

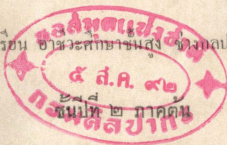
ศ. ๕๕
พ.ร.บ.

ค. ๕๗๑๓.

ประมวลคณิตศาสตร์

สำหรับ

นักเรียน อาชีวศึกษาชั้นสูง ข้างกลปทุมวัน



รวบรวมขึ้นเพื่อใช้ในโรงเรียนข้างกลปทุมวัน

30

352

โดย อเนก สุเสารัจ

(สงวนลิขสิทธิ์)

๗๖๓๘

สารบัญ

ภาคพหุคูณ

หอสมุดแห่งชาติ
9 ก.ย. 2534
หน้า ๑-๑๕
รวมศิลปากร

บทที่ ๗ พ. การแปรผัน Variation หน้า ๑-๑๕
การแปรผันโดยตรง, การแปรผันโดย
กลับ, การแปรผันต่อเนื่อง
แบบฝึกหัดที่ ๒๔ พ. หน้า ๖-๑๕

บทที่ ๘ พ. กระบวนขยาย
Progressions หน้า ๑๕-๖๕

กระบวนขยายเลขคณิต, เรขาคณิต
และ ฮาร์โมนิก, สูตร หาเทอม,
ผลบวก, ตัวกลาง และ ความสัมพันธ์
ของตัวกลางทั้งสาม รวมทั้ง หัวข้อเกี่ยว
กับขอบเขต

แบบฝึกหัดที่ ๒๕ พ.	หน้า ๒๓-๓๒
แบบฝึกหัดที่ ๒๖ พ.	" ๔๓-๕๐
แบบฝึกหัดที่ ๒๗ พ.	" ๕๖-๕๘
แบบฝึกหัดที่ ๒๘ พ.	" ๖๒-๖๓
แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ ๕	" ๖๔-๖๕

บทที่ ๙ พ. ทฤษฎีทวินามไบนอมิเยล หน้า ๖๖-๗๘

การขยาย $(x+y)^n$, สมบัติ ๖ ประการ
ของการขยาย เทอมที่ r ของการขยาย

แบบฝึกหัดที่ ๒๙ พ.	หน้า ๗๑
แบบฝึกหัดที่ ๓๐ พ.	" ๗๖-๗๘

ภาคตรีโกณมิติ

บทที่ ๖ ต. พังก์ชันของมุมร่วมกันบางมุม

หน้า ๓๕-๔๘

พังก์ชันของมุม $90^\circ - A$, $180^\circ - A$,
 $180^\circ + A$, $90^\circ + A$, $-A$, $360^\circ + A$,

และ $360^\circ - A$

แบบฝึกหัดที่ ๑๕ ต.

หน้า ๘๖-๘๘

บทที่ ๗ ต. พังก์ชันของมุมประกอบกัน

หน้า ๘๙-๙๖

พังก์ชันของ $A+B$, $A-B$, $A+B+C$

แบบฝึกหัดที่ ๑๖ ต. และ ๑๗ ต. หน้า ๙๒-๙๖

บทที่ ๘ ต. พังก์ชันของมุมพหุคูณ หน้า ๙๗-๑๐๓

พังก์ชันของ $2A$, $3A$,

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ ต.

หน้า ๙๘-๙๙

แบบฝึกหัดที่ ๑๙ ต.

๑๐๒-๑๐๓

บทที่ ๙ ต. การเปลี่ยนของผลคูณ

และผลบวก

หน้า ๑๐๔-๑๑๐

การเปลี่ยนผลคูณ เป็นผลบวก, ผลลบ

และการเปลี่ยนผลบวก, ผลลบ เป็น

ผลคูณ

แบบฝึกหัดที่ ๒๐ ต.

หน้า ๑๐๖-๑๐๗

แบบฝึกหัดที่ ๒๑ ต.

๑๐๘-๑๑๐

บทที่ ๗ พ. เลขหมู่ ๗352

การแปรผัน Variation

เลขทะเบียน ๗๓๕๒ ๗๘๘๒
การแปรผัน หมายถึง การที่ ค่า ๒ ค่า เปลี่ยน
แปลงไปโดยมีความสัมพันธ์ต่อกันอยู่ มีอยู่ ๒ ประเภท
คือ

พ 7. 1 การแปรผันโดยตรง Direct Variation

ถ้า x แปรผันไปตาม y คือเมื่อ y มากขึ้น
 x ก็มากขึ้นด้วย เมื่อ y น้อยลง x ก็น้อยลงด้วย
เช่น เป็นการแปรผันโดยตรง

ตัวอย่าง ระยะทาง แปรผันโดยตรงตามเวลา
ที่เคลื่อนที่ เพราะถ้าเคลื่อนที่กินเวลาน้อย ก็ได้ระยะ
ทางน้อย และกลับกันก็เช่นเดียวกัน

x แปรผันโดยตรงตาม y เลขห้อง 214

พูดสั้น ๆ ว่า x แปรผันตาม y เลขหมู่ 510
เขียนสั้น ๆ เป็น $x \propto y$ ๗352

เลขทะเบียน

ถ้า $x_1, x_2, \dots$ เป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงไป ของ x
 เมื่อ $y_1, y_2, \dots$ เป็นค่าที่เปลี่ยนแปลง ตามของ y

เราเห็นได้ว่า $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots$

ดังนั้น $\frac{x}{y}$ จึงมีค่าคงที่จำนวนหนึ่งซึ่งสมมติ

ให้ $= k$

$$x \propto y$$

$$\frac{x}{y} = k$$

นั่นคือ $x = ky$

ในทันที k เป็นค่าคงที่ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า นิ
 แปรผัน Variation Constant หรือ (นิพจน์ภาค)
 proportionality constant

หลัก ถ้า $x \propto y$

แปลงเป็นสมการได้ $x = ky$; เมื่อ k เป็นนิ

พ 7. 2 การแปรผันโดยกลับ Inverse Variation

ถ้า x แปรผกผันกับ y คือเมื่อ y มากขึ้น

x กลับน้อยลง และเมื่อ y น้อยลง x กลับมากขึ้น
เช่นเป็นการแปรผกผันโดยกลับ

ตัวอย่าง ความกดกัน กับ ปริมาตรของก๊าซ
ความกดกัน แปรผกผันโดยกลับกับปริมาตรของก๊าซ
เมื่ออุณหภูมิคงที่ เพราะถ้าความกดกันมากขึ้น ปริมาตร
ของก๊าซจะน้อยลง และกลับกัน

x แปรผกผันโดยกลับกับ y
เขียนสั้น ๆ ดังนี้ $x \propto \frac{1}{y}$

ถ้า x_1, x_2 เป็นค่าเปลี่ยนแปลงของ x โดย
สัมพันธ์กับ y_1, y_2 ซึ่งเป็นค่าเปลี่ยนแปลงของ y

เห็นได้ว่า $xy = x_1y_1 = x_2y_2 = \dots$

นั่นคือ xy มีค่าคงที่ ซึ่ง $= k$

$$xy = k$$

$$x = k \times \frac{1}{y}$$

หลัก $x \propto \frac{1}{y}$

$$x = k \times \frac{1}{y}$$

พ 7. 3 การผันแปรต่อเนื่อง Joint Variation

ถ้า x ผันแปร โดยมีความสัมพันธ์กับ y และ z
 เราพบว่า x ผันแปรต่อเนื่องกับ y และ z เช่น

1. ถ้า x แปรผันตาม y และตาม z

$$x \propto y$$

$$\propto z$$

$$\underline{x = kyz}$$

2. ถ้า x ผันแปร ตาม y แต่โดยกลับกับ z

$$x \propto y$$

$$\propto \frac{1}{z}$$

$$x = k \times \frac{y}{z}$$

ตัวอย่าง 1. ตามกฎของชาลส์ ปริมาตรของ
 ก๊าซ ผันแปรตาม อุณหภูมิสัมบูรณ์ วจเขียนเป็นสูตร
 ให้ V เป็น ปริมาตรของก๊าซ
 T เป็น อุณหภูมิสัมบูรณ์

$$V \propto T$$

$$V = kT$$

ตัวอย่าง 2. ตามกฎของบอยล์ ปริมาตรของ
ก๊าซ ผันแปรโดยกลับกับความกดดัน

ให้ p เป็นความกดดัน

$$V \propto \frac{1}{p}$$

$$V = k \times \frac{1}{p}$$

ตัวอย่าง 3. กฎก๊าซ คือ การผันแปรต่อหนึ่งของ 1. กับ 2.

$$V \propto \frac{1}{P}$$

$$\propto T$$

$$V = k \times \frac{T}{p}$$

หรือ $VP = kT$ หรือ $\frac{VP}{T} = k$

ตัวอย่าง 4. ระยะทางที่เทหวัตถุหล่นลงมา
แปรผันตาม กำลังสองของเวลาตก ถ้าเทหวัตถุ

ชั้นหนึ่งตกได้ระยะทาง 144 ฟุตใน 3 วินาที มันจะ
ตกได้ไกลเท่าใดภายใน 5 วินาที

ให้ s เป็นระยะทางที่ตก

t เป็นเวลาตกเป็นวินาที

$$s \propto t^2$$

$$s = kt^2$$

$$144 = k \times 3^2 \quad ; k = 16$$

$$\therefore s = 16 t^2$$

เมื่อ $t = 5$, $s = 16 \times 5^2 = 400$

แบบฝึกหัดที่ ๒๔ พ.

(ข้อ ๑-๑๒ ทำได้ด้วยปากเปล่า)

แสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ในรูปของสมการ :

1. W แปรผันโดยกลับ กับ กำลังสองของ D

2. P แปรผันโดยตรงตาม L และโดยกลับ

กับกำลังสองของ G

3. A แปรผันโดยตรงตามกำลังสามของ B และ
โดยกลับกับผลคูณของ C และ D

4. F แปรผันตาม m_1 และ m_2 และโดยกลับ
กับกำลังสองของ r

5. ปริมาตรของรูปกรวยกลม แปรผันต่อเนืองตาม
ส่วนสูงตรง กับกำลังสองของรัศมีของฐาน

6. ความกดดัน P ของก๊าซ แปรผันต่อเนืองตาม
ความหนาแน่น d ของมัน และอุณหภูมิ
สัมบูรณ์ T

จงกล่าวสมการต่อไปนี้เป็นคำพูดที่แสดง ความ
แปรผัน

(k และ π ทุกแห่งเป็นนิร นอนันต์เป็นตัวแปรผัน)

7. $A = ab$ 8. $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 9. $S = 2 \pi rh$

10. $R = \frac{kw}{v^2}$ 11. $T = \frac{kt}{d}$ 12. $F = \frac{mv^2}{r}$

13. ถ้า x แปรผันโดยกลับกับ y และ $x = \frac{1}{5}$

เมื่อ $y = 3$ จงหาค่า x เมื่อ $y = \frac{2}{3}$

14. ปริมาตรของปิรามิดฐานจตุรัสสัณฐาน แปรผันต่อเนื้อ
 ตามส่วนสูงตรง กับกำลังสองของด้านฐาน
 ปริมาตรของปิรามิดเช่นนี้ เท่ากับ 50 ลบ. ฟุต
 เมื่อดูตรง 6 ฟุต และเหลี่ยมฐาน 5 ฟุต ถ้า
 มันมีปริมาตร 64 ลบ. ฟุต และเหลี่ยมฐาน 4 ฟุต
 มันจะสูงเท่าใด
15. สำหรับมวลจากก้อนหนึ่ง พลังงานเจตนของวงล้อ
 หมุน แปรผันต่อเนื้อตามรัศมีกำลังสองและกำลัง
 สองของอัตราเร็วทางมุม พลังงานเจตนของ
 วงล้ออันหนึ่งซึ่งมีรัศมี 4 ฟุต และหมุนด้วยอัตรา
 เร็ว 1 รอบ ต่อวินาที เท่ากับ 277 ฟุต-ปอนด์
 พลังงานเจตนของวงล้อที่มีมวลเท่ากันแต่รัศมี 5 ฟุต
 และหมุน 3 รอบต่อวินาที จะเป็นเท่าใด.
16. แรงดึงดูดระหว่างเทหวัตถุ 2 ชิ้น แปรผันตาม
 ผลคูณของมวลของมันเป็นสองและโดยกลับกับกำลัง
 สองของระยะทางระหว่างมัน จงเปรียบเทียบความ
 ดึงระหว่างดาวพุธ กับดวงอาทิตย์ และโลก

กับดวงอาทิตย์ ถ้าดาวพรมีมวลเป็น 17 เท่าของ
โลกแต่อยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ เป็น 30 เท่า ที่
โลกอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์

17. ค่าส้นเปลี่ยนของเรอยนต์รลาหนึ่ง เท่ากับ 15 บาท
ต่อชั่วโมง เพิ่มด้วยค่าส้นเปลี่ยนเพิ่มขึ้นซึ่ง

แปรผันตามกำลังสองของอัตราเร็วของเรือ ถ้าค่า
ส้นเปลี่ยนเพิ่มขึ้นเท่ากับ 10 บาทต่อชั่วโมง เมื่อ
อัตราเร็วเท่ากับ 3 ไมล์ต่อชั่วโมง ค่าส้นเปลี่ยน
จะเป็นเท่าใด เมื่อเดินทาง 30 ไมล์ ด้วยอัตรา
เร็ว 6 ไมล์ ต่อชั่วโมง.

