตรงมุม ติดกับบานพับ ถ้า AB คงที่ จง หาโลกัสของจุดกึ่งกลางของด้าน CD

(H & S 12/138)

ให้ E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ AB,CD

ตามลำดับ

วิธีหา ∵ AB คงที่

∴ E ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางคงที่ด้วย

∵ $EB = \frac{1}{2} AB$ (สร้าง)

$= \frac{1}{2} CD$ (ท.บ. 20)

$=$ CF และขนานกัน

∴ EE = BC และขนานกันด้วย (ท.บ. 20)

และไม่ว่า CD จะเคลื่อนไปอย่างไรก็ตาม

EF ต้องยาวเท่ากับ BC และคงที่เสมอ

$\therefore$ F เป็นจุดที่เคลื่อนไปโดยห่างจาก E เป็นระยะทางเท่ากับ BC เสมอ

$\therefore$ โลกัสของ F เดินเป็นวงกลมที่มี E เป็นจุดศูนย์กลางและมีรัศมี BC

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 31,32

ว – ร, หน้า 104

(เกี่ยวกับพิสูจน์)

1/140 โจทย์ เส้นตรงเส้นหนึ่ง ถูก ตัดด้วย เส้นรอบวงของวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ส่วนที่อยู่ระหว่าง เส้น รอบวง ของวงกลม ทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน (H & S 1/147)

จาก O ลาก OE ให้ตั้งฉากกับ AB

พิสูจน์ $\therefore$ AE = EB และ CE = ED (บทกลับท.บ.31)

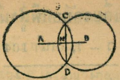
$\therefore$ AE – CE = EB – ED

$\therefore$ AC = BD

2/140 โจทย์ วงกลมสองวง ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง A และ B, ตัดกันที่จุด C, D และ M เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ดร่วม จงพิสูจน์ว่า AM และ BM เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

แล้วพิสูจน์อีกว่า เส้นร่วมจุดศูนย์กลางจะแบ่งครึ่งคอร์ดร่วมและตั้งได้ฉากด้วย

(H & S 2/147)



พิสูจน์ $\hat{AMC}$ และ $\hat{BMC}$ ต่างเท่ากับ 1 ∟ฉ (ท.บ.31)

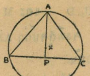
$\hat{AMC} + \hat{BMC} = 2$ ∟ฉ

∴ AM ต้องเป็นเส้นตรงเดียวกับ BM (ท.บ. 2)

(พิสูจน์ ตอน 2 ให้ AB เป็นเส้นตรง CD เป็นคอร์ดร่วม และเราได้พิสูจน์แล้วว่า AB แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับ DC)

3/140 โจทย์ AB, AC เป็นคอร์ดสองคอร์ดที่เท่ากันของวงกลมวงหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุม BAC จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

(H & S 3/147)



พิสูจน์ ลาก BC ต่อ AX พบ BD ที่จุด P

$\triangle$ BAP $=$ $\triangle$ CAP (ท.บ. 4)

$\therefore$ $\hat{APB} = \hat{APC}$ และ BP = PC

$\therefore$ AP ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง BC

$\therefore$ AP ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

(บทกลับ ท.บ. 31)

4/141 โจทย์ จงหาโลกัส ของจุด ศูนย์กลาง ของวงกลม ทั้งหลายซึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้.

(H & S 4/147)

ให้ A และ B เป็นจุด 2 จุด

จะต้องการหา โลกัสของจุดศูนย์ กลาง ของวงกลม ที่ เขียนผ่าน A และ B

วิธีหาโลกัส ลาก AB ลาก PO ตั้งฉาก และแบ่งครึ่ง AB แล้ว PO จะเป็นโลกัสที่ต้องการ

พิสูจน์ ทุกจุดบน CP ห่างจาก A,B เท่ากัน (บ.ส. 14)

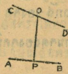
$\therefore$ วงกลมใด ๆ ก็ตาม ถ้ามีจุดศูนย์กลางบน OP ถ้าเส้นรอบวงผ่านจุด A แล้วจะต้องผ่านจุด B ด้วย

$\therefore$ OP เป็นโลกัสของจุดศูนย์กลางที่ต้องการ

5/141 โจทย์ จงเขียนวงกลมวงหนึ่ง ให้ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้และมีจุดศูนย์กลาง อยู่บนเส้นตรง ที่กำหนดให้.

เมื่อไรการสร้างนี้จึงจะสร้างไม่ได้ ?

(H & S 5/147)



ให้ A และ B เป็นจุดสองจุด CD เป็นเส้นตรง

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่จุด P จากจุด P ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ไปพบ CD ที่จุด O

∴ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ OP แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB (สร้าง)

∴ OA = OB (บ.พ. 14)

∴ ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

อธิบาย จะสร้างวงกลมตามที่กำหนดให้ไม่ได้ใน เมื่อ CD ตัด AB หรือ AB ที่ต่อออกไปเป็นมุมฉาก ทั้งนี้เพราะในกรณีย์เช่นนี้ PO จะไม่ตัด CD เลย

6/141 โจทย์ จงเขียนวงกลมวงหนึ่ง ให้มีรัศมีเท่าที่กำหนด ให้และผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ เมื่อไรจึงจะสร้างไม่ได้ ? (H & S 6/147)

ให้ A และ B เป็นจุดสองจุด R เป็นความยาวของรัศมี

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ C จาก C ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB (บ.ส. 3)

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี R เขียนส่วนโค้งตัด CD ที่ O แล้ว O จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์ ใช้บทพิสูจน์ที่ 14 คล้ายของ 5

ข้อสังเกต ในการแก้โจทย์ เกี่ยวกับการ สร้างรูป เช่น ข้อ 1 ถึง 6 ในหน้า 146 ที่จะกล่าวต่อไปนี้ง่ายมาก ข้าพเจ้าจึงของดการเฉลยปัญหาเสีย จะทิ้งไว้ให้นักเรียนคิดสร้างรูปเอาเอง จะขอเฉลยแต่เฉพาะแบบฝึกหัดภาคทฤษฎีเท่านั้น

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการคำนวณและการสร้าง

ว. – ร. หน้า 135

1/135 โจทย์ อาศัยรูปของบทพิสูจน์ที่ 31 ถ้า $AB = 8$ ซม. และ $OD = 3$ ซม. จงหา OB จงเขียนรูปและตรวจดูผลด้วยการวัด (H & S 1/145)

(มาตราส่วน $\frac{1''}{10} = 1$ ซม.)

วิธีคำนวณ

$$\because \quad OB^2 = OC^2 + BC^2 \quad (\text{ท.บ. } 29)$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$\therefore \quad OB = 5$$

ถ้าวัดดูจะได้ $OB = \frac{5}{10} = 5$ ซม.

2/135 โจทย์ จงคำนวณหาความยาวของคอร์ด ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลม 5 นิ้ว และรัศมี 13 นิ้ว (H & S 2/145)

วิธีคำนวณ จากรูป ข้อ 1 $OC = 5$ นิ้ว

$OB = 13$ นิ้ว

$$\therefore \quad BC^2 = 13^2 - 5^2$$

$\therefore \quad BC = 12$ นิ้ว

$\therefore \quad AB = 2\,BC = 24$ นิ้ว

3/135 โจทย์ จงหาคอร์ดสองคอร์ดซึ่งยาว 1.6 นิ้ว และ 1.2 นิ้ว ในวงกลมซึ่งมีรัศมี 1 นิ้ว จงคำนวณและวัดระยะจากจุดศูนย์กลางมายังคอร์ดทั้งสอง

(H & S 3/145)

วิธีคำนวณ ให้ AB, CD เป็นคอร์ดยาว 1.6″ และ 1.2″

OA เป็นรัศมียาว 1″

$$OE^2 = OA^2 - AE^2$$

$$= 1 - 0.64$$

$$OE = \sqrt{0.36} \quad \text{นิ้ว}$$

$$= 0.6 \quad ,,$$

$$OF = \sqrt{1-0.36} \quad ,,$$

$$= 0.8 \quad ,,$$

4/136 โจทย์ จงเขียนวงกลมวงหนึ่ง ให้มีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว 8.0 ซม. และเขียนคอร์ด คอร์ดหนึ่งให้ยาว 6.0 ซม. จงคำนวณระยะจากจุดศูนย์กลางถึง

คอร์ดให้ถึงมิลลิเมตร และสอบผลดูด้วยการวัด

(H & S 4/145)

[มาตราส่วนที่เขียนลด $\frac{1}{2}$]

วิธีสร้าง เอา O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 4 ซม.

เขียนวงกลม ลากรัศมี OC

เอา C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 6 ซม.

เขียนส่วนโค้งตัดวงกลมที่ D

ลาก OB ให้ตั้งฉากกับ CB

วิธีคำนวณ $OB^2 = OC^2 - BC^2$

$= 4^2 - 3^2$

$\therefore$ $OB = \sqrt{7}$ ซม.

$= 2.6$ ซม.

ถ้าวัดดูจะได้ BO ยาวประมาณ 1.35 ซม.

ราว 2.7 ซม.

5/136 โจทย์ จงหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด ซึ่งยาว 5 ฟุต 10 นิ้ว และอยู่ในวงกลม ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 2 หลา 2 นิ้ว แล้วสอบผลด้วยการวัดโดยสร้างรูป ใช้ 1 ซม. แทน 10 นิ้ว

(H & S 5/145)

วิธีคำนวณ จากรูปในข้อ 4 $OC = 74/2 = 37''$

คอร์ดยาว $5' \ 10''$ $= 70''$

$\therefore$ $BC = 35''$

$\therefore$ $OB^2 = 37^2 - 53^2 = 144$ ตร.นิ้ว

$\therefore$ $OB = 12' = 1$ ฟุต

สำหรับการสร้างรูปจะทิ้งไว้ให้นักเรียนสร้างและวัดเอาเอง

6/145 โจทย์ AB เป็นคอร์ดยาว 2.4 นิ้ว อยู่ในวงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมียาว 1.3 นิ้ว จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม OAB เป็นตารางนิ้ว.