18. ค่าแปรผัน y แปรผันตามค่าแปรผัน x และ
เท่ากับ 2 เมื่อ $x = 3$ เขียนกราฟแสดงความ
สัมพันธ์ของ y และ x

19. ถ้า y แปรผันตาม x และโดยกลับกับ z และ
เท่ากับ $\frac{1}{3}$ เมื่อ $x = 2$ และ $z = 3$,
จงหาค่าของ x เมื่อ $y = 1, z = 5$

20. ปริมาตรของรูปทรงกระบอกกลม แปรผันตาม
 ส่วนสูง h และรัศมีของฐาน r กำลังสอง
 ถ้า $v = 254.5$ เมื่อ $h = 9$ และ $r = 3$,
 จงหา r เมื่อ $V = 1000$ และ $h = 15$
21. คาบของคัมภีนาฬิกาสามัญ แปรผันโดยตรงตาม
 กระจกสองของความยาว ถ้าคัมยาว 1 เมตร
 คาบเท่ากับ 1 วินาที จงหาความยาวของคัม ที่มี
 คาบ 2 วินาที
22. ระยะทางซึ่งเทหวัตถุเห็นพื้นโลกตกในวินาทีแรก
 แปรผันโดยกลับกับระยะทางกำลังสองจากจุดศูนย์กลาง
 ของโลก ที่ผิวโลกเทหวัตถุจะตกได้ 32.2 ฟุต
 ในวินาทีแรก ถ้าเทหวัตถุหลุดจากดวงจันทร์และ
 ตกมาสู่โลกเรา จะตกได้ไกลเท่าใดในวินาทีแรก
 ดวงจันทร์อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก 60 เท่า
 รัศมีของโลก
23. น้ำหนักนิรภัย (safe load) บนท่อนวัตถุอัน
 หนึ่งวางตามนอน มีเครื่องรับที่ปลายทั้งสอง

แปรผันต่อเนื่องกับความกว้าง และกำลังสองของ
ความหนา และโดยกลับก็กระยะระหว่างเครื่องรับ
ในการทดลองอันหนึ่งปรากฏว่า สำหรับ ipil beam
ยาว 3 ฟุต กว้าง 1.7 นิ้ว และหนา 1.7 นิ้ว น้ำ
หนักนิรภัยสูงสุด (maximum safe load) เท่ากับ
500 เปาน์ต จงหาว่าน้ำหนักนิรภัยสูงสุดของ ipil beam
ยาว 18 ฟุต กว้าง 4 นิ้ว และหนา 6 นิ้ว

24. ค่าแปรผัน y แปรผันตาม ค่าแปรผัน x กำลัง
สอง และเท่ากับ 36 เมื่อ $x = 3$ เขียน

กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ y และ x

25. ค่าแปรผัน z แปรผันต่อเนื่องกับ x และ
 y และโดยกลับกับ u ; $z = 14$ เมื่อ $x = 4$,
 $y = 7$ และ $u = 6$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = 10$
 $u = 5$ และ $z = 6$

26. แก้วลูกทรงกลม เส้นผ่าศูนย์กลาง $1\frac{1}{2}$ นิ้ว ถ้านำ
มาหลอมแล้วเข้าเป็นลูกกลมภายในกลวง มีรัศมี
วัดถึงภายนอก 4 นิ้ว จะได้ลูกกลมหนาเท่าใด

ปริมาตรของลูกทรงกลม แปรผันโดยตรงตามเส้น
ผ่านศูนย์กลางกำลังสาม

27. กฎข้อที่สามของ Kepler กล่าวว่าไว้ในจักรวาล
กำลังสองของคาบ ของดาวพระเคราะห์ที่วงหนึ่งๆ
แปรผันโดยตรงตาม กำลังสามของระยะทางเฉลี่ย
ของมันจากดวงอาทิตย์ จงใช้กฎนี้ เติมตาราง
ข้างล่างให้เต็ม (คาบ คือเวลาที่มันหมุนรอบ
ดวงอาทิตย์ 1 รอบ)

ดาวพระเคราะห์	โลก	ดาวศุกร์	ดาวอังคาร	ดาวเสาร์
ระยะทางเฉลี่ยจาก เป็นล้านไมล์	92.9	67.2	141.5	483.3
คาบคิดเป็นปี	1			

28. เมื่อเทหวัตถุอื่นหนึ่งหมุน รอบ ส่วน ใด ๆ ของ
วงกลม แรงหนีศูนย์กลาง แปรผันตามมวลกับ

กำลังสองของอัตราเร็ว และโดยกลีบกับรัศมี
ของวงกลม ถ้าแรง 20 หน่วย เกิดขึ้นเมื่อมวล
4 หน่วย เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 5 หน่วย ตาม
เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 5 หน่วย จะเกิดแรง
ก่หน่วย ถ้าอัตราเร็วเป็น 8 และรัศมีเป็น 4

29. กำลังสามของ y แปรผันตาม x และโดย
กลีบกับกรณาทที่สองของ z ถ้า $y = 3$ เมื่อ
 $x = 3, z = 4$ จงหาค่าของ z เมื่อ
 $x = 4, y = 2$

30. จำนวนสั้นต่อวินาทีของเส้นลวดที่ถึงถึง แปรผัน
ตามกรณาทที่สองของแรงยืด และโดยกลีบกับผล
คูณของความยาวและเส้นผ่าศูนย์กลางของ ลวด
ลวดชนิดหนึ่งยาว 3 ฟุต เส้นผ่าศูนย์กลาง $\frac{1}{16}$ นิ้ว
ไต่รับแรงยืด 60 เปาน์คาน้ำหนัก, สั้น n ครั้ง
ต่อวินาที

จงหาความยาวของลวดชนิดเดียวกันที่มีเส้น
ผ่าศูนย์กลาง $\frac{1}{8}$ นิ้ว ไต่รับแรงยืด 80 เปาน์ค

- น้ำหนักซึ่งต้องการให้สั้น 2n ครั้งต่อวินาที
31. ความต้านทานไฟฟ้าของลวดไฟฟ้า แปรผันตามความยาวและโดยกลับกับ กำลังสองของเส้นผ่าศูนย์กลางของลวด จงเปรียบเทียบความต้านทานของลวดชนิดเดียวกัน 2 เส้น เส้นหนึ่งยาว 250 ซม. เส้นผ่าศูนย์กลาง 3 ม.ม. อีกเส้นหนึ่งยาว 200 ซม. เส้นผ่าศูนย์กลาง 1 ม.ม.
32. การส่องสว่างของดวงกำเนิดแสง แปรผันโดยกลับกับระยะทางกำลังสอง ถ้าแผ่นกระดาษซึ่งเดิมอยู่ห่าง 5 ฟุต ถูกนำไปเข้าไปใกล้อีก $1\frac{1}{2}$ ฟุต จำนวนความเข้มของแสงที่เพิ่มขึ้นเป็นเท่าใด
-

บทที่ ๘ พ

กระบวนขยาย Progressions

Progression หมายถึงกระบวนของจำนวนต่าง ๆ
ที่เขียนต่อกันทีละจำนวน และจำนวนเหล่านั้นมีความ
สัมพันธ์พิเศษกันโดยประการใดประการหนึ่ง ก็จะ
แยกพิจารณาต่อไปนี้ ;

พ 8. 1 กระบวนขยายเลขคณิต Arithmetic progression

$$(1) \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots \dots \dots a_n, \quad \dots \dots$$

จะเรียกว่าอยู่ในกระบวนขยายเลขคณิต (A.P.)
ถ้าทุก ๆ เทอมที่ถัดไป ได้มาจากเอาเทอมที่อยู่ ข้าง
หน้าของมันบวกด้วยจำนวนคงที่อันหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า
ผลต่างร่วม common difference

ใน (1) จะเป็นกระบวนขยายเลขคณิต ต่อเมื่อ

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots \dots \dots = \text{ผล}$$

ต่างร่วม (c.d.) ระบุทั่วไปของ A.P. เราเขียนดังนี้

ก. ถ้า a เป็นเทอมแรก, d เป็นผลต่างร่วม

(2) A.P. คิธิ $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$

ข. ถ้า a เป็นเทอมแรก, $-d$ เป็นผลต่าง
รวม (ผลต่างรวมเป็นลบ)

(3) A.P. คิธิ $a, a-d, a-2d, a-3d, \dots$

ตัวอย่าง (1) 3, 8, 13, 18, 23 อยู่ใน A.P.

มี 3 เป็นเทอมแรก, 5 เป็น c.d.

(2) 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, อยู่ใน A.P.

มี 6 เป็นเทอมแรก, -2 เป็น c.d.

การหา c.d. เขาเทอมถัดไปทั้ง — เทอมที่อยู่ข้าง
หน้านั้น โดยจะเลือกเขาเทอมไหนก็ได้ ดูตัวอย่าง
ข้างบนประกอบด้วย

พ 8. 2 สูตรเทอมที่ n ของ A.P.

ถ้า $a, a+d, a+2d, \dots$ อยู่ใน A.P.

ให้ $T_1, T_2, \dots, T_n$ เป็นเทอมที่ 1, 2, ..., T_n

เห็นได้ว่า $T_2 = a+d$; เทอมที่ 2 $= a+(2-1)d$

$T_3 = a+2d$; ,, 3 $= a+(3-1)d$

สรุปได้ว่า ลำดับระสิทธิ์ของ d จะเท่ากับ อินทิย
ของเทอม -1 ดังนั้นเราจะได้สูตร

$$\text{สูตร I} \quad \boxed{T_n = a + (n-1)d}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาเทอมที่ 15 ของ A.P. 2, 5, 8, ...

ในท่น $a = 2, n = 15, d = 3$

$$\therefore T_{15} = 2 + (15-1)3 = \underline{44}$$

ตัวอย่าง 2. ถ้าใน A.P. อินทน์ $T_5 = 0$ และ

$$T_8 = -21 \text{ จงเขียน A.P. นั}$$

$$(T_5) = 5a + (-1)d = 0 \dots (1)$$

$$(T_8) = a + (8-1)d = -21 \dots (2)$$

$$a + 4d = 0 \quad (1)$$

$$a + 7d = -21 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \quad 3d = -21$$

$$d = -7$$

แทนค่า d ใน (1) ; $a - 28 = 0$

$$a = 28$$

$$\therefore \text{A.P. นั คื } 28, 21, 14, 7, \dots$$

หมายเหตุ ถ้าต้องการเขียน A.P. ให้หา
เทอมแรก a และ ผลต่างร่วม d

พ 8. 3 ผลบวกของ n เทอมของ A.P.

ถ้าให้ l เป็นเทอมที่ n หรือ เทอมสุดท้าย
ของ A.P. และเขียนย้อนมาหาต้น จะได้ดังนี้

$l, l-d, l-2d, \dots, a+2d, a+d, a$ ดังนั้น

ถ้าให้ S_n เป็นผลบวกของ n เทอมของ A.P.

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) \\ + (l-d) + l \quad (1)$$

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + \dots (a+2d) \\ + (a+d) + a \quad (2)$$

$$(1) + (2) \qquad 2S_n = n(a+l)$$

$$\text{สูตร II} \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2} (a+l)}$$

โดยที่ l เป็นเทอมที่ n ของ A.P.

$$l = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + a + (n-1)d)$$

$$\text{สูตร III } \boxed{S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]}$$

ตัวอย่าง 1. ผลบวกของเลขคี่ตั้งแต่ 1 ไป 15 จำนวน เป็นเท่าใด

A.P. นกข 1, 3, 5,

ในที่น $a = 1, d = 2, n = 15$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2 \times 1 + (15-1)2)$$

$$= \frac{15}{2} (2+28) = \frac{15}{2} \times 30$$

$$= \underline{\underline{225}}$$

ตัวอย่าง 2. จงเขียน series ของ A.P. ที่

$$S_7 = 30 \text{ และ } S_{12} = -12$$

ให้ a เป็นเทอมแรก

d เป็นผลต่างร่วม

$$S_5 = \frac{5}{2} (2a+4d) = 30 \quad (1)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2a+11d) = -12 \quad (2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad a+2d = 6 \quad (3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad 2a+11d = -2 \quad (4)$$

$$(3) \times 2 \quad 2a+4d = 12 \quad (5)$$

$$(4)-(5) \quad 7d = -14; d = -2$$

$$\text{แทนค่า } d \text{ ใน (3)} \quad a-4 = 6; a = 10$$

$\therefore$ series ของ A.P. ^{นี้} คือ 10, 8, 6, 4,

ตัวอย่าง 3. จงเขียน series ของ A.P. ^{นี้} เมื่อ

$$T_2 + T_5 = 2; T_6 + T_9 = 5 \quad \frac{2}{3}$$

ให้ a เป็นเทอมแรก

d เป็นผลต่างร่วม

$$(T_2+T_5); (a+d)+(a+4d) = 2 \quad (1)$$

$$(a+5d)+(a+8d) = \frac{17}{3} \quad (2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad 2a + 5d = 3 \quad (3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad 6a + 39d = 17 \quad (4)$$

$$(3) \times 3 \quad 6a + 15d = 9 \quad (5)$$

$$(4)-(5) \quad 24d = 8$$

$$d = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\text{แทนค่าใน (3)} \quad 2a + \frac{5}{3} = 3$$

$$a = \frac{2}{3}$$

series คือ $\frac{2}{3}, 1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \dots$

พ 8.4 ตัวกลางเลขคณิต Arithmetic Mean (A.M.)

(1) ตัวกลางเลขคณิตตัวเดียว

ถ้า a, A, b อยู่ใน A.P.

A เป็น A.M. ของ a และ b

ก็ผลต่างร่วม $A-a = b-A$

$$2A = a+b$$

สูตร III
$$A = \frac{a+b}{2}$$

นั่นคือ A.M. ตัวเดียว ระหว่าง 2 เทอมของ A.P. เท่ากับ เทอมทั้งสองบวกกัน หารด้วย 2

(2) ตัวกลางหลายตัว ไม่มีสูตร แต่มีหลักเกณฑ์ทั่วไปในการหา A.M.s ดังนี้

ถ้าต้องการแทรก m A.M.s ลงระหว่าง 2 จำนวน สมมุติว่า a และ b

a, [m เทอม], b (รวมทั้ง a และ b ด้วยมี m+2 เทอม) เราหา A.P. ของ (m+2) เทอม โดยมี a และ b เป็นเทอมแรก และเทอมท้ายตามลำดับ

ตัวอย่าง จงแทรก ตัวกลางเลขคณิต 8 ตัว ลงระหว่าง—1 กับ 23

ในทศ $a = -4$, $T_{10} = 23$, $n = 8+2=10$

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore 23 = -4 + 9d$$

$$d = 3$$

ดังนั้น A.M.s ระหว่าง -4 กับ 23 คือ

$$-4, [-1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,] 23$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๕ พ.