(H & S 6/145)

วิธีคำนวณ ในที่นี้ $OA = 1.3''$, $AC = \frac{AB}{2} = 1.2''$

$\therefore$ $OC^2 = 1.69 - 1.44 = .25$

$OC = 0.5$

$\therefore$ เนื้อที่ $\triangle\ OAB = \frac{1}{2} \times 2.4 \times 0.5$ ตร.นิ้ว

$= 0.6$,,

7/136 โจทย์ P และ Q เป็นจุดสองจุดห่างกัน 3 นิ้ว, จงเขียนวงกลมรัศมี 1.7 นิ้ว, ให้ผ่านจุด P และ Q

จงหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด PQ และสอบผลดูด้วยการวัด. (H & S 7/145

วิธีสร้าง เอา P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 1.7" เขียนวงกลมตัดกันที่ O แล้ว O จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

วิธีคำนวณ จาก O ลาก OX ให้ตั้งฉากกับ PQ

$\therefore$ X เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ (ท.บ. 31)

$$\begin{aligned}
\therefore OX^2 &= OP^2 - PX^2 \\
&= 1.7^2 - 1.5^2 \\
&= 0.64 \\
\therefore OX &= 0.8''
\end{aligned}$$

ให้นักเรียนสร้างรูปและวัดดูเอง

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับคอร์ด

ว_ร. หน้า 146

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

7/146 โจทย์ เส้นตรงซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของคอร์ดสองคอร์ดที่ขนานกันภายในวงกลมวงหนึ่ง ย่อมผ่านจุดศูนย์กลาง (H & S 7/149)

ให้ P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด ขนาน AB, CD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ PQ ผ่าน O

พิสูจน์ ลาก OP ให้ตัด CD ที่ R

∵ OP แบ่งครึ่ง AB

∴ OP ตั้งฉากกับ AB (ท.บ. 31)

∵ AB // CD มี ORP ลากตัด

∴ $O\hat{R}D = O\hat{P}B = 1$ ∟ฉ (ท.บ. 14)

∴ OR ตั้งฉากกับ CD

∴ R เป็นจุดกึ่งกลางของ CD

(บทกลับบทที่พิสูจน์ที่ 31)

∴ R ทับ Q

นั่นคือ PQ ผ่าน O

9/146 โจทย์ คอร์ดสองคอร์ดที่ตัดกันในวงกลมวงหนึ่งจะไม่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน เว้นแต่จะเป็นเส้นผ่าจุดศูนย์กลาง (H & S 10/146)

ให้ AB, CD เป็นคอร์ดสองเส้นแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่ E

จะต้องพิสูจน์ E เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม หรือ AB,CD เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

พิสูจน์ สมมติว่า E ไม่ใช่จุดศูนย์กลาง

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง ลาก OE

∴ E เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด AB และ CD (โจทย์)

∴ OE ตั้งฉากกับ AB, CD (ท.บ. 31)

∴ $\hat{OEA}$ และ $\hat{OEC}$ ต่างเท่ากับ 1 ∟ฉ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

∴ จุดอื่น ๆ นอกจาก E จะเป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

∴ E เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

∴ AB, CD เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม

10/146 โจทย์ ถ้าสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งบรรจุในวงกลมได้ จุดที่ตัดกันของเส้นทะแยงมุมทั้งสองก็คือจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนั้น (H & S 11/149)

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานบรรจุอยู่ภายในวงกลม ให้เส้นทะแยงมุม AC, BD ตัดกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

พิสูจน์ ∵ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (โจทย์)

∴ AC, BD ย่อมแบ่งครึ่งกันและกันที่ O

(บทแทรก 3 ท.บ. 21)

∴ O ต้องเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม (ข้อ 9/146)

11/146 โจทย์ จงแสดงให้เห็นว่า สี่เหลี่ยม ด้านขนาน ที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้นที่สามารถบรรจุในวงกลมได้ (H & S 12/149)

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานบรรจุอยู่ภายในวงกลม

จะต้องพิสูจน์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

พิสูจน์ ∵ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่บรรจุภายในวงกลม

$\therefore$ เส้นทะแยงมุม AC, BD ย่อมแบ่งครึ่งกันและกันที่จุดศูนย์กลาง O (ข้อ 10/146)

$\therefore$ AC, BD ต้องเป็นเส้นผ่าศูนย์กลางและยาวเท่ากัน

ในสามเหลี่ยม ABD และ ACD

$$\therefore \begin{cases} AC = BD & \text{(พิสูจน์มาแล้ว)} \\ AD \ \text{ด้านร่วม} & \\ AB = CD & \text{(บ.ท. 21)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ (ท.บ. 7)

$\therefore B\hat{A}D = A\hat{D}C$

แต่ $\because AB \parallel CD$

$\therefore B\hat{A}D + A\hat{D}C = 2$ ∟ฉ (ท บ. 14)

$\therefore B\hat{A}D = 1$ ∟ฉ

$\therefore$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก

$\therefore$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

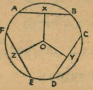
(กฎสี่เหลี่ยมมุมฉาก)

แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 34

ว – ร หน้า 151

(เกี่ยวกับการพิสูจน์)

1/150 โจทย์ จงหาโลกัสของจุดกึ่งกลางของคอร์ดทั้งหลายที่เท่ากันของวงกลมวงหนึ่ง. (H & S 1/151)



ให้ AB = CD = EF เป็นคอร์ดเท่ากัน

X,Y,Z, เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ดเหล่านี้

$\because$ AB = CD = EF (โจทย์)

พิสูจน์ $\therefore$ OX = OY = OZ (ท.บ. 34)

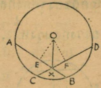
ถ้าให้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี OX

เขียนวงกลม วงกลมจะผ่านจุด X Y Z

$\therefore$ โลกัสของที่ต้องการ เป็นวงกลมมีรัศมี

= ระยะห่างของคอร์ดถึงจุดศูนย์กลาง

2/150 โจทย์ ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดกันภายในวงกลมวงหนึ่ง และต่างก็ทำมุมกับเส้นตรง ซึ่งลากจากจุดที่ตัดกันไปยังจุดศูนย์กลางเท่าๆ กัน คอร์ดทั้งสองย่อมเท่ากัน (H & S 2/151)



พิสูจน์ ลาก OE $\perp$ EB และ OF $\perp$ CD

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

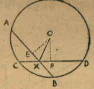
$\triangle$ EOX = FOX (ท.บ. 17)

$\therefore$ OE = OF

ดังนั้น AB = CD (ท.บ. 34)

3/150 โจทย์ ถ้าคอร์ดสองคอร์ดที่เท่ากันตัดกันภายในวงกลมวงหนึ่ง จงพิสูจน์ให้เห็นว่าส่วนแบ่งทั้งสองของคอร์ดๆ หนึ่งต่างก็เท่ากับส่วนแบ่งทั้งสองของคอร์ดอีกคอร์ดหนึ่งตามลำดับ

(H & S 3/151)



ให้ AB = CD

จะต้องพิสูจน์ว่า AX = XD และ CX = XB

พิสูจน์ ลาก OE ⊥ AB และ OF ⊥ CD

ลาก OX เราได้ AE = DF

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า △ EOX = △ FOX (ท.บ. 18)

$\therefore$ EX = CD

$\because$ AB = CD (โจทย์)

$\therefore \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$ หรือ AE = DF

AE + EX = DF + FX

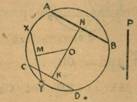
$\therefore$ AX = XD

นำไปลบเสียจาก AB, CD ที่เท่ากัน จะได้

CX = XB

4/150 โจทย์ ในวงกลมวงหนึ่ง จงเขียนคอร์ดๆ หนึ่งให้ยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้ (ไม่ยาวกว่าเส้น

ผ่าศูนย์กลาง) และขนานกับเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ (H & S 4/151)



ให้ P เป็นเส้นตรง AB เป็นคอร์ด

จะต้องสร้าง คอร์ด CD ให้ยาวเท่ากับ P และให้ขนานกับ AB ด้วย

สร้าง กำหนดจุด X ลงไปที่หนึ่งที่ใดบนเส้นรอบวง เอา X เป็นจุดศูนย์กลางใช้รัศมีเท่ากับ P เขียนส่วนโค้งตัดเส้นรอบวงที่จุด Y ลาก XY ลากเส้น OM $\perp$ และแบ่งครึ่ง XY ลาก ON ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AB และต่อปลาย ON ทางจุด O จนถึงจุด K ทำให้ OK = OM ลาก CD ผ่านจุด K ให้ขนานกับ AB (โดยวิธีสร้าง บ.ส. 6)

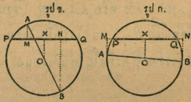
แล้วคอร์ด CD ขนานกับ AB และเท่ากับ P ตามต้องการ

พิสูจน์ $OK = OM$

$\therefore CD = XY$ (โดย ท.บ. 34) (บทกลับ)

$\therefore CD = XY = P$

5/150 โจทย์ PQ เป็นคอร์ดคายตัวในวงกลมวงหนึ่ง, และ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง: จงพิสูจน์ว่าผลบวกหรือผลต่างของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจาก A และ B มายัง PQ คงตัวเสมอ ไม่ว่า AB จะเคลื่อนไปอยู่ในที่ใด ๆ (H & S 5/151)



ให้ AM และ BN ต่างตั้งฉากกับ PQ

จะต้องพิสูจน์ว่า $AM + BN =$ นจ

หรือ $AM - BN =$ นจ

สร้าง ลาก $OX \perp PQ$

พิสูจน์ $\because$ AM, OX, BN ต่างตั้งฉากกับ PQ

$\therefore$ ตามรูป ก. $OX = \frac{1}{2}(AM+BN)$ (ข้อ 9/170)

และ ,, ฃ. $OX = \frac{1}{2}(BN-AM)$ (ข้อ 9/170)

แต่ $\because PQ$ คงที่

$\therefore OX$,, (ท.บ. 34)

$\therefore AM+BN$,,

และ $BN - AM$,,

และ พิสูจน์ ตามข้อ 9 ท้าย ท.บ. 22 ตามรูป ฃ.