จงหาข้อใดบ้างที่จำนวนเหล่านี้ อยู่ใน A.P.

1. $6, 3, 0, -3, \dots$ 2. $1, -1, -3, 5, \dots$

3. $8, -6, 4, -2, \dots$ 4. $1\frac{1}{2}, 4, 6\frac{1}{2}, 9, \dots$

5. ถ้า a, b, c และ d อยู่ใน A.P. จงเขียน

ในแบบพีชคณิต แสดงสถานะเช่นนี้.

6. จงหาเทอมที่ 34 ของ A.P. :— 2, 6, 10

7. $a = 6$, $n = 20$, $d = -3$ จงหา

T_n และ S_n

8. $a = 43$, $n = 9$, $S_n = 171$ จงหา

T_n และ d

9. $n = 7$, $d = 5$, $S_n = 84$ จงหา

a และ T_n

10. ใน A.P. อันหนึ่ง เทอมที่ 5 เท่ากับ 14 และ
เทอมที่ 13 เท่ากับ 34 จงหา A.P. และเทอม
ที่ 30

11. ผลบวกของ A.P. อันหนึ่ง ถึง n เทอม
เท่ากับ 1625 เทอมที่ 2 เท่ากับ 21 และเทอม
ที่ 7 เท่ากับ 41 จงหา n

• 12. จงหาผลบวกของเลขธรรมชาติ n เทอมแรก

(เลขธรรมชาติ คือ เลขเรียงลำดับกัน และ
เทอมแรกของเลขธรรมชาติคือ 1)

13. ผลบวกของ 5 เทอมใน A.P. เท่ากับ 30
และ ผลบวกของกำลังสองของมันเท่ากับ 220
; ๕
จงหาเทอมเหล่านี้

14. ถ้าผลบวกของ n เทอมของ A.P. เป็น n^2
และผลต่างร่วมเท่ากับ 2 จงเขียน A.P.

15. ผลบวกของ n เทอมของ A.P. อันหนึ่งซึ่ง
มี 5 เป็นเทอมแรก และ 36 เป็นผลต่างร่วม
เท่ากับผลบวกของ $2n$ เทอมของ A.P. อีก
อันหนึ่ง ซึ่งมี 36 เป็นเทอมแรก และ 5 เป็น
ผลต่างร่วม จงหาค่าของ n

16. จงบรรจุ 7 ตัวกลางเลขคณิต ลงระหว่าง 2
กับ 14

17. ชายคนหนึ่งออกเงินให้กู้ 500 บาท ทุก ๆ
 ปี โดยคิดดอกเบี้ยสามัญ 5 % เมื่อสิ้น
 เวลา 25 ปี เขาจะได้ดอกเบี้ยรวมทั้งหมด
 เท่าใด

18. นักท่องเที่ยวสองคนออกเดินทางจากที่เดียวกัน
 และไปทางเดียวกัน คนแรกเดินทางด้วยอัตรา
 เร็วสม่ำเสมอ 6 ไมล์ต่อชั่วโมง ส่วนคนหลัง
 เดินทาง 4 ไมล์ ในชั่วโมงแรก 5 ไมล์ ใน
 ชั่วโมงที่ 2, 6 ไมล์ ในชั่วโมงที่ 3 และ
 ต่อ ๆ ไป นานกี่ชั่วโมงคนหลังจึงจะทันคนแรก

19. จงบรรจุ 5 ตัวกลางเลขคณิต ลงระหว่าง $\frac{3}{5}$
 กับ 3

20. จงหาผลบวกของเลขที่หารด้วย 6 ลงตัว ระหว่าง
 200 กับ 400

21. จงหาผลบวกของเลขธรรมชาติ n เทอมแรก
22. ใน A.P. อันหนึ่ง ผลบวกของ 3 จำนวน
เท่ากับ 21 และผลคูณเท่ากับ 315 จงหา
จำนวนทั้งสาม

23. ผลบวกของ 4 จำนวนใน A.P. เท่ากับ 18
และผลบวกของกำลังสองของมันเท่ากับ 326
จงหาจำนวนเหล่านี้

[หลัก ถ้าโจทย์บอกจำนวนเทอมเป็น k ให้
ตั้งเขา a ไว้กลางดังนี้ : $a-2d, a-d, a, a+d$
 $a+2d$

ถ้าโจทย์บอกจำนวนเทอมเป็น k ให้ตั้งดังนี้
 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$. ($2d$ เป็นผลต่างร่วม)]

24. ผลบวกของ 3 เทอมแรกของ A.P. เท่ากับ -6
และผลบวกของ 5 เทอมแรกเท่ากับ 5 จง
เขียน A.P.

25. ใน A.P. อันหนึ่ง $T_2 + T_6 = 2$ และ $T_8 - T_4 = 1$ จงเขียน A.P.
26. มีเลข 5 จำนวนอยู่ใน A.P. ถ้าเอา 3 เทอมท้ายรวมกันจะได้ 75 และเอาเทอมต้นรวมกับเทอมท้ายได้ 38 จงหาเลขทั้ง 5 จำนวน
27. ถ้าแบ่งเงิน 152 บาท ให้แก่คน 8 คน โดยให้คนต้นได้มากกว่าคนถัดไป 4 บาท ตามลำดับ คนสุดท้ายจะได้รับเงินเท่าใด
28. ระหว่าง 80 กับ 200 มีจำนวนที่หารด้วย 9 ลงตัว และจำนวนที่หารด้วย 9 ลงตัว รวมกันได้เท่าใด
29. จากข้อ 28 มีจำนวนที่หารด้วย 9 ไม่ลงตัว และจงหาผลบวกของจำนวนที่หารด้วย 9 ไม่ลงตัว
30. จะตั้งคนด้วยเลขคี่อะไร ที่รวมกับเลขคี่จำนวนถัดไปอีก 4 จำนวน ได้ 185

หอตมุดแห่งชาด

๒๘

31. ให้ $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3, \dots$ เป็นเทอมของ

A.P. จงหาเทอมที่ 19

32. บรรจุ 8 A.M.s ระหว่าง $-\frac{3}{4}$ ถึง 6

33. จงหาผลบวกของ $2+3\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}+\dots$

ถึง 10 เทอม

34. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-1-\dots$ ถึง 20 เทอม

35. เทอมที่ 5 ของ A.P. คือ 8 และเทอมที่ 11

คือ 17 จงหาผลบวกของ 9 เทอมแรก

36. ในการแข่งขันวิ่งเก็บของ ลูกบอล 15 ลูกวาง

ห่างกันในระยะ 6 ฟุต และกระจากใส่ลูกบอล

วางห่างจากคันแถวของลูกบอล 8 ฟุต ผู้

แข่งขันวิ่งจาก กระ จาก และ เก็บลูกบอลไปใส่

กระจากทีละลูก เขาวิ่งไกลเป็นระยะทั้งหมด

เท่าใด

37. ระหว่าง 144 กับ 446 มีจำนวน ที่หารด้วย 5 ลงตัว และผลบวกของของมันเป็นเท่าใด
38. ชายคนหนึ่งเอาเงินฝาก คลัง ขอมสิน เพิ่มขึ้น เกินละ 2000 บาท โดยได้ดอกเบี้ย สามัญ 2 % ต่อปี เมื่อสิ้นเวลา 10 ปี เขามีเงินรวมทั้งสิ้นเท่าใด
39. ระหว่างเลข 2 จำนวน ถ้าบรรจุ 3 A.M.^s ผลบวกของ 3 A.M.^s เท่ากับ 27 และ ถ้าบรรจุ 5 A.M.^s ผลบวกของมันเท่ากับ 45 จงหาเลข 2 จำนวนนั้น
40. ผลบวกของ 6 เทอมแรกของ A.P. เป็น 15 และผลบวกของ 10 เทอมแรก เป็น -35 จงเขียน A.P. นั้น
41. ผลบวกของเทอมที่ 4 และ 8 ของ A.P. อัน

หนึ่ง เท่ากับ 20 และผลบวกของเทอมที่ 12

และ 15 เท่ากับ— 25 จงหาผลบวกของ 18

เทอมแรก

42. จงหาเลข 3 จำนวนที่อยู่ใน A.P. ซึ่งกำลังสอง
ของเทอมที่ 2 รวมกับผลคูณของเทอมที่ 1

และ 3 ได้—8 และกำลังสองของเทอมแรก

รวมกับกำลังสองของเทอมที่สาม ได้ 40

43. จงหาผลบวกของ A.P. ซึ่งมี 9 เทอม และ

เทอมกลางเท่ากับ 21

44. ลูกกลมกลิ้งหนึ่ง กลิ้งลงตามระนาบเอียงซึ่ง

เอียงเป็นมุม 30° กับระนาบราบ ได้ระยะ

ทาง 8 ฟุต ในวินาทีที่ 1, และได้ระยะ

ทางเพิ่มขึ้นอีก 16 ฟุต ทุก ๆ วินาทีที่

มา ในช่วงวินาทีที่ 10 มันจะเคลื่อนที่ไ

ไกลเท่าใด

45. หากรายการผลการทดลอง เมื่อปล่อยให้

เทหวัตถุชิ้นหนึ่งตกลงโดยอิสระ มดังนี้

ระยะทางเทหวัตถุตกในวินาทีที่ 1 = 16 ฟุต

ระยะทางทั้งหมด เมื่อสิ้น 2 วินาที = 64 ฟุต

„ „ 3 „ = 144 ฟุต

„ „ 4 „ = 256 ฟุต

อยากทราบว่า ในช่วงวินาทีที่ 10 เทหวัตถุ

จะตกได้ไกลเท่าใด

46. ถ้าเทอมที่ n ของ A.P. เท่ากับ $\frac{n}{2}$ และ

ผลบวกถึง n เทอม เท่ากับ n จงหาเทอม

แรก และผลต่างร่วม (ในเทอมของ n)

พ 8. 5 กระบวนขยายเรขาคณิต Geometric

Progression

จำนวนที่เขียนต่อกัน หลาย ๆ จำนวน และ
เรียกว่าอยู่ในกระบวนขยายเรขาคณิต (G.P.) นั้น
เกิดจากเอาเทอมที่อยู่ข้างหน้า คูณด้วย จำนวนคงที่
อันหนึ่ง แล้วใช้เป็นเทอมถัดออกไป

จำนวนคงที่ที่นำมาคูณนี้ เรียกว่าอัตราส่วนร่วม

common ratio

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

จะอยู่ใน G.P. ถ้า

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \text{อัตราส่วนร่วม}$$

รูปทั่ว ๆ ไปของ G.P. เป็นดังนี้

ถ้าให้ a เป็นเทอมแรก

r เป็นอัตราส่วนร่วม (c.r.)

G.P. คือ $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

$$(ar \times r) \quad (ar^2 \times r)$$

ตัวอย่าง 1. $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ อยู่ใน

กระบวนขยายเรขาคณิตเพราะมี 2 เป็นอัตรา

ส่วนร่วม

ตัวอย่าง 2. $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ อยู่

ใน G.P. เพราะมี $\frac{1}{2}$ เป็น c.r.

การตรวจ ว่า เทอมที่เขียนมานั้นอยู่ใน
G.P. หรือไม่ ก็คือหาว่า มีอัตราส่วนร่วมหรือไม่
โดยเลือกที่แห่งใดแห่งหนึ่ง เอาเทอมข้างหลังตั้งหาร
ด้วยเทอมที่มาข้างหน้าของมัน ทดลองหลาย ๆ แห่ง
ถ้าได้ผลหารเท่า ๆ กัน เทอมเหล่านั้นอยู่ใน G.P.

และผลหารที่เกิดขึ้นจากเทอมถัดไปหารด้วยเทอมที่
มาข้างหน้ามัน คือ อัตราส่วนร่วม

พ 8. 6 สูตรหาเทอมที่ n ของ G.P.

ในรูปทั่วไปของ G.P. :

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

$$T_2 = ar \quad ; \quad \text{เทอมที่ } 2 = a \times r^{(2-1)}$$

$$T_3 = ar^2 \quad ; \quad ,, \quad 3 = a \times r^{(3-1)}$$

$$T_4 = ar^3 \quad ; \quad ,, \quad 4 = a \times r^{(4-1)}$$

ดังนั้น ถ้า T_n เป็นเทอมที่ n

หรืออย่างที่ใด ๆ โดยบ่งให้เป็นเทอมท้าย เรา

จะได้สูตร

$$\text{สูตร V} \quad \boxed{T_n \text{ หรือ } l = ar^{(n-1)}}$$

ตัวอย่าง จงหาเทอมที่ 6 ของ G.P. : $3, -\frac{3}{2},$

$$\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots$$

$$\text{ในที่นี้ } a = 3 ; r = -\frac{1}{2} ; n = 6$$

$$\begin{aligned}
 T_6 \text{ หรือ } l &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{6-1} \\
 &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \\
 &= -\frac{3}{32}
 \end{aligned}$$

W 8. 7 ผลบวกของ n เทอมของ G.P.