ได้ว่า

$\frac{1}{2}(BN-AM) = OX$ (ซึ่งมีค่าเป็นนิจ)

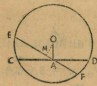
$\therefore BN - AM$ หรือ $AM - BN$ (ซึ่งมีค่าเป็นนิจ)

ข้อสังเกต โจทย์ข้อ 6 – 7 หน้า 151 เป็นโจทย์เกี่ยวกับการสร้างง่าย ๆ จะทิ้งไว้ให้นักเรียนสร้างเอาเอง

แบบฝึกหัดระคน

ว. – ร. หน้า 155

1/155 โจทย์ จงลากคอร์ดที่สั้นที่สุดให้ผ่านจุดที่กำหนดให้ ภายในวงกลมวงหนึ่ง. (H & S 1/153)



ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง A เป็นจุดที่กำหนดให้

วิธีสร้าง ลาก CD ให้ผ่านจุด A และให้ $\perp$ OA

$\therefore$ CD เป็นคอร์ดที่สั้นที่สุด

พิสูจน์ ถ้าคอร์ด CD ไม่ใช่คอร์ดที่สั้นที่สุด

ลาก EF ให้ผ่านจุด A และสมมติให้คอร์ด EF สั้นที่สุด ลาก OM $\perp$ EF

ถ้า EF สั้นกว่า CD

$\therefore$ OM ยาวกว่า OA (ท.บ. 35)

และ $\because$ OM $\perp$ EF และ OA ไม่ใช่เส้นตั้งฉากกับ EF ดังนั้น OM ต้องสั้นกว่า OA ท.บ. 12

∴ ตามที่สมมติให้ EF สั้นที่สุดย่อมเป็นจริงไปไม่ได้ นั่นคือ EF ไม่สั้นกว่า CD

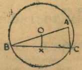
โดยทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ ไม่มีคอร์ดใดที่ผ่านจุด A สั้นกว่า CD

∴ คอร์ด CD สั้นที่สุด

ซ.ต.พ.

2/155 โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมี a = 3.5 นิ้ว b = 1.2 นิ้ว, c = 3.7 นิ้ว จงเขียนวงกลมให้ผ่านจุดปลายทั้งสองของด้าน a และให้มีจุดศูนย์กลางอยู่บนด้าน c จงคำนวณและวัดรัศมี

(H & S 2/153)



อธิบาย สร้างรูป △ โดยวิธีของ บ.ส. 8 ให้มีด้าน

$AB = 3.7''$ $BC = 3.5''$

$AC = 1.2''$

ลากเส้นให้ ⊥ BC ไปพบ AB ที่ O เอา O เป็น

จุดศูนย์กลางรัศมี OB เขียนวงกลม ๆ จะผ่าน A และ C ด้วย แบ่งครึ่ง BC ที่จุด X

พิสูจน์ $\because (3.7)^2 = (3.5)^2 + (1.2)^2$

$\therefore \hat{ACB} = 1$ ∟ฉ

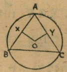
และ $\because OX \perp BC$ (สร้าง)

$\therefore \hat{OXB} + \hat{ACB} = 2$ ∟ฉ

$\therefore OX \, // \, AC \quad \therefore$ XO แบ่งครึ่ง AB

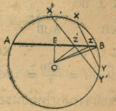
$\therefore$ รัศมี $OB = \frac{AB}{4} = 1.85$ ซม.

3/155 โจทย์ จงเขียนวงกลมให้ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสามยาว 2.6 นิ้ว, 2.8 นิ้ว, และ 3.0 นิ้ว แล้ววัดรัศมี. (H & S 3/153)



อธิบาย การที่จะเขียนวงกลมให้เส้นรอบวงผ่านจุด ABC ได้นั้นให้ใช้วิธีสร้างโดย ท.บ. 32 แบ่งครึ่ง AB และ AC ที่จุด X และ Y แล้วลากเส้นตั้งฉากจากจุด X และ Y นั้นให้ตัดกันที่จุด O วัด OB จะได้รัศมีที่ต้องการ ๑๔

4/155 โจทย์ AB เป็นคอร์ดตายตัวของวงกลมวงหนึ่ง และ XY เป็นคอร์ดอีกคอร์ดหนึ่ง ซึ่งมีจุดกึ่งกลาง Z อยู่บน AB จะสร้างคอร์ด XY ให้ยาวที่สุดและสั้นที่สุดได้อย่างไร ? (H & S 4/153)



จงแสดงให้เห็นว่า XY จะยาวขึ้น เมื่อ Z เคลื่อนเข้าใกล้จุดกึ่งกลางของ AB

ให้ XZY, X′Z′Y′ เป็นคอร์ดสองเส้น มีจุดศูนย์กลาง Z, Z′ อยู่บน AB ให้ Z′ อยู่ใกล้ E ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AB มากกว่าจุด Z

ลาก OE, OZ′, OZ

∴ $OE < OZ' < OZ$ (บทแทรก 3 ท.บ. 12)

∴ ตาม ท.บ. 35, $AB > X'Y' > XY$............(1)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า AB ยาวกว่าคอร์ดทุกเส้นที่มีจุดกึ่งกลางอยู่บน AB

∴ AB เป็นคอร์ดยาวที่สุด

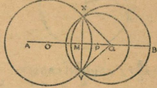
จาก (1) จะเห็นว่า ถ้า Z ยิ่งอยู่ไกลจาก E ออกไป คอร์ด XY จะยิ่งสั้นลงทุกที จนถ้า Z ทับ B, XY จะสั้นที่สุดคือไม่มีความยาวเลย

และ ถ้า Z เลื่อนจาก B มายัง E, XY จะยาวขึ้นทุกที จนถ้า B ทับ E, XY จะยาวที่สุด

แบบฝึกหัด ว–ร หน้า 159

(โจทย์ระคน)

1/159 โจทย์ วงกลมทั้งหลาย ซึ่งผ่านจุด ๆ หนึ่งที่ตายตัว และมีจุดศูนย์อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ ย่อมผ่านจุด ตายตัวที่สองด้วย (H & S 1/155)



กำหนดให้ O,P,Q, เป็นจุดอยู่บน AB และให้ O,P,Q, เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 3 วงที่เขียนผ่านจุดจุดหนึ่ง X และให้วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O และ P ตัดอีกแห่งหนึ่งที่จุด Y

จะต้องพิสูจน์ว่า วงกลมที่มี Q เป็นจุดศูนย์กลาง ย่อมผ่านจุด Y ด้วย

สร้าง ลาก XY ตัด AB ที่ M ลาก QX และ QY

XY เป็นคอร์ดร่วม

พิสูจน์ โดยวิธีพิสูจน์ในข้อ 1 ของแบบฝึกหัดท้าย ท.บ.33

เราพิสูจน์ได้ว่า

$$XM = YM$$

และ $Q\hat{M}X = Q\hat{M}Y = 1$ ∟ฉ QM ด้านร่วม

$\therefore \triangle Q\hat{M}X = \triangle Q\hat{M}Y$ (ท.บ. 4)

$\therefore QX = QY$

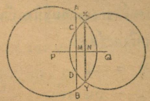
$\therefore$ ถ้าเอา Q เป็นจุดศูนย์กลาง มีรัศมี QX เขียนวงกลม ๆ ต้องผ่านจุด Y ด้วย

เราอาจพิสูจน์โดยทำนองนี้ได้ว่า วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางบน AB ถ้าเขียนผ่านจุด X แล้วจะต้องผ่านจุด Y ด้วย

$\therefore$ Y เป็นจุดคงที่อีกจุดหนึ่ง

2/159 โจทย์ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ลาก ขนานกับ คอร์ดร่วม ของวงกลม สองวง ซึ่งตัดกัน และตัด วงกลม ทั้งสองนี้ จงพิสูจน์ให้เห็นว่าส่วนที่อยู่ระหว่าง เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสองนี้ย่อมเท่ากัน

(H & S 2/155)



กำหนดให้ ให้ P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วง
ตัดกันที่จุด X และ Y ให้ AB ขนานกับคอร์ด
ร่วม XY และตัดวงกลมทั้งสองที่จุด A,C,D,B

จะต้องพิสูจน์ว่า AC = BD

พิสูจน์ โดยวิธีพิสูจน์ในข้อ 1 แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 32
พิสูจน์ได้ว่า PQ แบ่งครึ่ง และ ตั้งฉาก กับ XY ที่
จุด N $\widehat{XNP}$ เป็นมุมฉาก

∴ AB // XY (โจทย์)

∴ $\widehat{AMP} = \widehat{XND}$ (ท.บ. 14)

แต่ $\widehat{XNP}$ = 1 ∟ฉ

∴ $\widehat{AMP}$ = 1 ∟ฉ ด้วย

ดังนั้น PQ ตัด AB หรือ CD ที่ M เป็นมุมฉากด้วย
AB เป็นคอร์ดของวงกลมที่มี P เป็นจุดศูนย์กลาง

∴ PM แบ่งครึ่งคอร์ด AB ที่จุด M

CD เป็นคอร์ดของวงกลมที่มี Q เป็นจุดศูนย์กลาง

∴ QN แบ่งครึ่งคอร์ด CD

เมื่อ AM = BM

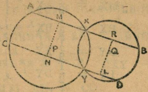
และ CM = DM แล้ว

$\therefore AM - CM = BM - DM$

$\therefore \quad AC = BD$

ซ.ต.พ.

13/159 โจทย์ ถ้าวงกลมทั้งสองวงตัดกัน มีเส้นขนานสอง
เส้น ซึ่งลากผ่านจุดทั้งสองนี้ไปตัดวงกลม ย่อม
ยาวเท่ากัน (H & S 3/155)



กำหนดให้ ให้ P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วง
ซึ่งตัดกันที่จุด X และ Y ให้ AB และ CD เป็น
เส้นตรง ขนาน 2 เส้น ที่ลากผ่าน X และ Y ตาม
ลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า AB เท่ากับ CD

สร้าง ลาก PM และ QR ให้ตั้งฉากกับ AB
ต่อ MP ให้พบ CD ที่จุด N และต่อ RQ ให้พบ
CD ที่ L

พิสูจน์ $\hat{PNL} + \hat{PMX} = 2$ ⦜ฉ (ท.บ.14)

แต่ $\hat{PMX} = 1$ ⦜ฉ

$\therefore \hat{PNL} = 1$ ⦜ฉ

โดยทำนองเดียวกันเราได้ $\hat{QLN} = 1$ ⦜ฉ

$\therefore$ □ MRLN เป็น □ ผืนผ้า

ดังนั้น $MR = NL$

$\therefore$
$$\left.\begin{aligned} MX &= \tfrac{1}{2}AX \\ RX &= \tfrac{1}{2}BX \\ NY &= \tfrac{1}{2}XY \\ LY &= \tfrac{1}{2}DY \end{aligned}\right\} \text{(ท.บ. 31)}$$

$\therefore MX + RX = \frac{1}{2}\left[AX + BX\right]$

ดังนั้น $MR = \frac{1}{2}AB$

และ $NY + LY = \frac{1}{2}\left[CY + DY\right]$

$\therefore NL = \frac{1}{2}CD$

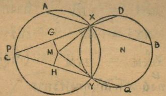
ดังนั้น $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\therefore AB = \frac{1}{2}CD$

ซ. ต. พ.

4/159 โจทย์ ถ้าวงกลมสองวงตัดกัน มีเส้นตรงสองเส้นซึ่งลากผ่านจุดที่ตัดกันจุดหนึ่ง และต่างก็ทำมุมกับ

คอร์ดร่วมเท่ากัน และไปสุดที่เส้นรอบวงทั้งสองข้าง ย่อมเท่ากัน. (H & S 4/155)



กำหนดให้ ให้ M และ N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วง ตัดกันที่จุด X และ Y เส้นตรง AB กับ CD ตัดกันที่จุด X ทำให้ $C\hat{X}Y = B\hat{X}Y$

จะต้องพิสูจน์ว่า AB = CD

สร้าง ลาก PQ ให้ผ่านจุด Y และขนานกับ AB ลาก MG ⊥ CD และลาก MH ⊥ PQ ลาก MX และ MY

พิสูจน์

	$B\hat{X}Y$	$= H\hat{Y}X$	(ท.บ. 14)
แต่	$G\hat{X}Y$	$= B\hat{X}Y$	
	$G\hat{X}Y$	$= H\hat{Y}X$	
∴	MX	= MY	(รัศมี)
∴	$M\hat{X}Y$	$= M\hat{Y}X$	(ท.บ. 5)

ดังนั้น $G\hat{X}Y - M\hat{X}Y = H\hat{Y}X - M\hat{Y}X$

$\therefore \quad G\hat{X}M = H\hat{Y}M$

ใน $\triangle$ MGX และ $\triangle$ MHY

$\because \begin{cases} M\hat{G}X = M\hat{H}Y & \text{ต่างก็น 1 ⊥ฉ} \\ MX = MY & \text{เพราะเป็นรัศมี} \\ G\hat{X}M = H\hat{Y}M & \text{(พิสูจน์มาแล้ว)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ ทั้งสองเท่ากันทุกประการ (ท.บ. 4)

ดังนั้น MG = MH

$\therefore$ คอร์ด CX = คอร์ด PY (บทกลับ ท.บ. 34)

โดยทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

คอร์ด XD = คอร์ด YQ

$\because \quad CX + XD = PY + YQ$

$\therefore \quad CD = PQ$

แต่ $\quad PQ = AB \qquad$ โดยพิสูจน์ตามข้อ 3

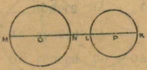
$\therefore \quad AB = CD$

หมายเหตุ โจทย์ข้อ 5, 6 เกี่ยวกับการสร้างรูปง่าย ๆ จะทิ้งไว้ให้นักเรียนแก้เอาเอง

แบบฝึกหัด ว–ร หน้า 164

(โจทย์ระคน)

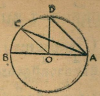
1/146 โจทย์ จงหาเส้นที่ยาวที่สุดและสั้นที่สุด ซึ่งปลายทั้งสองของเส้นนั้นไปสุดที่เส้นรอบวง ของวงกลมทั้งสองซึ่งไม่ตัดกัน (H & S 1/157)



อธิบาย ให้ O และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วง ลาก MK ให้ปลายทั้งสองข้างจดเส้นรอบวง ผ่านจุดศูนย์กลาง O และ P และตัดเส้นรอบวงที่จุด N และ L

เราได้ MP ยาวที่สุด
LN สั้นที่สุด } อาศัยการพิสูจน์ของ ท. [illegible]. 37

2/164 โจทย์ จากจุด ๆ หนึ่งบนเส้นรอบวง ของวงกลม วงหนึ่ง มีเส้นตรงลากไปยังเส้นรอบวง เส้นที่ยาวที่สุด คือเส้นที่ผ่านจุดศูนย์กลาง และเส้นที่รับมุมใหญ่ที่จุดศูนย์กลางย่อมยาวกว่าเส้นที่รับมุมเล็ก. (H & S 2/157)



ให้ AB ผ่านจุดศูนย์กลาง และให้ $\hat{AOC} > \hat{AOD}$

จะต้องพิสูจน์ว่า AB ยาวที่สุด

และ AC ยาวกว่า AD

พิสูจน์ AO + OC ยาวกว่า AC (ท.บ. 11)

ดังนั้น AO + OB ยาวกว่า AC (ท.บ. 11)

(OC = OB)

∴ AB ยาวกว่า AC

△ OAC และ △ OAD

∴ { OA เป็นด้านร่วม
OC = OD
$\hat{AOC} > \hat{AOD}$ }

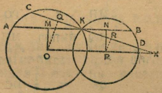
∴ AC ยาวกว่า AD (โดย ท.บ. 11)

นั่นคือ AB ยาวกว่า AD ด้วย

∴ AB ยาวที่สุด

ซ. ต. พ.

3/164 โจทย์ เส้นตรงทั้งหลาย ที่ลาก ผ่านจุด ๆ หนึ่ง ของวงกลมสองวงตัดกัน และไปสุดที่เส้นรอบวงทั้งสอง เส้นที่ยาวที่สุดคือเส้นที่ขนาน กับเส้น ร่วมจุดศูนย์กลาง. (H & S 3/157)



ให้ O และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วง ตัดกันที่จุด K

AB และ CD ลากผ่านจุด K ให้ AB ขนานกับ OP

จะต้องพิสูจน์ว่า AB ยาวกว่า CD

สร้าง ลาก OM และ PH ตั้งฉากกับ AB

ลาก OQ และ OR ตั้งฉากกับ CD

ต่อ CD ออกไปพบกับ OP

(หรือ OP ซึ่งต่อออกไป) ที่จุด X

พิสูจน์ เพราะว่า XQ $\perp$ OQ

$\therefore$ XQ สั้นกว่า XO

และเพราะว่า XR ตั้งฉากกับ OR

$\therefore$ XR สั้นกว่า XP

นั่นคือ XQ − XR สั้นกว่า XO − XP

$\therefore$ RQ สั้นกว่า PO

□ MHPO เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

MH = PO

$\therefore$ RQ สั้นกว่า MH

โดยอาศัย ท.บ. 37 เราพิสูจน์ได้ว่า

QR $= \frac{1}{2}$ DC

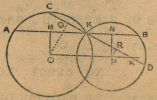
และ MH $= \frac{1}{2}$ AB

$\frac{1}{2}$ CD สั้นกว่า $\frac{1}{2}$ AB

$\therefore$ CD สั้นกว่า AB

นั่นคือ AB ยาวกว่า CD

โดยทำนองนี้ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า AB ยาวกว่าเส้นตรงทุกๆเส้นที่ลากผ่านจุด K และปลายทั้งสองพบเส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง



4/164 โจทย์ จงเขียนรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OAB ซึ่งมีมุมยอด O กาง 80° เอา O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี OA เขียนวงกลม และบนเส้นรอบวงกำหนดจุดต่างลงไป คือ P,Q,R,........ให้อยู่บนด้านเดียวกันของ AB จงวัดมุมที่จุด P,Q,R,........ ซึ่งกางรับคอร์ด AB ทำเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง แต่กำหนดมุมยอด O ต่าง ๆ กัน ท่านจะเขียนความจริงได้ว่าอะไร ? (H & S 6/157)

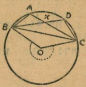
อธิบาย เมื่อสร้างรูปแล้วจะปรากฏว่า APB, AQB .... ต่างกาง 40° นี่แสดงความจริงของ ท.บ. 39 ที่ว่า มุมในส่วนโค้ง (Segments) ของวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน.

ถ้ากำหนดมุมที่ O ให้กาง 70° $\hat{APB}$, $\hat{AQB}$ ....จะกาง 35° นี่แสดงความจริงของ ท.บ. 38 ที่ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางย่อมเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่ตั้งอยู่บนส่วนโค้ง (Segments) ของวงกลมเดียวกัน.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 39

ว. – ร. หน้า 174

1/174 โจทย์ ในรูปที่ 1 บ.พ. 39 ถ้ามุม BDC เป็น 74°
จงหาค่าของมุมต่อไปนี้เป็นองศามุม BAC, BOC,
OBC. (H & S 1/161)



วิธีหา $\hat{BAC} = \hat{BDC} = 74^\circ$ โดย ท.บ. 39 (1)

$\hat{BOC} = 2\ \hat{BAC} = 48 = 184^\circ$ โดย ท.บ.38 (2)

$\therefore\ \hat{OBC} + \hat{OCB} = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$

และ BO = OC เพราะเป็นรัศมี

ดังนั้น $\hat{OBC} = \hat{OCB}$ (โดย ท.บ. 5)

$\therefore\ \hat{OBC} = 16^\circ$

2/174 โจทย์ ในรูปที่ 2 บ.พ. 39 ให้ BD และ CA ตัดกัน
ที่จุด X ถ้ามุม DXC = 40°, และมุม XCD = 25°
จงหาค่าของมุมต่อไปนี้เป็นองศา มุม BAC และ
มุมกลับ BOC (H & S 2/161)

วิธีหา   ดูรูป ข. ในข้อ 1

$$\hat{DXC} + \hat{XCD} + \hat{XDC} = 180^\circ$$

$$\hat{XDC} = 180^\circ - 40^\circ - 25^\circ$$

$$= 115^\circ$$

แต่ $\hat{BAC} = \hat{XDC}$ (ท.บ. 39)

$\therefore$ $\hat{BAC} = 115^\circ$

มุมกลับ $\hat{BOC} = 2\ \hat{BAC} = 230^\circ$

3/174 โจทย์ ในรูปที่ 1 บ.พ 39, ถ้ามุม CBD, BCD, กาง 43° และ 82° ตามลำดับ จงหาค่าของมุม BAC, OBD, OCD เป็นองศา   (H & S 3/161)

(วิธีหาคล้ายข้อ 2)

4/174 โจทย์ ในรูปที่ 2 บ.พ. 39 จงพิสูจน์ให้เห็นว่ามุม OBC เล็กกว่ามุม BAC หนึ่งมุมฉาก

(H & S 4/161)

อธิบาย   ดูรูป ข. ข้อ 1

มุมกลับ $\hat{BOC} = 2\ \hat{BAC}$ (ท.บ. 38)

มุมกลับ $\hat{BOC} + \hat{BOC} = 4 \llcorner$ ฉ

$\therefore \quad 2\,\hat{BAC} + \hat{BOC} = 4 \llcorner\text{ฉ}$ ....(A)

แต่ $\hat{BOC} + \hat{OBC} + \hat{OCB} = 2 \llcorner\text{ฉ}$ (ท.บ. 16)