ให้ S_n เป็นผลบวกของ n เทอมของ G.P.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

คูณตลอดด้วย r

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$$

$$(1)-(2) \quad rS_n - S_n = ar^n - a$$

$$(r-1) S_n = a(r^n - 1)$$

สูตร VI $\left[S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \right]$ ให้เมื่อ $r > 1$

หรือ

$$(2)-(1) \quad S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r) S_n = a(1-r^n)$$

สูตร VII
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
 ใช้เมื่อ $r < 1$

ถ้าในโจทย์ เราไม่รู้เทอมท้าย l แต่รู้จำนวน
เทอม n เราอาจแปลงสูตรได้ดังนี้

$$\text{โดยที่ } ar^n = ar^{n-1}a = lr$$

สูตร VI และ VII จึงแปลงได้เป็น

สูตร VII
$$S_n = \frac{lr-a}{r-1}$$
 ใช้เมื่อ $r > 1$

หรือ

สูตร IX
$$S_n = \frac{a-lr}{1-r}$$
 ใช้เมื่อ $r < 1$

ในกระบวนขยายเรขาคณิต มีจำนวนเป็นตัวยัน
ในสูตรต่าง ๆ 5 จำนวนด้วยกันคือ $a, l, n, r,$

และ S_n ถ้าเรารู้เพียง 3 จำนวน ก็หาหาค่าอื่น ๆ
 ได้โดยเลือกใช้สูตร V-IX สูตรใดสูตรหนึ่ง
 ตัวอย่าง 1. ใน G.P. อันหนึ่ง เทอมแรกเท่ากับ
 $\frac{2}{3}$ และผลบวกจนถึงเทอมที่ n ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{48}$ เป็น
 $\frac{21}{16}$ จงหาอัตราส่วนร่วม และจำนวนเทอม n

$$\text{หาผลบวกใช้สูตร } S_n = \frac{a-r^n}{1-r}$$

$$\text{แทนค่า } \frac{21}{16} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{48} r^n}{1-r} = \frac{32-r^n}{48(1-r)}$$

$$63-63r = 32-r^n$$

$$\text{หรือ } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{ใช้สูตรหาเทอมท้าย } l = ar^{n-1}$$

$$\frac{1}{48} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\text{ดังนั้น } n-1 = 5 \quad n = 6$$

$$\left. \begin{aligned} \text{อัตราส่วนร่วม} &= \frac{1}{2} \\ \text{จำนวนเทอม } n &= 6 \end{aligned} \right\} \underline{\text{ตอบ}}$$

ตัวอย่าง 2. เทอมที่ 3 ของ G.P. เป็น 20 เทอม
ที่ 8 เป็น 640 และผลบวกถึง n เทอม เท่ากับ

20475 จงหา n

$$\text{เทอมที่ 3 : } ar^2 = 20$$

$$\text{เทอมที่ 8 : } ar^7 = 640$$

$$\frac{ar^7}{ar^2} = \frac{640}{20}$$

$$r^5 = 32 = (2)^5$$

$$r = 2$$

$$2^2 a = 20$$

$$a = \frac{20}{4} = 5$$

ใช้สูตรผลบวก

$$20475 = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$2^{n-1} = \frac{20475}{5} = 4095$$

$$2^n = 4099 = 2^{12}$$

$$\underline{n = 12 \text{ ตอบ}}$$

พ 8. 8 ตัวกลางเรขาคณิต Geometric Mean

(1) ตัวกลางเรขาคณิต ตัวเดียว (G)

ในอันดับเรขาคณิต ถ้าในระหว่าง a

กับ b มี G อยู่กึ่งกลางกึ่งน a, G, b,

G เป็นตัวกลางเรขาคณิต ของ a และ b

ถ้าหาอัตราส่วนร่วม

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$$G^2 = ab$$

สูตร X $\boxed{G = \sqrt{ab}}$

(2) ตัวกลางเรขาคณิตหลายตัว ไม่มีสูตร

เฉพาะ

ถ้าต้องการบรรจุ m G.M.s ในระหว่าง a กับ b ให้คำนวณวิธีเช่นเดียวกับการบรรจุ A.M.s คือ series นั้นจะมี $m + 2$ เทอม และมี a เป็นเทอมแรก b เป็นเทอมท้าย

ตัวอย่าง 1 บรรจุ 4 G.M.s ระหว่าง 3 กับ $\frac{32}{81}$

ในทันที $a = 3, T_4 = \frac{32}{81}$ และ

$$n = 4 + 2 = 6$$

ใช้สูตรหาเทอมท้าย

$$\frac{32}{81} = 3r^{6-1} = 3r^5$$

$$r^5 = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$r = \frac{2}{3}$$

ทั้งนี้ 4 G.M.s ระหว่าง 3 กับ $\frac{32}{81}$ คือ

$$3, \left[2, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27} \right], \frac{32}{81}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาเลข 3 จำนวนซึ่งอยู่ใน G.P. ถ้าผล
บวกของมันเท่ากับ 42 และผลคูณเท่ากับ 512

ให้ 3 จำนวนนั้นคือ a, ar, ar^2

$$\text{ผลคูณ} \quad a^3 r^3 = 412$$

$$\text{ถอดกรณฑ์สาม} \quad ar = 8; a = \frac{8}{r}$$

$$\text{ผลบวก} \quad a + ar + ar^2 = 42$$

$$a(1+r+r^2) = 42$$

$$\frac{8}{r}(1+r+r^2) = 42$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0$$

$$(4r-1)(r-4) = 0$$

$$r = \frac{1}{4} \text{ หรือ } 4$$

จำนวนทั้งสาม คือ 32, 8, 2 (หรือ 2, 8, 32)

แบบฝึกหัดที่ ๒๖ พ.

(ข้อ 1—6 ทำได้ด้วยปากเปล่า)

จงบอกว่าตัวเลขข้อไหนเป็น G.P. และเพราะเหตุใด

1. 4, 8, 16, 32, ... 2. 1, 3, -9, -27, ...

3. 8, 4, 2, 0, 4. $\frac{5}{3}, -\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, -\frac{45}{8},$

5. จงกล่าวเป็นทางพีชคณิต ถึงสถานะเมื่อ a, b
c และ d อยู่ใน G.P.

6. a, a, a, เป็น G.P. ได้ไหม เพราะเหตุใด จงหาผลบวกถึง n เทอม

7. จงหาเทอมที่ 7 ของ G.P. :- -3, 12, -48

ในข้อต่อไปนี้ออกด้วยให้ 3 ตัว จงหาอีก
2 ตัวที่เหลือ :

8. $r = 2, n = 7, l = 192$

9. $a = -\frac{4}{3}, l = \frac{1}{24}, S_n = -\frac{7}{8}$

10. $a = \frac{2}{3}, n = 4, r = -\frac{2}{3}$

11. จงบรรจุ 3 G.M.^s ระหว่าง $\frac{7}{9}$ กับ 63

12. จงหา G ระหว่าง $x^2 - 6ax + 9a^2$ กับ $9x^2 + 6ax + a^2$

13. เทอมที่ 4 ของ G.P. เป็น $\frac{4}{9}$ และเทอมที่ 9 เป็น $\frac{128}{2187}$ จงหาเทอมที่ 6

14. ชายคนหนึ่งเริ่มเก็บเงิน ตั้งแต่วันที่ 1 มิถุนายน
ได้ 1 บาท และเพิ่มเป็น 3 เท่าเดิมต่อไป
ทุกวัน จนถึงสิ้นเดือน เขาจะเก็บได้ทั้งหมด
เท่าใด

15. ผลบวกของเทอมที่ 1, 3 และ 5 ของ G.P.
อันหนึ่งเท่ากับ 63 และผลบวกของเทอมที่ 2

4 และ 6 เท่ากับ 126 วิชา G.P. น

16. ผลต่างของเลข 2 จำนวน เท่ากับ 40 และ
ตัวกลางเลขคี่ของมันเป็นมากกว่า ตัวกลาง
เรขาคณิตอยู่ 2 วิชาเลข 2 จำนวน

17. วิชาเลข 2 จำนวน ซึ่ง A ของมัน คือ 25
และ G ของมัน คือ 24

18. ผลบวกของ 3 เทอมแรกของ G.P. เท่ากับ 9
และผลบวกของ 6 เทอมแรก คือ 81 วิชา
G.P. น

หาเทอมที่ 7 และ 10 ของ series :

19. $\frac{1}{256}, \frac{1}{64}, \frac{1}{16}, \dots$

20. 512, -256, 128,

จงหาตัวอื่น 2 ตัว ที่ยังไม่ทราบ

21. $a = 5, n = 6, l = -\frac{160}{243}$

22. $a = \frac{2}{3}$, $r = -\frac{2}{3}$, $S_n = \frac{26}{81}$
23. $l = 1296$, $r = 6$ $S_n = 1555$
24. บรรจุ 6 ตัวกลางเรขาคณิต ในระหว่าง 56
กับ $-\frac{7}{16}$
25. เทอมที่ 3 ของ G.P. คือ $-\frac{3}{2}$ และเทอม
ที่ 8 คือ $\frac{3}{64}$ จงหาผลบวกของ 5 เทอมแรก
26. จงหาเลข 3 จำนวน อยู่ใน G.P. ซึ่งบวกกัน
ได้ $4\frac{2}{3}$ และคูณกันได้ -8
27. มีเทอม 4 เทอมอยู่ใน G.P. ซึ่งผลบวกของเทอม
ที่ 1 กับ 4 ได้ 84 และผลบวกของเทอมที่
2 กับ 3 ได้ 36 จงหาเทอมทั้งสี่
28. ถ้าตัวกลางเรขาคณิต G และตัวกลางเลขคณิต
2 ตัว p และ q ถูกบรรจุลงในระหว่าง
จำนวน 2 จำนวน จงแสดงว่า

$$G^2 = (2p-q)(2q-p)$$

29. ในการส่งห้วงแห่งโซคลาก คนหนึ่ง ๆ ที่ได้รับ
ห้วงแห่งโซคลากนั้น จะต้องส่งไปให้เพื่อน
ของเขาอีก 9 คน จากคนส่งคนที่ 1 ถึง
คนส่งคนที่ 10 ห้วงนี้จะถูกส่งไปเป็นจำนวน
ทั้งหมดเท่าใด
30. จงหาเทอมที่ 5 ของ series: $-12.15, 8.1,$
 $-5.4, \dots$
31. จงหา A.P. ซึ่งมีเทอมแรกเป็น 3 และเทอม
ที่ 2 ที่ 4 และที่ 8 อยู่ใน G.P.
32. บรรจุ 4 G.M.^s ระหว่าง $-\frac{12}{25}$ กับ $\frac{375}{8}$
33. เทอมที่ 5 ของ G.P. คือ $4\sqrt{3}$ และเทอม
ที่ 8 คือ $8\sqrt{6}$ จงหาผลบวกของ 8 เทอมแรก
34. ภาชนะใบหนึ่งเดิมบรรจุเหล้าองุ่นอยู่เต็ม ถ้าควม

ออกเสีย $\frac{1}{4}$ แล้ว เติมน้ำจนเต็ม แล้วทวง

ออก $\frac{1}{4}$ และเติมน้ำเต็มอีก ทำเช่นนั้น 4 ครั้ง

เหล้าองุ่นในภาชนะนั้นจะมีส่วนร้อยละเท่าใด

35. จงบรรจุเลข 2 จำนวนลงระหว่าง 1 กับ 15

เพื่อให้ 3 เทอมแรกใน 4 เทอม ที่เกิดขึ้นอยู่

ใน G.P. และ 3 เทอมท้ายอยู่ใน A.P.

36. จงหาเลข 3 จำนวนซึ่งอยู่ใน G.P. ซึ่งบวก

กันได้ 21 และผลบวกของกำลังสองของมัน

เท่ากับ 189

37. ผลบวกของ 8 เทอมแรกใน G.P. เป็น 17

เท่าของผลบวกของ 4 เทอมแรก จงหาอัตรา

ส่วนร่วม

38. จงเขียน series: $9\frac{18}{25}$, $-16\frac{1}{5}$, 27 ต่อไป

อีก 3 เทอม

214

510

1/352

๔๘

39. บวก $1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \dots$ ถึง 12 เทอม
40. $1 - 1.2 + 1.44 + \dots$ ถึง n เทอม
41. บรรทัดที่ 3 G.M.^s ระหว่าง $3\frac{3}{8}$ และ $10\frac{2}{9}$
42. จงหาเลข 2 จำนวนซึ่งต่างกัน 18 และ A
ของมันมากกว่า G ของมันอยู่ 2
43. มีเลขอยู่ 3 จำนวนอยู่ใน G.P. ซึ่งรวมกันได้ 7 ถ้าเอา 1 เพิ่มเทอมแรก, 3 เพิ่มเทอมที่ 2 และ 4 เพิ่มเทอมที่ 3 จำนวนที่ได้เหล่านั้นจะอยู่ใน A.P. จงหาจำนวนเหล่านั้น
44. จำนวนเลขในหลักของเลข 3 หลัก อยู่ใน G.P. และผลบวกของเลขในหลักเท่ากับ 13 ถ้าเอา 792 ลบออกจากเลขจำนวนนี้ จะได้เลขที่กลับหลักเลขเดิม จงหาเลขจำนวนนี้

45. ถ้า xy, y^2, z^2 , อยู่ใน A.P. จงพิสูจน์ว่า y, z ,

$2y-x$ อยู่ใน A.P.

พ 8. 9 หัวข้อเกี่ยวกับขอบเขตต์ Limit

เมื่อค่า n เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ $\frac{n}{n+1}$ จะเข้าใกล้ 1

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}$$

ลองหา ๆ จะเห็นว่า ถ้า n ยิ่งสูงขึ้น (เช่น

$$n = 1,000,000) \quad \frac{n}{n+1} \quad (\text{ซึ่ง} = \frac{1,000,000}{1,000,001})$$

จะใกล้ 1 เข้าไปทุกที

อธิบายทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้ :

$$\begin{aligned} & \text{ผลต่างของ } 1 \text{ กับ } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} \\ & = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

เมื่อค่าของ n สูงขึ้น ๆ $\frac{1}{n+1}$ ซึ่งเป็น

ผลต่างระหว่าง 1 กับ $\frac{n}{n+1}$ จะเล็กลงเรื่อย ๆ

ทุกที แสดงว่า $\frac{n}{n+1}$ ต้องใกล้เคียงกับ 1 เข้าไป

ทุกที จึงทำให้ผลต่างคือ $1 - \frac{n}{n+1}$ มีค่าเล็กน้อย
 เข้า คือใกล้จะเท่ากับ 0 เข้าไปทุกที เราจะกำหนด
 เลขสักจำนวนหนึ่งให้น้อยแสนน้อยอย่างไรก็ตาม ถ้า
 เราบังคับ n ให้สูงขึ้น เราก็จะหาจำนวนที่น้อย
 กว่าจำนวนที่กำหนดได้เสมอ โดยหาผลต่างของ
 $1 - \frac{n}{n+1}$ นั้น

เช่นสมมติว่าเราเลือกเอา $\frac{1}{10^{10}}$ ซึ่งเราก็คว่า
 น้อยพอ

ถ้าเรากำหนดให้ $n = 10^{10}$ (ซึ่งเราก็คว่าสูงพอ)

$1 - \frac{10^{10}}{10^{10}+1}$ จะเป็นจำนวนที่น้อยกว่า $\frac{1}{10^{10}}$

ซึ่งเราก็คว่าน้อยอยู่แล้วได้ และถ้า n ยิ่งสูงขึ้นกว่า

10^{10} , $1 - \frac{10^{10}}{10^{10}+1}$ (ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{10^{10}+1}$) ก็ยิ่ง

น้อยกว่า $\frac{1}{10^{10}}$ ยิ่งขึ้น

นั่นคือเมื่อ n ยิ่งสูงขึ้น $\frac{n}{n+1}$ ยิ่งใกล้เคียง

1 เข้าไปทุกที

ในกรณีเช่นนี้ เราพบว่า ขอบเขตคี่ของ $\frac{n}{n+1}$

เท่ากับ 1 เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

โดยทั่วไป สมมติว่าเรามีจำนวน

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ถ้า n มีค่าสูงพอ, a_n ใกล้ค่าอันใดอันหนึ่งเช่น b

เข้าไปทุกทีแล้ว เราอาจพบว่า

ขอบเขตคี่ของ a_n เท่ากับ b , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$

ซึ่งถ้าจะพูดอีกอย่างหนึ่ง a_n มีค่าผกผัน b น้อยพอที่จะทำให้ $a_n - b$ เป็นผลต่าง มีค่าน้อยกว่าค่าใดๆ เช่น m ซึ่งถึงแม้จะกำหนดให้เล็กมาก $a_n - b$ ก็ยังน้อยกว่า m จนได้

พ 8. 10 ผลบวกถึงอนันต์ของ G.P. นั่นคือ

ผลบวกของ infinite terms ของ G.P. คือเมื่อ $r < 1$

เมื่อ r มีค่าเป็นตัวเลข < 1

$$\text{จากสูตร VII } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a-ar^n}{1-r}$$

$$\text{ถ้าเขียนเป็น } S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a \cdot r^n}{1-r}$$

ถ้า $r < 1$ เมื่อ n มีค่าสูงมากพอ r^n จะมี
ค่าใกล้กับ 0 หรือเป็น 0 เมื่อ n มีค่าสูงถึง
 n เป็นอนันต์

โดยที่ $\frac{a}{1-r}$ เป็นค่าคงที่, r_n เช่นนี้จะทำให้

$\frac{a \cdot r^n}{1-r}$ เป็น 0 ไปด้วย

ดังนั้น $S_n = \frac{a}{1-r}$ เมื่อ n สูงถึง คือ

n เป็นอนันต์

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

หรือเขียนดังนี้

สูตร XI
$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

S_{∞} หมายถึงผลบวกของเทอมซึ่งมีจำนวนเทอม
เท่ากับอนันต์ อ่านว่า ผลบวกถึงอนันต์

ตัวอย่าง 1. จงหาผลบวกถึงอนันต์ของ G.P.

6, -4, $2\frac{2}{3}$

ในที่นี้ $a = 6$, $r = -\frac{2}{3}$

$$S_{\infty} = \frac{6}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{18}{5}$$

ตัวอย่าง 2 ทุก ๆ เทอมของ G.P. ค่าไม่จำกัด

(infinite) อันหนึ่งเท่ากับ 3 เท่าของผลบวกของเทอม

ทั้งหมดที่อยู่ถัดไป และถ้าเทอมที่ 4 เท่ากับ $\frac{3}{64}$

จงเขียนอนุกรมนี้

๕๕

สมมติอนุกรมคช $a, ar, ar^2, \dots$

$$a = 3(ar + ar^2 + ar^3 + \dots \rightarrow \infty)$$

$$= 3 \times \frac{ar}{1-r} = \frac{3ar}{1-r}$$

จากนั้น $r = \frac{1}{4}$

เทอมที่ 5 : $ar^4 = \frac{a}{4^4} = \frac{3}{64}$; $a = 12$

อนุกรมคช $12, 3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \dots$

ตัวอย่าง 3. จงแปลงทศนิยมไม่ซ้ำ $.75\overline{9}$ เป็น

เศษส่วน

$$.75\overline{9} = .7595959 \dots = .7 + (.059 + .00059 + .0000059 + \dots)$$

ส่วนภายในวงเล็บ คช infinite G.P.

$$S_{\infty} = \frac{.509}{1-.01} = \frac{59}{990}$$

$$.75\overline{9} = \frac{7}{10} + \frac{59}{990} = \frac{752}{990} = \frac{376}{495}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๗ พ.

(ข้อ 1—6 ทำได้ด้วยการคาดเดา)

อนุกรมอื่นใดในตารางผลบวกถึงอนันต์ได้ ? จง
หาผลบวกของอนุกรมที่สามารถหาได้ พร้อมทั้งบอกสภาพ
ที่จำเป็น

1. $3, -3^2, 3^3, \dots$ 2. $x, -x^2, x^3, \dots$
 3. $p, 1, \frac{1}{p}, \dots$ 4. $a, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \dots$
 5. $1, .5, .25, \dots$ 6. $a^3b, -a^2b^2, ab^3, \dots$

หาผลบวกถึงอนันต์

7. $9, -3, 1, \dots$ 8. $8, 2, \frac{1}{2}, \dots$

จงแสดงเป็นเศษส่วน

9. $.363$ 10. $.56$ 11. 126
 12. จงหา G.P. ที่ $S_\infty = 24$ และเทอมที่

$$2 = 6$$

13. ลูกยางลูกหนึ่งถูกทิ้งจากที่สูง 60 ฟุต มันจะ
 เด้งขึ้น $\frac{2}{3}$ ของระยะสูงที่ตกทุก ๆ ครั้ง จงหา
 ระยะที่มันเคลื่อนที่ทั้งหมดก่อนหยุดนิ่ง

หาผลบวกอินฟินิต

14. $6, 3, \frac{3}{2}, \dots$ 15. $\frac{15}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{5}, \dots$

แปลงเป็นเศษส่วน

16. .15 17. .856 18. .135

19. สองเทอมแรกของ infinite G.P. รวมกัน
 ได้ 1 และทุกเทอมเป็น 2 เท่าของผลบวกของ
 เทอมหลัง ๆ ทั้งหมด จงหาอนุกรม

20. วงกลมวงหนึ่ง เขียนภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 ด้านยาว 16 นิ้ว ภายในวงกลมนี้ เขียนรูป
 สี่เหลี่ยมจัตุรัส และภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 เขียนวงกลมทำดังนี้โดยไม่จำกัด จงหา (ก)

ผลบวกของความยาว ล้อม รอบ สี่เหลี่ยม ๓๓ ๓๓
ทั้งหมด (๒) ผลบวกของพื้นที่วงกลม
ทั้งหมด

แปลงเป็นเศษส่วน

$$21. .072 \quad 22. .2150 \quad 23. .715$$

$$24. \text{ จงหา G.P. ซึ่ง } S_4 = \frac{65}{54} \text{ และ } S_\infty = \frac{1}{2}$$

25. ลูกตุ้มนาฬิกา หยุดลง โดย ความต้าน ของ ลม
โดยแกว่งแคบเข้า $\frac{1}{12}$ ของการแกว่งครึ่ง
ก่อนๆ ถ้าครึ่งแรกแกว่งเป็นช่วงสั้นโค้งยาว
20 นิ้ว วัตถุปลายตุ้ม ระยะความยาวที่แกว่ง
ทั้งหมดก่อนหยุดเป็นเท่าใด

$$26. \text{ หา } S_\infty \text{ ของ G.P. :}$$

$$\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \dots \dots \dots \text{เมื่อ } x \text{ เป็นบวก}$$

แปลงเป็นเศษส่วน

27. $3.1\dot{6}$

28. $.11\dot{2}7$

29. จงหา infinite G.P. ซึ่งมีเทอมแรกเป็น n

และทุก ๆ เทอมเป็น n เท่าของผลบวกของ
เทอมที่ตามมา

30. สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าภายในวงกลมวงหนึ่ง
รัศมี 12 ในสามเหลี่ยมนี้สร้างวงกลม และ
ภายในวงกลมสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า ทำ
ดังนี้เรื่อยไป จงหา (ก) ผลบวกของความ
ยาวล้อมรอบสามเหลี่ยมทั้งหมด (ข) ผลบวก
ของพื้นที่วงกลมทั้งหมด

พ 8. 11 กระบวนขยายฮาร์โมนิก Harmonic
Progression

อนุกรมของเทอมอยู่ในกระบวนขยายฮาร์โมนิก

(H.M.) ท่อเมอ กลับเศษเป็นส่วน แล้วได้เทอม
ที่อยู่ในกระบวนขยายเลขคณิต

เช่น a, b, c อยู่ใน H.P. เมอ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ อยู่ใน A.P.

ตัวอย่าง $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ อยู่ใน H.P. เพราะ 2, 3, 4
อยู่ใน A.P.

หลัก โทษทุกอันใน H.P. ให้ทำโดยแปลง
เป็น A.P. ก่อนและใช้หลักของ A.P. เสมอ

พ 8. 12. ตัวกลางฮาร์โมนิก Harmonic Mean

ถ้า a, H, b อยู่ใน H.P.

H เป็นตัวกลางฮาร์โมนิก H ของ a และ b

แปลงเป็น A.P. :— $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ อยู่ใน A.P.

$\therefore \frac{1}{H}$ เป็น A ของ $\frac{1}{a}$ กับ $\frac{1}{b}$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a+b}{2ab}$$

สูตร XII

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

ตัวอย่าง 1. หา H ระหว่าง 42 กับ 7

$$H = \frac{2 \times 42 \times 7}{42 + 7} = 12$$

2. บรรจุ 2 H.M.^s ในระหว่าง 3 กับ 12

เมื่อแปลงเป็น A.P. เทอมแรก = $\frac{1}{3}$, เทอมที่ 4

คือ $\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} + (4-1)d$$

$$3d = -\frac{1}{4}; \quad d = -\frac{1}{12}$$

ตัวกลางเลขคณิต 2 ตัวระหว่าง $\frac{1}{3}$ กับ $\frac{1}{12}$ คือ

$$\frac{1}{4} \quad \text{กับ} \quad \frac{1}{6}$$

ดังนั้น H.M.^s คือ 4 กับ 6

พ 8. 13 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวกลางเลขคณิต, เรขาคณิตและฮาร์โมนิก

ถ้าในระหว่าง a กับ b เราเขียน A, G และ H

$$a, \left. \begin{array}{c} A \\ G \\ H \end{array} \right\}, b$$

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

$$A.H. = \frac{a+b}{2} \times \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2$$

สูตร XIII $G = \sqrt{AH}$ หรือ $AH = G^2$

แบบฝึกหัดที่ ๒๘ พ.

1. จงบรรจุ 4 ตัวกลางฮาร์โมนิกระหว่าง 2 กับ 12
2. ถ้า a, x, y, b อยู่ใน H.P. จงหา x และ y ในเทอมของ a และ b
3. เทอมที่ 12 ของ H.P. เป็น $\frac{1}{5}$ และเทอมที่ 19 เป็น $\frac{3}{22}$ จงหาเทอมที่ 4
4. ระหว่างเลข 2 จำนวน ตัวกลางเลขคณิตมากกว่าตัวกลางเรขาคณิตอยู่ 2 และตัวกลางเรขาคณิต

คณิตมากกว่าตัวกลางฮาร์โมนิคอยู่ 1. 6. จง
หาเลข 2 จำนวนนั้น

5. จงหา A.M, G.M. และ H.M. ของ 2
และ $\frac{9}{2}$

6. ถ้าเทอมที่ m ของ H.P. เท่ากับ n และ
เทอมที่ n เท่ากับ m จงพิสูจน์ว่าเทอมที่
 $m+n$ เท่ากับ $\frac{mn}{m+n}$

7. ถ้า $b+c, c+a, a+b$ อยู่ใน H.P. จง
พิสูจน์ว่า a^2, b^2, c^2 อยู่ใน A.P.

8. H.P. หนึ่งมี 6 เทอม สามเทอมสุดท้ายคือ
2, 3 และ 6 สามเทอมแรก คืออะไร

9. ถ้า a, b, c อยู่ใน A.P. และ b, c, d อยู่ใน
H.P. จงพิสูจน์ว่า $ad = bc$

10. จงหาเลข 2 จำนวน ซึ่ง A.M. = 7,
H.M. = $6\frac{6}{7}$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ ๕

- มีเลข 2 จำนวนอยู่ใน A.P. ซึ่งรวมกันได้ 15 ถ้า 1 ขวกเทอมที่ 2 และ 10 ขวกเทอมที่ 3 ทั้งสามเทอมจะอยู่ใน G.P. จงหาจำนวนทั้งสาม
- มีเลข 3 จำนวนอยู่ใน G.P. ซึ่งรวมกันได้ 57 ถ้าจำนวนที่สามคูณด้วย $\frac{3}{4}$ ทั้งสามจำนวนจะอยู่ใน A.P. จงหาจำนวนทั้งสาม
- ผลบวกของ 3 จำนวนใน G.P. เป็น 7 และผลบวกของจำนวนกลับเศษเป็นส่วนของมันเป็น $1\frac{3}{4}$ จงหาจำนวนเหล่านั้น
- ถ้า a และ b เป็นเทอมที่ m และที่ n ของ G.P. อันหนึ่ง จงพิสูจน์ว่าเทอมแรก คือ

$$m-n \sqrt{\frac{b^{m-1}}{a^{n-1}}}$$

5. ถ้า a, b , และ c เป็นเทอมที่ p, q และ r ของ G.P. อันหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า

$$a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$$

6. จงพิสูจน์ว่า ทวิกลางเลขคณิตของจำนวนบวกสองจำนวนย่อมมากกว่าทวิกลางเรขาคณิต และมากกว่าทวิกลางฮาร์โมนิค ของจำนวนสองจำนวนนั้น

7. ถ้าผลบวกของ n เทอมของ A.P. อันหนึ่ง เท่ากับ $3n^2 + 4n$ สำหรับทุกค่าของ n จงเขียน series

8. ถ้าเทอม n ของอนุกรมอันหนึ่ง เท่ากับ $3n - 1$ ไม่ว่าค่า n จะเป็นเท่าใด จงพิสูจน์ว่า อนุกรมอนันต์ เป็น A.P. และผลบวกของ $2n$ เทอมแรก เท่ากับ $n(6n + 1)$ ตรวจสอบผลอันนี้ โดยให้ค่า n เป็นตัวเลข (หลัก : ให้ n มีค่า $1, 2, 3, 4, \dots$ แทนลงในกระบวนเทอม)

บทที่ ๙ พ.