และ $\because \quad \hat{OBC} = \hat{OCB}$

$\therefore \quad \hat{BOC} = 2 \llcorner\text{ฉ} - 2\,\hat{OBC}$

(พิสูจน์ได้โดยอาศัย ท บ. 16)

$\therefore$ จากสมการ (A)

$$2\,\hat{BAC} + (2 \llcorner\text{ฉ} - 2\,\hat{BOC}) = 4 \llcorner\text{ฉ}$$

$$2\,\hat{BAC} + 2 \llcorner\text{ฉ} - 2\,\hat{OBC} = 4 \llcorner\text{ฉ}$$

$$\hat{BAC} + 1 \llcorner\text{ฉ} - \hat{OBC} = 2 \llcorner\text{ฉ}$$

$$\hat{BAC} - \hat{OBC} = 1 \llcorner\text{ฉ}$$

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 40

ว – ร, หน้า 180

1/180 โจทย์ ในวงกลมวงหนึ่งซึ่งมีรัศมี 1.6 นิ้ว จงบรรจุรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD ลงในวงกลมนี้ และให้มุม $\hat{ABC} = 126°$ จงวัดมุมที่เหลือแล้วสอบดูด้วยระบบมุมตรงข้ามว่าถูกต้อง 2 มุมฉากหรือไม่ (H & S 1/163)

อธิบาย สร้าง $\hat{ABC} = 126°$ ให้มุมอยู่ที่เส้นรอบวงตรงที่ได้ที่หนึ่ง ให้ D เป็นจุดบนเส้นรอบวง ลาก AD และ CD

โดย ท.บ. 40 เราได้ $\hat{ADC} = 54°$

(ถ้าวัดดูก็คงจะได้เท่ากัน เว้นแต่จะสร้างมุม $\hat{ABC}$ ไม่ถูกต้องตามกำหนดให้เท่านั้น)

2/180 โจทย์ จงพิสูจน์บทพิสูจน์ที่ 40 โดยอาศัยบทพิสูจน์ที่ 39 และ 16, ด้วยการลากเส้นจากมุมยอดที่อยู่ตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (H & S 2/163)

พิสูจน์ $\hat{DAC} = \hat{DBC}$ (ท.บ. 39)

$\hat{BAC} = \hat{BDC}$ (ท.บ. 39)

$\hat{DAC} + \hat{BAC} = \hat{DBC} + \hat{BDC}$

∴ $\hat{BAD} = \hat{DBC} + \hat{BDC}$

แต่ $\hat{DBC} + \hat{BDC} + \hat{BCD} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 16)

∴ $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 2$ ∟ฉ ด้วย

3/180 โจทย์ ถ้าวงกลมวงหนึ่งสามารถเขียนล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ สี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นต้องเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (H & S 3/163)

พิสูจน์ ∵ $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 40)

แต่ ∵ □ ABCD เป็น □ ด้านขนาน

∴ $\hat{BAD} = \hat{BCD}$ (ท.บ. 21)

ดังนั้น $\hat{BAD}$ และ $\hat{BCD}$ ต่างก็เท่ากับ 1 ∟ฉ

โดยทำนองเดียวกัน เราพิสูจน์ได้ว่า

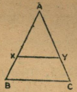
$\hat{ABC}$ และ $\hat{ADC}$ ต่างก็เท่ากับ 1 ∟ฉ

∴ □ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

4/180 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง และ XY ลากขนานกับฐาน BC ตัดด้านทั้งสองที่ X และ Y จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งสี่ คือ B,C,X,Y อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม. (H & S 4/163)

พิสูจน์ ∵ XY // BC

∴ $\hat{BXY} + \hat{XBC} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 14)



∴ $AB = AC$

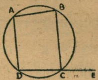
∴ $X\hat{B}C = Y\hat{C}B$ (ท.บ. 5)

ดังนั้น $B\hat{X}Y + Y\hat{C}B$ = 2 ∟ฉ ด้วย

∴ จุด B,C,X,Y อยู่ใน เส้น รอบวง ของ วงกลม เดียวกัน (ท.บ. 40 บทกลับ)

5/180 โจทย์ ถ้าด้านหนึ่งของ สี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่า ที่บรรจุภายในวงกลมถูกต่อออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะเท่ากับมุมภายในที่ตรงกันข้ามของสี่เหลี่ยมนั้น

(H & S 5/163)



พิสูจน์ $B\hat{A}D + B\hat{C}D$ = 2 ∟ฉ (ท.บ. 40)

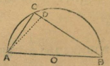
แต่ $B\hat{C}D + B\hat{C}E$ = 2 ∟ฉ (ท.บ. 1)

∴ $B\hat{C}E = B\hat{A}D$

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่ 41

ว–ร, หน้า 184

1/184 โจทย์ วงกลมวงหนึ่งสร้างบนด้านทะแยงของสามเหลี่ยมมุมฉากใช้ด้านทะแยงเป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง วงกลมวงนี้ย่อมผ่านมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทะแยงด้วย (H & S 1/165)



ให้ ABC เป็น △ มุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

พิสูจน์ สร้างวงกลมใหม่ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง (แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O เอา O เป็นจุดศูนย์กลางใช้รัศมี OA หรือ OB เขียนวงกลม)

ถ้าสมมติว่าวงกลมไม่ผ่านจุด C เส้นรอบวงจะต้องตัด AC หรือ AC ซึ่งต่อออกไป (หรือ BC) ให้วงกลมตัด AC ที่จุด D ลาก BD

$\therefore \quad \hat{ADB} = 1$ ⊾ฉ (ท.บ. 41)

แต่ $\quad \hat{ACB} = 1$ ⊾ฉ (โดยโจทย์)

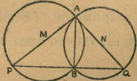
$\therefore \quad \hat{ADB} = \hat{ACB}$

แต่สมมติว่า D อยู่บน AC

$\therefore \quad \hat{ADB} > \hat{ACB}$ โดย ท.บ. 8 ซึ่งเป็นไปไม่ได้

$\therefore$ เส้นรอบวงต้องผ่านจุด C

2/181 โจทย์ วงกลมสองวงตัดกันที่ A และ B ที่ A มีเส้นผ่าศูนย์กลาง AP, AQ ลากไปยังวงกลมทั้งสอง จงพิสูจน์ว่า จุด P, B, Q อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน (H & S 2/165)



พิสูจน์ $\hat{ABP}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม

$\therefore \quad \hat{ABP} = 1$ ⊾ฉ

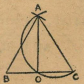
$\hat{ABQ}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม

$\therefore \quad \hat{ABQ} = 1$ ⊾ฉ

ดังนั้น $\hat{ABP} + \hat{ABQ} = 2$ ⊾ฉ

∴ PB คือเป็นเส้นตรงอันเดียวกันกับ BQ (ท.บ. 2)
นั่นคือ จุด P, จุด B, และจุด Q อยู่ในเส้นตรงอันเดียวกัน.

3/184 โจทย์ วงกลมวงหนึ่งสร้างขึ้นบนด้านที่เท่ากันด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และใช้ด้านนั้นเป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง จงพิสูจน์ว่าวงกลมนั้นจะผ่านจุดกึ่งกลางของฐานด้วย. (H & S 3/166)



ให้วงกลม AOC ผ่าน BC ที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า O เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

พิสูจน์ ลาก AD

$$A\hat{O}C = 1\,\llcorner\text{ฉ} \qquad (\text{ท.บ. } 41)$$

แต่ $$A\hat{O}C + A\hat{O}B = 2\,\llcorner\text{ฉ} \qquad (\text{ท.บ. } 2)$$

$$\therefore \quad A\hat{O}B = 1\,\llcorner\text{ฉ}$$

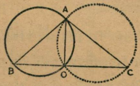
โดยอาศัย ท.บ. 18 เราได้ว่า

$\triangle ABO = \triangle ACO$ ทุกประการ

∴ $BO = OC$ (นั่นคือ O เป็นจุดกึ่งกลางของ BC)

4/184 โจทย์ วงกลมทั้งหลายซึ่งสร้างขึ้นโดยใช้ด้านทั้งสองของสามเหลี่ยมเป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง ย่อมตัดกันบนด้านที่สามหรือส่วนต่อของด้านที่สาม.

(H & S 4/165)



ให้ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่เส้นรอบวงตัด BC ที่จุด O

จะต้องพิศูจน์ว่า วงกลมซึ่งมี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางย่อมผ่านจุด O ด้วย

พิสูจน์ ลาก AO

$$\hat{AOB} = 1 \llcorner ฉ \qquad (\text{ท.บ. } 41)$$

แต่ $\hat{AOB} + \hat{AOC} = 2 \llcorner ฉ \qquad (\text{ท.บ. } 2)$

$$\therefore \hat{AOC} = 1 \llcorner ฉ$$

$\therefore$ $\hat{AOC}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมที่มี AC เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง นั่นคือ วงกลมที่มี AC เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางต้องผ่านจุด O

5/185 โจทย์ ไม้ตรงอันหนึ่งวางเอียน อยู่ระหว่างไม้บรรทัดสองอันซึ่งวางเป็นมุมฉากซึ่งกันและกัน จงหาโลกัสของจุดกึ่งกลางของไม้ตรงนั้น.

(H & S 5/165)

วิธีหา ให้ AO และ BO เป็นไม้บรรทัดบรรจบกันทำให้เกิดมุม AOB เป็นมุมฉาก ให้ RQ เป็นท่อนเหล็กสมมติให้ $R'Q'$ เป็นตำแหน่งใหม่ของท่อนเหล็กซึ่งเคลื่อนที่ไป ให้ P และ P' เป็นจุดกึ่งกลางของท่อนเหล็ก RQ และ $R'Q'$

ลาก OP และ OP'

$\therefore$ $\triangle$ ROQ เป็น $\triangle$ มุมฉาก

ถ้าเอา P เป็นจุดศูนย์กลางใช้รัศมี PR หรือ PQ เส้นรอบวงย่อมผ่านจุด O โดยข้อ 1

$\therefore$ $OP = OR = \frac{1}{2} RQ$ (เพราะต่างเป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน)

$OP' = OR' = \frac{1}{2} R'Q'$

$\therefore$ $OP' = OP$

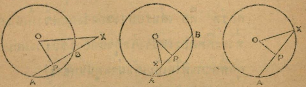
โดยวิธีนี้เราพิสูจน์ได้เสมอไปว่า ไม่ว่า RQ

อยู่ในที่ใด จุดกึ่งกลาง P ย่อมห่างจาก O
เท่า ๆ กัน

∴ โลกัสของจุด P เคลื่อนไปเป็นเส้นรอบวงของ
วงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมี OP.