ทฤษฎีบทไบนอมิอัล The Binomial Theorem

พ 9. 1 การขยาย $(x+y)^n$ โดยการคูณเราได้

$$(1) \quad (x+y)^1 = x+y$$

$$(2) \quad (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(3) \quad (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(4) \quad (x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

การขยายเหล่านี้ มีสมบัติอันร่วมกัน 4 ข้อดังนี้

1. จำนวนเทอมที่ขยายออกได้ จะมากกว่ากำลังของไบนอมิอัลอยู่ 1 เสมอ

2. ทุกเทอม นอกจากเทอมท้าย มี x เป็นแฟกเตอร์ กำลังของ x ในเทอมที่ 1 เท่ากับกำลังของไบนอมิอัล และลดหลั่นลงทีละ 1 ในเทอมถัด ๆ ไป

3. ทุกเทอม นอกจากเทอมที่ 1 มี y เป็นแฟกเตอร์ กำลังของ y ในที่ 2 คือ 1 และเพิ่มขึ้นทีละ 1 ในเทอมถัด ๆ ไป

(4) (ก) สัมประสิทธิ์ของเทอมที่ 1 เท่ากับ 1

(ข) สัมประสิทธิ์ของเทอมที่ 2 เท่ากับ

กำลังของไบโนเมียล

(ค) สัมประสิทธิ์ของเทอมถัด ๆ ไปเท่ากับ

สัมประสิทธิ์ คูณด้วยกำลังของ x

หารด้วยกำลังของ y บวก 1 ของ

เทอมที่อยู่ข้างหน้านั้น

สำหรับข้อ 4 (ค) นลองดูตัวอย่าง เช่น $(x+y)^4$

ในข้อ (4)

เทอมที่ ๓ ใช้เทอมที่ 2

สัมประสิทธิ์ $4 \times$ กำลังของ x $3 \div$ กำลัง y เพิ่ม

1 คือ 2

$$= \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ เป็นสัมประสิทธิ์ของเทอม 3}$$

เทอมที่ ๔ ใช้เทอมที่ 3

$$\text{สัมประสิทธิ์ของเทอม 4} = \frac{6 \times 2}{(2+1)} = \frac{6 \times 2}{3} = 4$$

สมบัติที่ 4 ขอบกล่าวมาแล้วนี้ ใช้สำหรับขยาย
 $(x+y)^n$ สำหรับทุกค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มและ
 เป็นบวกและเรียกว่า ทฤษฎีบทไบนอมิเยล

ตัวอย่าง 1. ขยาย $(x+y)^6$

$$(1) \text{ เทอมที่ 1 คือ } x^6$$

$$(2) \text{ เทอมที่ 2 : สัมประสิทธิ์} = 6, \text{ กำลังของ } x = 6-1 = 5, \text{ กำลังของ } y = 1; \text{ เทอมที่ 2} \\ = 6x^5y$$

$$(3) \text{ เทอมที่ 3 : สัมประสิทธิ์} = \frac{6 \times 5}{2} = 15, \\ \text{กำลังของ } x = 4 \text{ กำลังของ } y = 2; \text{ เทอมที่ 3} \\ = 15x^4y^2$$

ส่วนเทอมถัด ๆ ไป ทำในทำนองเดียวกับเทอมที่ 3
 เราได้ดังนี้

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 \\ + 6xy^5 + y^6$$

ตัวอย่าง 2 ขยาย $(a^2+2b)^5$ และทำให้ง่าย

$$\begin{aligned}(a^2+2b)^5 &= (a^2)^5 + 5(a^2)^4(2b) + 10(a^2)^3(2b)^2 + \\ &\quad 10(a^2)^2(2b)^3 + 5(a^2)(2b)^4 + (2b)^5 \\ &= a^{10} + 10a^8b + 40a^6b^2 + 80a^4b^3 + 80a^2b^4 \\ &\quad + 32b^5\end{aligned}$$

พ 9. 2 สมบัติเพิ่มเติมของการขยาย $(x+y)^n$

ต่อจากข้อ 4 ยังมีอีก 2 ข้อ ที่เป็นสมบัติของการขยายเช่นกัน

5. ในทุก ๆ เทอม ผลบวกของกำลังของ x และ y เท่ากับกำลังของไบโนเมียล

6 เทอม 2 เทอม ที่ห่างจากเทอมหัวและเทอมท้ายเท่า ๆ กัน มีสัมประสิทธิ์เท่ากัน

สมบัติ 6 ข้อนี้อาจใช้เพื่อให้ความสะดวกได้ ถ้าเราขยายมาจนถึงเทอมกึ่งกลาง ถ้า n เป็นคี่หรือเทอมกึ่งกลางอันดับแรก ถ้า n เป็นคี่โดยไม่ต้องคอยหารหาสัมประสิทธิ์ของเทอมถัดไปอีก

สมบัติข้อ 5 อาจใช้เป็นเครื่องตรวจสอบได้

พ 9. 3 การขยาย $(x-y)^n$

เราอาจใช้วิธีตามข้อ 9.1 ได้โดยอนุโลมว่า $(x-y)^n$ เขียนได้ในรูป $(x+(-y))^n$

เทอมที่ขยายได้จะเหมือนกับ $(x+y)^n$ แต่จะผิดกันเพียงเครื่องหมายเท่านั้น

ตัวอย่าง ขยาย $(z - \frac{1}{z})^7$ และทำให้ง่าย

เราได้ $z^7, -7z^6(\frac{1}{z}), 21z^5(\frac{1}{z})^2$ และ $-35z^4(\frac{1}{z})^3$ เป็น 4 เทอมแรก และสมบัติที่ 4

เทอมหลัง คือ $35, -21, 7$ และ -1

การขยายจึงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (z - \frac{1}{z})^7 &= z^7 - 7z^6(\frac{1}{z}) + 21z^5(\frac{1}{z})^2 - 35z^4(\frac{1}{z})^3 \\ &\quad + 35z^3(\frac{1}{z})^4 - 21z^2(\frac{1}{z})^5 + 7z(\frac{1}{z})^6 \\ &\quad - (\frac{1}{z})^7 \\ &= z^7 - 7z^5 + 21z^3 - 35z + \frac{35}{z} - \frac{21}{z^3} + \frac{7}{z^5} - \frac{1}{z^7} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๙ พ.

ขยาย และทำให้ง่าย

1. $(a+b)^8$

2. $(x^2-3y)^5$

3. $(y-z^{-2})^7$

4. $(\sqrt{2}+i)^6$

5. $(1-y^2)^6$

6. $(\sqrt{x}+\frac{2}{x})^4$

7. $(x-y^2z)^7$

8. $(1-i\sqrt{2})^6$

9. $(x^3+y^3)^7$

10. $(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^9$

11. $(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x})^6$

12. $(1-i)^8$

13. $(2x^5-1)^6$

14. $(\frac{a}{z}+\frac{z^3}{a^2})^7$

15. $(x^{-1}y+xy^{-1})^3$

16. $(1-\sqrt{-2})^6$

ขยายออกไป 4 เทอม และทำให้ง่าย

17. $(x^{-2}-xy^{-2})^{18}$

18. $(ay^2+\frac{1}{a})^{13}$

19. $(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^{16}$

20. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{12}$

21. $(y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}})^{14}$

22. $(x^{-3}-1)^{15}$

23. $(z^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}z^{-\frac{3}{2}})^{18}$

24. $(\frac{1}{\sqrt{x}}+2^{-1}x^{\frac{1}{4}})^{12}$

พ 9. 4 เทอมที่ r ของการขยาย $(x+y)^n$

ในบางครั้งเราต้องการทราบว่าเทอมที่เท่า
 นั้นเท่าใดของการขยาย เป็นเท่าใดเท่านั้น การจะให้ทราบ
 เช่นนี้ ถ้าต้องขยายเทอมกันออกไปทุกครั้งย่อมไม่
 สดวก ดังนั้นต่อไปเราจะพยายามหาสูตร เพื่อหา
 เทอมใดเทอมหนึ่ง, สมมติว่า เทอมที่ r ของการ
 ขยายอันใดอันหนึ่ง

เมื่อขยาย $(x+y)^n$ ออกไป 5 เทอม เราได้

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4 + \dots\end{aligned}$$

สมมติว่ารวมกันของเทอมเหล่านี้ เราบันทึกไว้ดังนี้

1. กำลังของ y ในเทอมใดเทอมหนึ่ง น้อยกว่า
 อันดับของเทอมอยู่ 1 (เช่นกำลังของ y ในเทอม
 $5 = 4$)

2. กำลังของ x เท่ากับ n ลบด้วยกำลังของ y ซึ่งได้มาจากข้อ 4 (หัวข้อ 9.2)

3. ตัวส่วนของสัมประสิทธิ์ คือผลคูณของเลขเรียงกัน $1, 2, 3, \dots$ เลขตัวสุดท้าย ตรงกับกำลังของ y

4. ตัวเศษของสัมประสิทธิ์ คือผลคูณของจำนวนเรียงกัน $n, n-1, n-2, \dots$ จำนวนของแฟคเตอร์ เท่ากับจำนวนของแฟคเตอร์ในตัวส่วน และมีทศนิยมอีกว่า ผลบวกของแฟคเตอร์ที่สอดคล้องกันในเศษและส่วนเป็นคู่ๆ แต่ละคู่จะได้ $n+1$

(เช่น $n-1+2, n-2+3, \dots = n+1$)

จากสมบัติข้างต้นนี้ ถ้าจะหาเทอมที่ r ของการขยาย $(x+y)^n$ เราได้สูตร

$$\begin{aligned} & \text{เทอมที่ } r \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-2))}{1.2.3. \dots (r-1)} x^{n-(r-1)} y^{r-1} \end{aligned}$$

$$\text{สูตร} \quad \text{เทอมที่ } r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} x^{n-r+1} y^{r-1}$$

อย่างไรก็ตาม นักเรณควรวะจำหลักเกณฑ์ของการหาเทอมมากกว่าจะจำสูตร

ตัวอย่าง 1.

จงหาเทอมที่ 7 ของการขยายของ $(a^2+2b)^{15}$

กำลังของ $2b = 7-1$ หรือ $= 6$

ดังนั้นกำลังของ $a^2 = 15-6 = 9$

ตัวส่วนของสัมประสิทธิ์ คือ 1. 2. 3. 4. 5. 6 (6 ตัว)

ตัวเศษ ,, คือ 15.14.13.12.11.10 (6 ตัว)

เทอมที่ 7 คือ $\frac{15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6} (a^2)^9 (2b)^6$

$$= 5004 a^{18} \cdot 64 b^6 = 320320 a^{18} b^6$$

ตัวอย่าง 2.

จงหาเทอมที่ x^9 ของการขยายของ $(x^2 - \frac{2}{x})^{12}$

ส่วนของเทอมขยายเป็นตัวอักษรวัด จากสูตร

คือ $x^{n-r+1}y^{r-1}$ ดังนั้นเราเอาส่วนนี้มาคิดดังนี้

ให้ r เป็นอันดับของเทอมที่ x^9

ส่วนที่เป็นตัวอักษรส่วนคือ $(x^2)^{12-r+1}(\frac{1}{x})^{r-1}$

$$= \frac{x^{26-2r}}{x^{r-1}} = x^{27-3r}$$

$$\therefore x^{27-3r} = x^9$$

$$27-3r = 9$$

$$r = 6$$

ดังนั้นเทอมที่ x^9 (คือเทอมที่ 6)

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (x^2)^7 \left(-\frac{2}{x}\right)^5 = -25344x^9$$

หมายเหตุ เราจะโยกย้ายเช่นตัวอย่างที่ 2 ใน เทอม y อยู่ในเทอมของ x ด้วย เราจึงคิดหาส่วนเป็นตัวอักษรของ y ไปด้วย ถ้าเทอม y เป็นตัวอันดับ แยกออกไป ให้คิดแต่ส่วนที่เป็นเทอม x (หรือเทอม y) เทอมเกี่ยวเท่านั้น

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ $(.9)^8$ ให้ใกล้เคียงทศนิยม
2 ตำแหน่ง

$$\begin{aligned} (.9)^8 &= (1-.1)^8 = 1^8 - 8(1)^7(.1) + 28(1)^6(.1)^2 \\ &\quad - 56(1)^5(.1)^3 + 70(1)^4(.1)^4 \\ &\quad + \dots\dots\dots \\ &= 1 - .800 + .280 - .056 + .007 + \dots \\ &= .431 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(.9)^8 = .43$ ทศนิยม 2 ตำแหน่ง

ในการทำโจทย์ เช่นตัวอย่างข้างบนนี้ เราขยาย
เทอมออกไป เพียงให้เทอมสุดท้ายมีค่าทศนิยมซึ่งอาจ
จะบวกขึ้นมาเป็นทศนิยมตามตำแหน่งที่ต้องการ ไม่
จำเป็นต้องขยายเทอมถัดไปออกไปอีก

แบบฝึกหัดที่ ๓๐ พ.

โดยไม่ต้องขยายเทอม จงหา :

1. เทอมที่ 4 ของ $(x+y^3)^{11}$

$$2. \text{ เทอมที่ } 6 \text{ ของ } (\sqrt{x-y^2})^9$$

$$3. \text{ เทอมกลางของ } \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^{14}$$

$$4. \text{ เทอมที่ } 5 \text{ ของ } (x^2-1)^{10}$$

$$5. \text{ เทอมกลางของ } \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^{12}$$

$$6. \text{ เทอมที่ } 10 \text{ ของ } (1+y\sqrt{x})^{11}$$

$$7. \text{ เทอมที่ } 8 \text{ ของ } (x^2y+b^2)^{13}$$

$$8. \text{ เทอมที่มี } x^2 \text{ ในการขยาย } \left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

$$9. \quad ,, \quad x^6 \quad ,, \quad (x^2+a)^9$$

$$10. \quad ,, \quad y^2 \quad ,, \quad (b-\sqrt{y})^8$$

$$11. \quad ,, \quad \frac{1}{x^6} \quad ,, \quad \left(a-\frac{2}{x^2}\right)^6$$

$$12. \quad ,, \quad x^3 \quad ,, \quad \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$$

$$13. \text{ เทอมที่มี } x^5 \text{ ในการขยาย } (x^3+x^{-2})^{10}$$

หาค่าต่อไปนี้ ด้วยการทศนิยม 3 ตำแหน่ง

14. $(1.1)^7$

15. $(.97)^9$

16. $(1.02)^6$

17. $(.99)^8$

18. $(1.03)^{10}$

19. $(.8)^{12}$

20. $(2.2)^5$

ตรีโกณมิติระนาบราบ ภาคที่ ๒

บทที่ ๖ ต.

ฟังก์ชันของมุมร่วมกันบางมุม

ต 6. 1 ในข้อ 4.7 เราได้เห็น ฟังก์ชันของมุมส่วน
มุมฉาก คือ $90^\circ - A$ มาแล้ว คือ

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A; \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

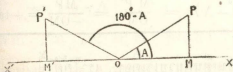
$$\tan(90^\circ - A) = \cot A; \cot(90^\circ - A) = \tan A$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A; \sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$$

ต่อไปเราจะได้พบฟังก์ชันของมุมผสมเช่นนี้ อีก เช่น

ต 6. 2 ฟังก์ชันของมุม $180^\circ - A$ คือฟังก์ชัน

ของมุมส่วนสองมุมฉาก (supplementary angles)



ให้ XOX' เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และตัวพาราคัม
 OP หมุนจาก OX จนกระทั่งทำมุม $POM = A$
 ก่อไปให้ OP หมุนไปจนได้ 180° แล้วหมุนกลับ
 เท่ากับมุม A และตำแหน่งใหม่ของมันคือ OP' ดังนั้น
 $\angle XOP' = 180^\circ - A$

จาก P และ P' ลาก PM และ PM' ตั้ง
 ฉากกับ XX' ตามลำดับ

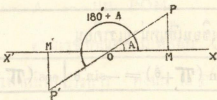
ตามเรขาคณิตสามเหลี่ยม OPM กับ $OP'M'$
 เท่ากันทุกประการ ดังนั้น $M'P' = MP$ และ OM'
 $= -OM$

$\sin (180^\circ - A)$	$= \frac{M'P'}{OP'}$	$= \frac{MP}{OP}$	$= \sin A$
$\cos (180^\circ - A)$	$= \frac{OM'}{OP'}$	$= \frac{-OM}{OP}$	$= -\cos A$
$\tan (180^\circ - A)$	$= \frac{M'P'}{OM'}$	$= \frac{MP}{-OM}$	$= -\tan A$

ถ้าเขียนเป็นหน่วยเรเดียน เราได้ดังนี้

$\sin (\pi-\theta)$	$= \sin \theta$
$\cos (\pi-\theta)$	$= -\cos \theta$
$\tan (\pi-\theta)$	$= -\tan \theta$

6.3 พังกัชนีของมุม $180^\circ + A$



โดยวิธีเดิมตามข้อ 6.2 ให้ OP หมุนจนเกิด

มุม $\text{POM} = A$

ต่อไป OP หมุนจนเกิดมุม 180° แล้วหมุนต่อ
A และมีตำแหน่งใหม่ที่ OP' ดังนั้นมุม

$\text{XOP}' = 180^\circ + A$

ลาก PM และ P'M' ตั้งฉากกับ XX'

ตามเรขาคณิต สามเหลี่ยม OPM กับ OP'M'

เท่ากันทุกประการ ดังนั้น $M'P' = -PM$; $OM' = -OM$

$$\sin(180^\circ + A) = \frac{M'P'}{OP'} = -\frac{MP}{OP} = -\sin A$$

$$\cos(180^\circ + A) = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos A$$

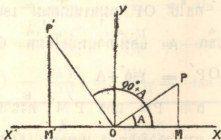
$$\tan(180^\circ + A) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-MP}{-OM} = \tan A$$

ถ้าเขียนเป็นหน่วยเรเดียน

$$\left| \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \right|$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$$

ต 6. 4 ฟังก์ชันของมุม $90^\circ + A$



ให้ OP หมุนจนเกิดมุม $\text{POM} = A$ และ
 หมุนต่อไปถึง OY ได้มุม 90° แล้วหมุนต่อไปอีก
 A และมีตำแหน่งใหม่ที่ OP' ดังนั้น $\angle \text{XOP}'$
 เท่ากับ $90^\circ + A$ ลาก PM และ P'M' ตั้งฉาก
 กับ XX' ดังนั้นมุม $\text{M}'\text{P}'\text{O} = \text{มุม } \text{P}'\text{OY}$
 $= A = \text{มุม } \text{POM}$

ตามเรขาคณิตสามเหลี่ยม OPM และ OP'M'
 เท่ากันทุกประการ ดังนั้น $\text{M}'\text{P}' = \text{OM}$, OM'
 $= -\text{MP}$

$$\sin(90^\circ + A) = \frac{\text{M}'\text{P}'}{\text{OP}'} = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \cos A$$

$$\cos(90^\circ + A) = \frac{\text{OM}'}{\text{OP}'} = \frac{-\text{MP}}{\text{OP}} = -\sin A$$

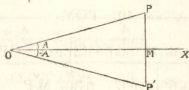
$$\tan(90^\circ + A) = \frac{\text{M}'\text{P}'}{\text{OM}'} = \frac{\text{OM}}{-\text{MP}} = -\cot A$$

ถ้าเขียนเป็นหน่วยเรเดียน

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \quad \left| \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \right|$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$$

ต 6. 5 พังก์ชันของ $-\theta$



ทำนองเดียวกับข้อก่อน ๆ ให้มุม POM เกิดขึ้น
โดย OP หมุนจาก OX แต่ในทิศตรงข้ามเท่ากับ
มุม A มีตำแหน่งใหม่ที่ OP' ดังนั้นมุม P'OM
 $= -A$

โยง PP', ตามเรขาคณิตสามเหลี่ยม POM กับ
P'OM เท่ากันทุกประการ ดังนั้น $MP' = -MP$,
 $OM = OM$ (คั่นร่วม)

$\sin (-A)$	$=$	$\frac{MP'}{OP'}$	$=$	$-\frac{MP}{OP}$	$=$	$-\sin A$
$\cos (-A)$	$=$	$\frac{OM}{OP'}$	$=$	$\frac{OM}{OP}$	$=$	$\cos A$
$\tan (-A)$	$=$	$\frac{MP'}{OM}$	$=$	$-\frac{MP}{OM}$	$=$	$-\tan A$

ต 6. 6 พังกชันของ $360^\circ + A$ มม $360^\circ + A$
 คือมุมที่เกิดจากตัวพารคัมหมนไป 1 รอบ แล้วต่อไป
 อีก A ดังนั้นขนาดของมุมตามเรขาคณิต คือมุม A
 นั่นเอง พังกชันของ $360^\circ + A$ จึงเหมือนกับพังกชัน
 ของ A

ทำนองเดียวกัน ถ้า n เป็นจำนวนรอบที่ตัวพารคัม
 หมนไป $n \cdot 360^\circ$ คือมุมของ n รอบ พังกชันของ
 $n \cdot 360^\circ + A$ จึงเหมือนกับพังกชันของ A

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \sin (720^\circ + A) &= \sin (2 \cdot 360^\circ + A) \\ &= \sin A \end{aligned}$$

ต 6. 7 ฟังก์ชันของ $360^\circ - A$ มุม $360^\circ - A$
 คือมุม 1 รอบ ซากหัก A จึงเท่ากับมุม $-A$ ทำ
 นองเดียวกัน เมื่อ n เป็นจำนวนรอบ $n.360^\circ - A$
 เท่ากับ $-A$

$$\sin (n.360^\circ - A) = \sin (-A) = -\sin A$$

$$\cos (n.360^\circ - A) = \cos (-A) = \cos A$$

$$\tan (n.360^\circ - A) = \tan (-A) = -\tan A$$

หมายเหตุ ฟังก์ชันของมุมร่วมกันเหล่านี้ นักเรียนไม่
 จำเป็นต้องท่องเป็นสูตร เพราะอาหลงลืมเอาไปปะปน
 กันง่าย ควรจะจำแต่รูปของมันแล้วนึกพิสดารเอาทุกครั้ง
 ที่จะใช้

แบบฝึกหัดที่ ๑๕ ท.

หาค่าตัวเลขของ :

1. $\sin 120^\circ$
2. $\cos 135^\circ$
3. $\tan 150^\circ$
4. $\cot 240^\circ$
5. $\operatorname{cosec} 225^\circ$
6. $\sin (-120^\circ)$

7. $\tan 315^\circ$ 8. $\sec(-300^\circ)$ 9. $\tan \frac{3\pi}{4}$
 10. $\cot \frac{4\pi}{3}$ 11. $\sec \frac{2\pi}{3}$ 12. $\operatorname{cosec}(-\frac{\pi}{6})$
 13. $\sin 960^\circ$ 14. $\tan(-855^\circ)$
 15. $\sec 900^\circ$ 16. $\operatorname{cosec} 1305^\circ$
 17. $\cos(-780^\circ)$ 18. $\sec(-1575^\circ)$
 19. $\cot \frac{6\pi}{3}$ 20. $\sec(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

หาค่าฟังก์ชันของ A และ θ

21. $\cos(270^\circ + A)$ 22. $\sin(A - 90^\circ)$
 23. $\sin(270^\circ - A)$ 24. $\sec(A - 180^\circ)$
 25. $\tan(\pi - \theta)$ 26. $\sec(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

ทำให้เป็นแบบง่ายที่สุด

27. $\cos(90^\circ + A) + \sin(180^\circ - A) - \sin(180^\circ + A)$
 $- \sin(-A)$
 28. $\sec(180^\circ + A)\sec(180^\circ - A) + \cot(90^\circ + A)$
 $\tan(180^\circ + A)$

$$29. \frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A}{\sin(90^\circ + A)}$$

$$30. \frac{\cos(90^\circ + A) \sec(360^\circ - A) \tan(180^\circ - A)}{\sec(360^\circ + A) \sin(180^\circ + A) \cot(90^\circ - A)}$$

จงหาทุกมุมที่ค่ากว่า 360° ที่เหมาะสมกับสมการ :

$$31. \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 32. \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$33. \cot \theta = -1 \quad 34. \text{จงพิสูจน์ว่า :}$$

$$\frac{\sin(180^\circ - A)}{\tan(180^\circ + A)} \cdot \frac{\cot(90^\circ - A)}{\tan(90^\circ + A)} \cdot \frac{\cos(360^\circ - A)}{\sin(-A)} = \sin A$$

$$35. \text{เมื่อ } a = \frac{11\pi}{4} \text{ จงหาค่าตัวเลขของ :}$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a + 2 \tan a - \sec^2 a$$

๗ บทที่ ๗ ต.

ฟังก์ชันของมุมประกอบกัน

ต 7. 1 มุมประกอบกัน คือมุมที่เกิดจากผลบวกตาม
พีชคณิตของมุมหลายมุม เช่น $A+B$, $A-B$,
 $A+B-C$ ต่างเป็นมุมประกอบกัน

ฟังก์ชันของมันเช่น $\sin(A+B)$ ไม่เท่ากับ
 $\sin A + \sin B$ ทว่า $\sin$ ข้างหน้าไม่ใช่ตัวสัมประสิทธิ์
ทั้งในพีชคณิต แต่ในที่นี้หมายความว่า เป็นอัตราส่วน
ตรีโกณมิติ เรียกว่า sine ของมุม A (รวมกับ B)
ตัวอย่างเป็นตัวเลข ทำให้เข้าใจง่าย เช่น

$\sin(60^\circ + 30^\circ) \neq \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ เพราะ
 $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$ ส่วน $\sin 60^\circ +$
 $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} =$ ประมาณ
1.3665. ไม่ใช่ $= 1$

สูตรในหัวข้อต่อ ๆ ไปจะไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ด้วย

เพราะต้องการให้สั้นย่อ และอีกประการหนึ่งในการช่วย
 ของพวกเรา ต้องการจะใช้สูตรเหล่านี้เท่านั้น อย่างไร
 ก็ตาม ถ้านักเรียนต้องการที่มาของสูตรนี้ให้ไปค้นคว้า
 ดูได้จากบทที่ 11 หน้า 94,95 หนังสือ Elementary
 Trigonometry ของ Hall and Knight หรือจากผู้สอน

ต 7. 2 ฟังก์ชันของ $A+B$ และ $A-B$

$$1. \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$2. \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$3. \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$4. \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$5. \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$6. \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$7. \cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$8. \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

၇ ၇. ၃ ကြည့်ရအံ့ $\sin (A+B+C)$

$$\sin (A+B+C) = \sin \{ (A+B)+C \}$$

$$= \sin (A+B) \cos C + \cos (A+B) \sin C$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \cos C$$

$$+ (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C$$

$$+ \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

၇ ၇. ၄ ကြည့်ရအံ့ $\tan (A+B+C)$

$$\tan (A+B+C) = \tan \{ (A+B)+C \}$$

$$= \frac{\tan (A+B) + \tan C}{1 - \tan (A+B) \tan C}$$

$$= \frac{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} + \tan C}{1 - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \cdot \tan C}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

บทแทรก ถ้า $A+B+C = 180^\circ$,

$$\tan(A+B+C) = 0, \text{ เศษของ}$$

$$\text{ข้างต้น} = 0$$

$$\underline{\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๖ ท.