6/185 โจทย์ จงหาโลกัสของจุดกึ่งกลางของคอร์ดของวง-
กลม ซึ่งลากผ่านจุดตายตัวจุดหนึ่ง จงสังเกต
โลกัสที่เกิดขึ้นใน เมื่อจุดที่กำหนดให้อยู่ภายใน
วงกลม บนเส้นรอบวงหรือภายนอกวงกลม.

(H & S 6/165)



ก. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
AB เป็นคอร์ดซึ่งผ่านจุด X ที่กำหนดให้ ให้ P
เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด AB

จะต้องหา โลกัสของจุด P

สร้าง ลาก OX และ OP

$O\hat{P}X$ 1 ∟ฉ (ท.บ.31)

∴ ถ้าสร้างวงกลมให้ OX เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เส้นรอบวงย่อมผ่านจุด P (โดยข้อ 1)

∴ โดยวิธีนี้เราพิสูจน์ได้เสมอไปว่า AB จะอยู่ที่ใดถ้าผ่านจุด X แล้ว วงกลมซึ่งมี OX เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางย่อมผ่านจุด P เสมอ

∴ โลกัสของจุด P คือ เส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งมี OX เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

(ข้อ ข. และ ค. มีวิธีหาโลกัสคล้ายกับข้อ ก. ได้ผล คือ โลกัสของจุดกึ่งกลางของคอร์ด คือ เส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีเส้นตรงที่โยงติดต่อระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม กับจุดที่กำหนดให้เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง)

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับมุมในวงกลม

ว_ร, หน้า 194

1/194 โจทย์ P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนส่วนโค้งของ ส่วน ของวงกลม ซึ่งมี AB เป็นคอร์ด จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของมุม PAB กับ PBA คงตัวเสมอ.

(H & S 1/170)

พิสูจน์ ให้ P' เป็นอีกตำแหน่งหนึ่งของจุด P เราพิสูจน์ได้ว่า $\hat{APB} = \hat{AP'B}$ (ท.บ. 39)

$\therefore \hat{APB} + \hat{PAB} + \hat{PBA} = 180^\circ$

$\hat{AP'B} + \hat{P'AB} + \hat{P'BA} = 180^\circ$

$\therefore \hat{PAB} + \hat{PBA} = \hat{P'AB} + \hat{P'BA}$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\hat{PAB} + \hat{PBA}$ มีขนาดคงที่ไม่ว่า P อยู่ที่ใด

ซ.ต.พ.

2/194 โจทย์ PQ และ RS เป็นคอร์ดสองคอร์ดตัดกันที่จุด X ในวงกลมวงหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม PXS กับ สามเหลี่ยม RXQ มีมุมเท่ากัน ทุกมุม มุมต่อมุม (H & S 2/170)

คอร์ด PQ และคอร์ด RS ตัดกันในวงกลมที่จุด X

จงพิสูจน์ว่า สามเหลี่ยม PXS มีมุมทั้ง 3 เท่ากับสามเหลี่ยม RXQ มุมต่อมุม

พิสูจน์ $\because$ $A\hat{P}X$ และ $R\hat{S}Q$ ตั้งอยู่บนส่วนโค้ง RQ ด้วยกัน

$\therefore$ $R\hat{P}X = R\hat{S}Q$ (ท.บ.43)

โดยทำนองเดียวกัน

$P\hat{R}X = S\hat{Q}X$ (ท.บ. 34)

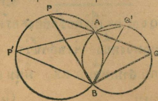
$\therefore$ $P\hat{X}R = Q\hat{X}S$ (ท.บ. 16)

$\therefore$ $\triangle$ PXS กับ $\triangle$ RXQ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากับมุมต่อมุม

ซ.ต.พ.

3/194 โจทย์ วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B มีเส้นต่อ PAQ ลากผ่านจุด A และไปสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง จงพิสูจน์ให้เห็นว่า PQ จะทำมุมที่จุด B เป็นมุมที่คงตัวเสมอ.

(H & S 3/170)



วิธีพิสูจน์ ให้ P_1Q_1 เป็นตำแหน่งใหม่ของ PQ ซึ่งลาก ผ่าน
จุด A ลาก PB, QB, P_1B และ Q_1B

$$A\hat{P_1}B = A\hat{P}B \qquad (\text{ท.บ. } 43)$$

$$A\hat{Q_1}B = A\hat{Q}B \qquad (\text{ท.บ. } 43)$$

$$\therefore \quad A\hat{P_1}B + A\hat{Q_1}B = A\hat{P}B + A\hat{Q}B$$

$$\therefore \quad P_1\hat{B}Q_1 = 180^\circ - (A\hat{P_1}B + A\hat{Q_1}B)$$

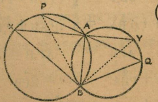
$$\text{และ} \quad P\hat{B}Q = 180^\circ - (A\hat{P}B + A\hat{Q}B)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad P_1\hat{B}Q_1 = P\hat{B}Q$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $P\hat{B}Q$ มีขนาดคงที่ไม่ว่าเส้นตรง PAQ จะเปลี่ยนที่ไปอย่างไร

4/194 โจทย์ วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B มีเส้นตรง PAQ และ XAY ลากผ่านจุด A ไปสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง จงพิสูจน์ว่า ส่วนโค้ง PX และ QY ต่างกรับมุมที่เท่ากันที่จุด B.

(H & S 4/170)



พิสูจน์ ใช้วิธีในข้อ 3 พิสูจน์ได้ว่า

$$\hat{XBY} = \hat{PBQ}$$

$$\therefore \hat{XBY} - \hat{PBY} = \hat{PBQ} - \hat{PBY}$$

$$\hat{PBX} = \hat{QBY}$$

ซ.ต.พ.

5/194 โจทย์ P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนส่วนโค้งของส่วนของวง-กลมซึ่งมี AB เป็นคอร์ด และมุม PAB กับมุม PBA ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรงสองเส้น และเส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด O จงหาโลกัสของจุด O

(H & S 6/170)

วิธีหา กำหนดให้ P' เป็นตำแหน่งใหม่ของ P บนส่วนโค้งซึ่งมี AB เป็นคอร์ด และ O' เป็นจุดซึ่งเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{P'AB}$ และ $\hat{PBA}$ มาพบกัน

$$\hat{OAB} + \hat{OBA} = \frac{1}{2}\left(\hat{PAB} + \hat{PBA}\right) \quad \text{(โจทย์)}$$

$$\hat{O_1AB} + \hat{O_1BA} = \frac{1}{2}\left(\hat{P_1AB} + \hat{P_1BA}\right) \quad (\text{,,})$$

$$\therefore \hat{APB} = \hat{AP_1B} \quad \text{(บ.ท. 39)}$$

แต่ $\hat{PAB} + \hat{PBA} = 180^\circ - \hat{APB}$ (ท.บ. 16)

และ $\hat{P_1AB} + \hat{P_1BA} = 180^\circ - \hat{AP_1B}$ (,,)

ดังนั้น $\hat{AOP} = \hat{AO_1B}$ (พิสูจน์ได้โดยอาศัย ท.บ. 16)

มุมทั้งสองนี้ ตั้งอยู่บนคอร์ด AB และอยู่บนด้านข้างเดียวกัน

∴ จุด O และ O′ อยู่บนส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน (ท.บ. 43)

∴ โลกัสของ O เดินเป็นวงกลมที่ตั้งอยู่บนอาร์ค AB

6/195 โจทย์ ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดกัน ภายในวงกลมวงหนึ่ง จะทำให้เกิดมุมๆ หนึ่ง ซึ่งกางเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งตั้งอยู่บนครึ่งหนึ่งของผลบวกของอาร์ค ซึ่งคอร์ดทั้งสองนี้ตัดออก

(H & S 6/170)

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

AB กับ CD เป็นคอร์ดตัดกันที่จุด E

ให้ X เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AC

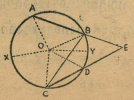
และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง BD

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{AEC} = \hat{AOX} + \hat{BOY}$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\widehat{AOX} &= \widehat{XOC} && (\text{ท.บ. } 43)\\
&= \tfrac{1}{2}\,\widehat{AOC}\\
\widehat{BOY} &= \widehat{DOY} && (\text{ท.บ. } 43)\\
&= \tfrac{1}{2}\,\widehat{BOD}\\
\widehat{ABC} &= \tfrac{1}{2}\,\widehat{AOC}\\
\text{และ}\quad \widehat{BCD} &= \tfrac{1}{2}\,\widehat{BOD}\\
\therefore\quad \widehat{ABC} + \widehat{BCD} &= \tfrac{1}{2}\left(\widehat{AOC} + \widehat{BOD}\right)\\
&= \widehat{AOX} + \widehat{BOY}\\
\text{แต่}\quad \widehat{AEC} &= \widehat{ABO} + \widehat{BCD}\\
& && (\text{บทแทรก ท.บ. } 16)\\
\therefore\quad \widehat{AEC} &= \widehat{AOX} + \widehat{BOY}
\end{aligned}$$

7/195 โจทย์ ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดกันภายนอกวงกลม จะทำให้เกิดมุม ๆ หนึ่งซึ่งกาง เท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งตั้งอยู่บนครึ่งหนึ่งของผลต่างของส่วนโค้งซึ่งคอร์ดทั้งสองนี้ตัดออก. (H & S 7/170)



ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
AB และ CD เป็นคอร์ด 2 คอร์ดถูกต่อออก
ไปตัดกันภายนอกวงกลมที่จุด E ให้ X และ Y
เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AC และ BD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{BED} = \hat{AOX} - \hat{BOY}$

พิสูจน์ $\hat{BED} + \hat{BCD} = \hat{ABC}$ บทแทรก ท.บ.16

$\therefore \quad \hat{BED} = \hat{ABC} - \hat{BCD}$

โดยอาศัย ท.บ. 38 (ตามวิธีในข้อ 6)

เราได้ $\hat{ABC} = \frac{1}{2}\hat{AOC}$

และ $\hat{BCD} = \frac{1}{2}\hat{BOD}$

ดังนั้น $\hat{BED} = \hat{ABC} - \hat{BCD} = \frac{1}{2}\hat{AOC}\ \frac{1}{2}\hat{BOD}$

แต่เราอาจจะพิสูจน์ได้โดยอาศัย ท.บ. 43 ได้ว่า

$\hat{AOX} = \frac{1}{2}\hat{AOC}$

และ $\hat{BOY} = \frac{1}{2}\hat{BOD}$

$\therefore \quad \hat{BED} = \hat{AOX} - \hat{BOY}$

ซ.ต.พ.

8/196 โจทย์ ผลบวกของส่วนโค้ง ซึ่งตัดออกด้วยคอร์ด
สองคอร์ดที่ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน ย่อมเท่ากับ
ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบวง (H & S 8/170)

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

AB,CD เป็นคอร์ดตัดกันตั้งฉากที่ E

จะต้องพิสูจน์ว่า อาร์ค AD + อาร์ค BC

= อาร์ค AC + อาร์ค BD

พิสูจน์ ลาก AC, AD

ใน $\triangle$ ACE, $\hat{AED} = \hat{CAB} + \hat{DCA}$ (ท.บ. 16)

$= 1$ ∟ฉ (โจทย์)

ใน $\triangle$ ADE, $\hat{AEC} = \hat{DAB} + \hat{ADC}$ (ท.บ. 16)

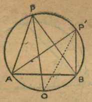
$= 1$ ∟ฉ

$\therefore \hat{CAB} + \hat{DCA} = \hat{DAB} + \hat{ADC}$

$\therefore$ อาร์คBC + อาร์ค AD = อาร์ค BD + อาร์ค AC

(ท.บ. 42)

9/196 โจทย์ ถ้า AB เป็นคอร์ดตายตัวของ วงกลม วงหนึ่ง และ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง อยู่บน ส่วนโค้ง ซึ่งตัดออก ด้วยคอร์ด AB, แล้วเส้น ที่แบ่ง ครึ่งมุม APB จะ ตัดส่วนโค้ง ที่อยู่ ตรงข้ามใน ที่จุดเดียวกัน เสมอ ไม่ว่า P จะอยู่ในที่ใด ๆ. (H & S 9/170)



ให้ PO แบ่งครึ่งมุม APB และพบคอร์ดตรงข้ามที่จุด O ให้ P' เป็นตำแหน่งใหม่ของ P ลาก AP', BP' และ OP'

พิสูจน์ $\because \hat{APO} = \hat{BPO}$

$\therefore$ ส่วนโค้ง AO = ส่วนโค้ง BO (ท.บ. 42)

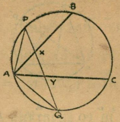
ดังนั้น $\hat{AP'O} = \hat{BP'O}$ (ท.บ. 43)

นั่นคือ OP' เป็นเส้นแบ่งครึ่ง AP'B

$\therefore$ เส้นแบ่งครึ่ง $\hat{APB}$ ย่อมพบกันที่จุด O ไม่ว่า P จะอยู่ที่ใดบนส่วนของวงกลมนี้ ซ.ต.พ.

10/196 โจทย์ AB, AC เป็นคอร์ดสองคอร์ดของวงกลม P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งน้อย ซึ่งถูกตัดออกด้วยคอร์ดทั้งสองนี้ ถ้าต่อ PQ, ตัดเส้น AB ที่ X และ AC, ที่ Y จงพิสูจน์ว่า AX = AY

(H & S 10/170)



วิธีพิสูจน์ ลาก AP และ AQ

∵ ส่วนโค้ง AP = ส่วนโค้ง PB

∴ $\hat{AQP} = \hat{PAB}$ (ท.บ. 43)

นั่นคือ $\hat{AQY} = \hat{PAX}$

∵ ส่วนโค้ง QC = AQ

∴ $\hat{QAC} = \hat{APQ}$ (ท.บ. 43)

นั่นคือ $\hat{QAY} = \hat{APX}$

∴ $\hat{AQY} + \hat{QAY} = \hat{APX} + \hat{PAX}$

แต่ $\hat{AQY} + \hat{QAY} = \hat{AYX}$ (บทแทรก ท.บ.16)

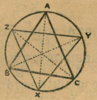
และ $\hat{PAX} + \hat{APX} = \hat{AXY}$ (,, ,, 16)

∴ $\hat{AXY} = \hat{AYX}$

ดังนั้น AX = AY (ท.บ. 6)

ช.ต.พ.

11/196 โจทย์ สามเหลี่ยม ABC บรรจุอยู่ในวงกลม, และเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมไปพบเส้นรอบวงที่จุด X, Y, Z. จงพิสูจน์ว่ามุมของสามเหลี่ยม XYZ จะเท่ากับ $90^\circ - \frac{A}{2}, 90^\circ - \frac{B}{2}, 90^\circ - \frac{C}{2}$ ตามลำดับ ((H & S 11/170)



วิธีพิสูจน์ $\therefore \quad \hat{AXZ} = \hat{ACZ}$ (ท.บ. 43)

$$= \frac{\hat{C}}{2}$$

$\therefore \quad \hat{AXY} = \hat{ABY}$ (ท.บ. 43)

$$= \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{AXZ} + \hat{AYZ} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$$

นั่นคือ $\quad \hat{ZXY} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$

$$\therefore \quad \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - A$$

$$\therefore \quad \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ - \hat{A}$$

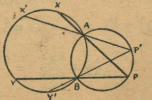
$$Z\hat{X}Y = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

ตามทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$X\hat{Y}Z = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

และ $$X\hat{Z}Y = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$ ซ.ต.พ.

12/197 โจทย์ วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และ B จากจุด P ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง มีเส้นตรงลากไปยังจุดทั้งสองนี้ จงพิสูจน์ว่า เมื่อต่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไปตัดเส้นรอบวงของวงกลมอีกวงหนึ่ง ส่วนโค้งที่อยู่ระหว่างปลายทั้งสองของเส้นคู่นี้มีค่าคงตัวเสมอ ไม่ว่า P จะเลื่อนไปอยู่ในที่ใด ๆ. (H & S 12/170)



ให้ P เป็นจุดบนเส้นรอบวง PAX และ PBY เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด P และให้ P' เป็นจุดบน

เส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน $P'AX'$ และ $P'BY'$ เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด P'

จะต้องพิสูจน์ว่า ส่วนโค้ง XY = ส่วนโค้ง $X'Y'$

พิสูจน์ $\quad P\hat{A}P' = P\hat{B}P' \quad$ (ท.บ. 43)

แต่ $\quad X\hat{A}X' = P\hat{A}P' \quad$ (ท.บ. 3)

และ $\quad Y\hat{A}Y' = P\hat{B}P' \quad$ (ท.บ. 3)

$\therefore \quad XAX' = YAY'$

ดังนั้นส่วนโค้ง XX' ส่วนโค้ง YY' (ท.บ. 42)

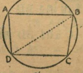
นั่นคือ ส่วนโค้ง $XX' + X'Y$ = ส่วนโค้ง $YY' + X'Y$

$\therefore$ ส่วนโค้ง XY = ส่วนโค้ง $X'Y'$ ซ.ต.พ.

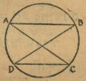
13/197 โจทย์ เส้นตรงที่ต่อปลายทั้งสองของคอร์ดขนานในวงกลมวงหนึ่ง

(i) ต่อไปทางเดียวกัน (ii) ต่อสวนกัน

ย่อมยาวเท่ากัน. (H & S 13/171)



รูปที่ 1



รูปที่ 2

ตอน (i) ให้คอร์ด AB // CD เส้นตรง AD และ BC ต่อปลายคอร์ดทั้งสอง

จะต้องพิสูจน์ว่า AD = BC

พิสูจน์ จาก BD

$\because$ $\hat{ABD} = \hat{BDC}$ (ท.บ. 14)

$\therefore$ ส่วนโค้ง AD = ส่วนโค้ง BC (ท.บ. 42)

ดังนั้น AD และ BC เป็นคอร์ดซึ่งตัดส่วนโค้งออกเท่ากัน

$\therefore$ AD = BC (ท.บ. 45)

ตอน (ii) ให้ AC และ BD เป็นเส้นต่อข้างท้ายของคอร์ด AB และ CD

จะต้องพิสูจน์ว่า AC = BD

พิสูจน์ $\therefore$ ส่วนโค้ง BC = ส่วนโค้ง AD

(โดยวิธีพิสูจน์มาแล้ว)

เอาส่วนโค้ง AB บวกเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore$ ส่วนโค้ง AC = ส่วนโค้ง BD

ดังนั้นคอร์ด AC และ BD ตัดส่วนโค้งออกเท่า ๆ กัน

$\therefore$ AC = BD

14/197 โจทย์ A เป็นจุดตัดของวงกลมสองวงที่เท่ากัน มี

เส้นตรง PAQ, XAY ลากผ่านจุดนี้ จงพิสูจน์ว่า

คอร์ด PX = คอร์ด QY (H & S 14/171)

พิสูจน์ PAX = QAY (ท.บ. 3)

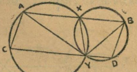
ดังนั้นส่วนโค้ง PX = ส่วนโค้ง QY (ท.บ. 42)

(ดูหมายเหตุท้าย ท.บ. 45)

∴ คอร์ด PX = คอร์ด QX (ท.บ. 45)

15/197 โจทย์ เส้นขนานสองเส้นลากผ่านจุดตัดทั้งสองของวงกลมสองวงไปสุดที่เส้นรอบวงทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่า เส้นที่ลากต่อปลายทั้งสองของเส้นขนานไปทางเดียวกันย่อมเท่ากัน.

(H & S 15/171)



ให้ AB ขนานกับ CD (ดูรูป)

จะต้องพิสูจน์ว่า AC = BD

พิสูจน์ ลาก AY, BY, และ XY

ในวงกลม AXYC

$\hat{AYC}$ = XAY (ท.บ. 14)

∴ ส่วนโค้ง AC = ส่วนโค้ง XY (ท.บ. 42)

∴ คอร์ด AC = คอร์ด XY (ท.บ. 45)

ในวงกลม BXYD

$\hat{BYD} = \hat{XBY}$ (ท.บ. 14)

∴ ส่วนโค้ง BD = ส่วนโค้ง XY (ท.บ. 42)

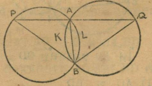
ดังนั้นคอร์ด BD = คอร์ด XY (ท.บ. 45)

∴ คอร์ด AC = คอร์ด BD

ซ. ต. พ.

16/198 โจทย์ วงกลมที่เท่ากันสองวงตัดกันที่จุด A และ B, และเส้นตรง PAQ ลากผ่านจุด A ไปสุดที่เส้นรอบวงทั้งสอง: พิสูจน์ว่า BP = BQ

(H & S 61/171)



พิสูจน์ วงกลม PALB และวงกลม QAKB มีคอร์ด AB เป็นคอร์ดร่วม

∴ ส่วนโค้ง AKB = ส่วนโค้ง ALB (ท.บ. 44)

$\therefore \quad A\hat{P}B = A\hat{Q}B$ (ท.บ. 43)

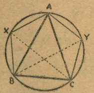
$\therefore \triangle$ BPQ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วซึ่งมี

BP = BQ (ท.บ. 5)

ซ.ต.พ.

17/198 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วบรรจุอยู่ภายในวงกลมวงหนึ่ง และเส้นที่แบ่งครึ่งมุมที่ฐานทั้งสองไปพบเส้นรอบวงที่จุด X และ Y จงพิสูจน์ว่ารูป BXAYC มีด้านเท่ากันสี่ด้าน.

ถ้าเมื่อจะให้รูปห้าเหลี่ยม BXAYC มีด้านเท่ากันซึ่งกันและกันทุก ๆ ด้าน จะต้องทำอย่างไรกับมุมต่าง ๆ ของรูป $\triangle$ ABC จึงจะได้ผลตามต้องการ ? (H & S 17/171)



ให้ XC แบ่งครึ่ง $A\hat{C}B$

และ YB แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$

พิสูจน์ (i) $\because$ YB แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$

$\therefore$ $A\hat{B}Y = Y\hat{B}C = \frac{1}{2}\ A\hat{B}C$

และ XC แบ่งครึ่ง $A\hat{C}B$

$\therefore$ $A\hat{C}X = X\hat{C}B = \frac{1}{2}\ A\hat{C}B$

แต่ $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ (ท.บ. 5)

$\therefore$ $A\hat{B}Y = Y\hat{B}C = A\hat{C}X = X\hat{C}B$

$\therefore$ ส่วนโค้ง AY = ส่วนโค้ง YC = ส่วนโค้ง AX

= ส่วนโค้ง BX (ท.บ. 42)

$\therefore$ คอร์ด AY = คอร์ด YC = คอร์ด AX

= คอร์ด BX (ท.บ. 45)

นั่นคือ AXBYC มีด้านเท่า 4 ด้าน

ซ. ต. พ.

พิสูจน์ (ii) ถ้า BC = BX = ... ฯ ล ฯ

$\therefore$ ส่วนโค้ง BC = ส่วนโค้ง BX (ท.บ. 44)

และ $B\hat{A}C = B\hat{C}X$ (ท.บ. 43)

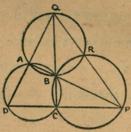
$= \frac{1}{2}\ A\hat{C}B$

$\therefore$ รูป BXAYC มีด้านเท่ากัน 5 ด้าน เมื่อมุม BAC ซึ่งเป็นมุมยอด มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของมุมฐาน.

ซ ต. พ.

18/198 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมที่บรรจุภายในวงกลม และด้านตรงข้าม AB, DC ต่อออกไปพบกันที่จุด P และ CB, DA ต่อไปพบกันที่จุด Q: ถ้าวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม PBC, QAB ตัดกันที่จุด R จงพิสูจน์ว่าจุด P,R,Q เป็นเส้นตรงเดียวกัน.

(H & S 18/171)



พิสูจน์ ลาก BR

$\widehat{BCD} + \widehat{DAB} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 40)

$\widehat{QAB} + \widehat{DAB} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 1)

$\therefore \quad \widehat{QAB} = \widehat{BCD}$ .... (1)

$\widehat{PRB} + \widehat{PCB} = 2$ ∟ฉ (ท.บ. 40)

$\widehat{BCD} + \widehat{PCB} = 2$ ∟ฉ

$\therefore \quad \widehat{BCD} = \widehat{PRB}$ .... (2)

ดังนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ $\widehat{QAB} = \widehat{PRB}$

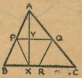
แต่ $\hat{QAB} + \hat{QRB} = 2$ ⊾ฉ (ท.บ.40)

ดังนั้น $\hat{PRB} + \hat{QRB} = 2$ ⊾ฉ

∴ PR กับ QR ต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ซ.ต.พ.

19/198 โจทย์ P, Q, R, เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ X เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้าม: จงแสดงให้เห็นว่าจุด P, Q, R, X ทั้งสี่จุดนี้วงกลมล้อมได้ (H & S 19/171)



i) ถ

พิสูจน์ ลาก PQ, QR, PX และให้ PQ ตัด AX ที่ Y

∵ P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน 2 ด้านของ △

∴ PQ // BC (โดยข้อ 2 แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 22)

โดยทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า QR // AB

ดังนั้นเราพิสูจน์ได้ว่า $\hat{AYP}$ และ PYX ต่างเท่ากับ 1 ⊾ฉ (ท.บ. 14)

$\therefore$ P เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

เส้นตรง PY // BX

$\therefore$ AY = YX (โดยข้อ 1 แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 22)

ใน $\triangle$ APY และ $\triangle$ PYX

$\therefore \begin{cases} AY = YX & \text{(พิสูจน์มาแล้ว)} \\ PY \text{ เป็นด้านร่วม} & \\ A\hat{Y}P = P\hat{Y}X & \text{(มุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ ทั้งสองเท่ากันโดย (ท.บ. 4)

ดังนั้น $A\hat{P}Y = Y\hat{P}X$

แต่ $A\hat{P}Y = P\hat{B}R$ (ท.บ. 14)

$\therefore Y\hat{P}X = P\hat{B}R$

$\therefore P\hat{B}R + Q\hat{R}B = 2\,\llcorner$ฉ (ท.บ. 14)

$\therefore Y\hat{P}X + Q\hat{R}B = 2\,\llcorner$ฉ

ดังนั้น $\square$ PQRX มีวงกลมประกอบได้

(บทกลับ ท.บ. 40)

20/199 โจทย์ ใช้แบบฝึกหัดข้อ 18, พิสูจน์ว่าจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม และจุดปลายทั้งสามของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุดยอดทั้งสาม

ของสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้าม ย่อมอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง. (H & S 20/121)

ให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง PQR เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AC และ BC ตามลำดับ AX ตั้งฉากกับ BC เส้น BY ตั้งฉากกับ AC และ CZ ตั้งฉากกับ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า PQRXYZ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน

พิสูจน์ โดยข้อ 19 เราได้จุด PQRX อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง

จุด PQRY อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง

จุด PQRZ " " " "

แต่วงกลมซึ่งผ่านจุด PQX ได้นั้นมีวงเดียวเท่านั้น

(ตาม ท.บ. 32)

∴ วงกลมซึ่งมีเส้นรอบวงผ่านจุด PQRXXY และ Z คือวงกลมวงเดียวกัน

∴ จุด PQ XRYZ อยู่ในเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน

21/199 โจทย์ ถ้ามีสามเหลี่ยมชุดหนึ่งสร้างขึ้นบนด้านที่ตายตัว และมีมุมยอดเท่าที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยม ย่อมผ่านจุดๆ หนึ่งที่ตายตัว. (H & S 21/171)

ให้ ABC, A′BC A″BC เป็นรูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่สร้างอยู่บนด้าน BC ซึ่งคงที่

จะต้องพิสูจน์ เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A, A′ A″ ผ่านจุดคงที่จุดหนึ่ง

พิสูจน์ ∵ สามเหลี่ยม ABC, A′BC A″BC ตั้งอยู่บนฐานคงที่ BC และมีมุมยอดคงที่

∴ สามเหลี่ยมเหล่านี้ต้องอยู่ในวงกลมเดียวกัน (บทกลับ ท.บ. 39)

ให้ AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A ของ △ ABC ตัดเส้นรอบวงที่ X

∵ $B\hat{A}X = C\hat{A}X$

∴ อาร์ค BX = อาร์ค XC (ท.บ. 42)

∴ X เป็นจุดกึ่งกลางของอาร์ค BC

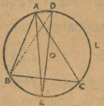
ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า A′X, A″X แบ่งครึ่งมุม $B\hat{A'}C$ และ $B\hat{A''}C$ นั่นคือ เส้นแบ่ง

ครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยมย่อมผ่านจุดคงที่ X

$\therefore$ $\triangle$ ทุกรูป มีมุม ยอดบน ส่วนโค้งนี้ย่อมมีมุมยอดเท่ากับ $\hat{D}$ แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ โดย AT ให้ T อยู่บนส่วนโค้งน้อย เราพิสูจน์ได้โดย ท.บ. 43 ว่า จุด T เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งน้อย BC และโดยทำนองเดียวกัน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ เหล่านี้ย่อมพบจุด T จุดเดียวกัน

22/199 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่บรรจุในวงกลมวงหนึ่ง, และ E เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งที่ตัดออกด้วยเส้น BC และอยู่ตรงข้ามกับ A: ถ้าจากจุด E ลากเส้นผ่าศูนย์กลาง ED, จงพิสูจน์ว่ามุม DEA เป็นครึ่งหนึ่งของผลต่างของมุม B และ C

(H & S 22/171)



วิธีพิสูจน์ $\because$ ED เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\therefore$ EAD เป็นมุมฉาก (ท บ. 41)

$\therefore \quad \hat{BDE} = \hat{BAE}$ (ท.บ. 43)

แต่ $\quad \hat{BAE} = \frac{\hat{ABC}}{2}$ หรือเรียกว่า $\frac{\hat{A}}{2}$

$\therefore \quad \hat{BDE} = \frac{\hat{A}}{2}$

และ $\quad \hat{ADB} = \hat{ACB}$ หรือ $\hat{C}$ (ท.บ. 43)

$\therefore \quad \hat{ADE} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{C}$

$\therefore$ $\triangle$ ADE มีมุม $\hat{EAD}$ เท่ากับ 90°

$\therefore \quad \hat{AED} = 90^\circ - \hat{ADE}$

(พิสูจน์ได้โดย ท.บ. 16)

$$= 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{C} \quad \text{.................}(A)$$

ใน $\triangle$ ABC

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

$\therefore$ โดยแทนค่าของมุม $\frac{\hat{A}}{2}$ ในสมการ (A) จะได้

$$\hat{AED} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}\right) - \hat{C}$$

$$= 90^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} - \hat{C}$$

$$= \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$$

ซ.ต.พ.

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ศึกษานุกูล
332-4 ถนนบำรุงเมือง พระนคร
ถิ่นฟอง อ. สกุล ผู้พิมพ์โฆษณา 2491