(ข้อที่ ๑-๔ ของหมาย * เป็นข้อสำคัญ อาจใช้เป็น

สูตรได้) จงพิสูจน์ว่า :

$$* 1. \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$* 2. \sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$* 3. \cos(A+B) \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$$

$$* 4. \sin(A+B) \sin(A-B) = \cos^2 B - \cos^2 A$$

$$5. \quad \checkmark \cos A = \frac{4}{5}, \quad \cos B = \frac{3}{5} \quad \text{จงหา}$$

$$\sin(A+B) \text{ และ } \cos(A-B)$$

$$6. \quad \checkmark \sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos B = \frac{12}{13} \quad \text{จงหา}$$

$$\cos(A+B) \text{ และ } \sin(A-B)$$

จงพิสูจน์ว่า :

$$7. \quad \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} = \cot \beta + \tan \alpha$$

$$8. \quad \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta$$

$$9. \quad \cos(45^\circ + A) + \sin(A - 45^\circ) = 0$$

$$10. \quad \cos(45^\circ - A) - \sin(45^\circ + A) = 0$$

จากสูตรของ $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$, $\cos(A-B)$ จงหา

$$11. \quad \tan(A+B) \qquad 12. \quad \tan(A-B)$$

$$13. \quad \cot(A+B) \qquad 14. \quad \cot(A-B)$$

$$15. \quad \checkmark \cot A = \frac{5}{7}, \quad \cot B = \frac{7}{5} \quad \text{จงหา}$$

$$\cot(A+B) \text{ และ } \tan(A-B)$$

16. จงกระจาย $\cos(A+B+C)$ และ $\sin(A-B)$

17. จงกระจาย $\cot(A+B+C)$ ในเทอม

$\cot A, \cot B, \cot C$

จงพิสูจน์

$$* 18. \tan(45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$* 19. \tan(45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

$$* 20. \tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$* 21. \tan 15^\circ = \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

ต 7. 5 ถ้านักเรียนพบฟังก์ชันของมุมประกอบกัน
ผ่านมาแล้ว รู้สึกไม่ยากแต่บางครั้งไปพบแบบมาค

ฐานนั้นเองแต่กลับกลายเป็นซ้ำๆ บางทีทำให้หงุดหงิด

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $\cos(A+B)\cos B + \sin(A+B)$

$$\sin B = \cos A$$

สังเกตข้างซ้ายมือเทียบได้กับแบบมาตรฐานของ

$$\cos (A-B)$$

$$L.S. = \cos (A+B-B) = \cos A \quad \text{จ.ท.พ.}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๗ ท.

พิสูจน์ไอเดนติตี้ต่อไปนี้ :

$$1. \sin 3A \cos A - \cos 3A \sin A = \sin 2A$$

$$2. \cos (30^\circ + A) \cos (30^\circ - A) - \sin (30^\circ + A) \sin (30^\circ - A) = \frac{1}{2}$$

$$3. \sin (60^\circ - A) \cos (30^\circ + A) + \cos (60^\circ - A) \sin (30^\circ + A) = 1$$

$$4. \frac{\cos 2a}{\sec a} - \frac{\sec 2a}{\csc a} = \cos 3a$$

$$5. \frac{\tan(a-\beta) + \tan \beta}{1 - \tan(a-\beta) \tan \beta} = \tan a$$

$$6. \frac{\cot(a+\beta) \cot a + 1}{\cot a - \cot(a+\beta)} = \cot \beta$$

$$7. 1 + \cot 2\theta \cot \theta = \operatorname{cosec} 2\theta \cot \theta$$

$$8. \cos 4a \cos a - \sin 4a \sin a = \cos 3a \cos 2a - \sin 3a \sin 2a$$

บทที่ ๘ ต.

ฟังก์ชันของมุมพหุคูณ

ต 8. 1 $\sin 2A$

$$\sin 2A = \sin(A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

ดังนั้น $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

และ $\sin 4A = 2 \sin 2A \cos 2A = 4 \sin A \cos A \cos 2A$

ต 8. 2 $\cos 2A$

$$\cos 2A = \cos(A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A \quad (1)$$

หรือ $= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \underline{2 \cos^2 A - 1} \quad (2)$

หรือ $= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A = \underline{1 - 2 \sin^2 A} \quad (3)$

หรือ $1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A \quad (4)$

$$\text{หรือ } 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A \quad (5)$$

$$\text{หรือ } \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \quad (6)$$

ท 8. 3. $\tan 2A$

$$\tan 2A = \tan (A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ ท.

(ข้อที่เครื่องหมาย * เป็นข้อสำคัญอาจใช้เป็นตัวก็ได้)

พิสูจน์ ใจความต่อไปนี้ :

$$* 1. \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \quad * 2. \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$* 3. \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A \quad * 4. \frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$$

$$* 5. \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \tan \frac{A}{2} \quad * 6. \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \cot \frac{A}{2}$$

$$* 7. \cos A - \tan A = 2 \cot 2A \quad * 8. \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$$

$$* 9. \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A$$

$$* 10. \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 - \sin A$$

$$11. \sec 2\theta = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta} \quad 12. \frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$13. \cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$$

$$14. \sin 8A = 8 \sin A \cos A \cos 2A \cos 4A$$

$$15. \cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$$

$$16. \tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A$$

$$17. \text{ ถ้า } \tan \theta = \frac{1}{7} \text{ จงหา } \sin 2\theta \text{ และ } \cos 2\theta$$

$$18. \text{ ถ้า } \cos a = \frac{4}{5} \text{ จงหา } \tan \frac{a}{2}$$

$$19. \text{ ถ้า } \tan A \text{ ไม่ } \cos 2A = .96$$

$$20. \text{ ถ้า } \cos 2A \text{ ไม่ } \sin A = .4$$

ต 8. 4 พังกษณของ 3A นกเรยนลขกรระยาคู

โดยแยกเขน 2A+A กอนจะไค

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

จากสูตรเหล่านี้ เราสามารถหาค่าของ ฟังก์ชันของ มุมคี่ใด ๆ ได้ เช่น

$$\cos 6a = 4 \cos^3 2a - 3 \cos 2a$$

$$\sin 9a = 3 \sin 3a - 4 \sin^3 3a$$

ต 8. 5 ค่าของ $\sin 18^\circ$

ให้ $A = 18^\circ$, $5A = 90^\circ$ ดังนั้น $2A = 90^\circ - 3A$

$$\therefore \sin 2A = \sin(90^\circ - 3A) = \cos 3A$$

$$\therefore 2 \sin A \cos A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

หารตลอดโดย $\cos A$ (ซึ่งไม่เท่ากับ 0)

$$2 \sin A = \cos^2 A - 3 = 4(1 - \sin^2 A) - 3$$

$$\therefore 4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0$$

$$\sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{5}$$

โดยที่ 18° เป็นมุมแหลม ค่าของ $\sin 18^\circ$ ต้องเป็นบวก

$$\boxed{\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

ตัวอย่าง หาค่า $\cos 18^\circ$ และ $\sin 54^\circ$

$$\begin{aligned}\cos 18^\circ &= \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

โดยที่ 54° และ 36° เป็นมุมส่วนมุมฉาก, $\sin 54^\circ$
 $= \cos 36^\circ$

$$\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ = 1-\frac{2(6-2\sqrt{5})}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ ท.

1. ถ้า $\cos A = \frac{1}{3}$ จงหา $\cos 3A$

2. ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$ จงหา $\sin 3A$

3. ให้ $\tan A = 3$ จงหา $\tan 3A$

4. ถ้า $\sec A = 2$ จงหา $\sec 3A$

พิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

5. $\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2$

6. $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

7. $\frac{\cos^3 a - \cos 3a}{\cos a} + \frac{\sin^3 a + \sin 3a}{\sin a} = 3$

8. $\sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ$

9. $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{3}{4}$

10. $4\sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1$

11. $4\sin^3 a \cos 3a + 4\cos^3 a \sin 3a = 3\sin 4a$

(หลัก ใช้ $4\sin^3 a = 3\sin a - \sin 3a$ และ

$$4 \cos^3 a = 3 \cos a + \cos 3a$$

$$12. \cos^3 a \cos 3a + \sin^3 a \sin 3a = \cos^3 2a$$

$$13. \text{ ถ้า } \cos 20^\circ = .9397, \cos 40^\circ = .7660$$

$$\text{จงหาค่าของ } 4(\cos^3 20^\circ + \sin^3 40^\circ)$$

$$14. \text{ ถ้า } \cos 10^\circ = .9848, \sin 20^\circ = .3420$$

$$\text{จงหาค่าของ } 4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ)$$

$$15. \text{ ใช้ } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ หาค่าของ } 2 \sin^3 18^\circ$$

บทที่ ๘ ต.

การเปลี่ยนของผลคูณและผลบวก

ต 9. 1 การเปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวก, ผลลบ

$$\text{จากข้อ 7.2, } \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A+B) \quad (1)$$

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A-B) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad I$$

$$(1) - (2) \quad 2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \quad II$$

$$\text{และ: } \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) \quad (1)$$

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad III$$

$$(2) - (1) \quad 2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \quad IV$$

เพื่อให้จำง่าย ขาทั้งสองข้าง

$$2\sin A \cos B = \sin(\text{ผลบวก}) + \sin(\text{ผลลบ})$$

$$2\cos A \sin B = \sin(\text{ผลบวก}) - \sin(\text{ผลลบ})$$

$$2\cos A \cos B = \cos(\text{ผลบวก}) + \cos(\text{ผลลบ})$$

$$2\sin A \sin B = \cos(\text{ผลบวก}) - \cos(\text{ผลลบ})$$

หมายเหตุ สูตรสุดท้าย เอา $\cos(\text{ผลลบ})$ ทั้ง
 ๒ ข้าง $\cos(\text{ผลบวก})$ เพราะ $\cos(\text{ผลลบ})$ มีค่ามากกว่า
 $\cos(\text{ผลบวก})$

ตัวอย่าง 1.

$$\begin{aligned} 2\sin 7A \cos 4A &= \sin(7A+4A) + \sin(7A-4A) \\ &= \sin 11A + \sin 3A \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.

$$\begin{aligned} \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{5A}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{3A}{2} + \frac{5A}{2} \right) + \cos \frac{3A}{2} - \frac{5A}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 4A + \cos(-A)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 4A + \cos A) \end{aligned}$$

$$3. 2\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ - \cos 90^\circ = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$4. 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \cos 2\theta$$

$$= \cos 2\theta$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๐ ท.

จงบอกในรูปของผลบวกหรือผลลบ :

$$1. 2\sin 3\theta \cos \theta$$

$$2. 2\cos 6\theta \sin 3\theta$$

$$3. 2\cos 7A \cos 5A$$

$$4. 2\sin 3A \sin 2A$$

$$5. \sin 3a \sin a$$

$$6. \cos \frac{2\theta}{3} \cos \frac{5\theta}{3}$$

$$7. \sin \frac{\theta}{4} \sin \frac{3\theta}{4}$$

$$8. 2\sin(2\theta + \phi) \cos(\theta - 2\phi)$$

$$9. 2\cos(3\theta + \phi) (\sin \theta - 2\phi)$$

$$10. \cos(60^\circ + a) \sin(60^\circ - a)$$

จงหาค่าของ

$$11. \cos 29^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \quad 12. \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

ด 9. 2 การเปลี่ยนผลบวก, ผลลบ เป็นผลคูณ

โดยที่ $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (1)$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (2)$$

$$(1)+(2) \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B \quad I$$

$$(1)-(2) \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B \quad II$$

ทำนองเดียวกัน จากสูตรของ ผลบวก, ผลลบของ cosines

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B \quad III$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B \quad IV$$

เพื่อให้เป็นสูตรสำหรับทำให้ง่าย ๆ

ให้ $A+B = C$ และ $A-B = D$

ดังนั้น $A = \frac{C+D}{2}$ และ $B = \frac{C-D}{2}$

แทนลงในสูตร I ถึง IV เราได้

$$\sin C + \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

เพื่อให้ว่างย ำงท่งก่ง

ผลบวกของสอง sines	$= 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$
ผลลบของสอง sines	$= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$
ผลบวกของสอง cosines	$= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$
ผลลบของสอง cosines	$= 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$

ตัวอย่าง 1.

$$\cos 70^\circ - \cos 10^\circ = 2 \sin \left(\frac{70^\circ + 10^\circ}{2} \right) \sin \left(\frac{10^\circ - 70^\circ}{2} \right)$$

$$= 2 \sin 40^\circ \sin (-30^\circ)$$

$$= -2 \sin 40^\circ \sin 30^\circ = -\sin 40^\circ$$

ตัวอย่าง 2.

$$\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = \cos 20^\circ + (\cos 100^\circ + \cos 140^\circ)$$

$$= \cos 20^\circ$$

$$= \cos 20^\circ + 2\cos 120^\circ \cos 20^\circ$$

$$= \cos 20^\circ + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ$$

$$= \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๑ ท.

เขียนเป็นแบบของผลคูณ

1. $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

2. $\sin 7a - \sin 5a$

3. $\cos 7\theta + \cos 3\theta$

4. $\cos 5a - \cos a$

5. $\sin 3A - \sin 11A$

6. $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ$

7. $\sin 70^\circ + \sin 50^\circ$

8. $\sin 5A + \sin 2A - \sin A$

หาค่าของไอเกนคัตต่อไปนี้

9. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\sin a$

10. $\frac{\cos(\theta - 3\phi) - \cos(3\theta - \phi)}{\sin(3\theta + \phi) + \sin(\theta - 3\phi)} = \tan(\theta + 2\phi)$

$$11. \frac{\sin(a+\beta)-\sin 4\beta}{\cos(a+\beta)+\cos 4\beta} = \tan \frac{a-3\beta}{2}$$

$$12. \sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 8x \sin 2x$$

$$13. \cos^2 A + \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}$$

$$(\text{หลัก : แทน } 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A)$$

$$14. \sin^2 A + \sin^2(120^\circ + A) + \sin^2(120^\circ - A) = \frac{3}{2}$$

$$15. \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \tan 2a$$



พิมพ์ที่โรงพิมพ์คุรุสภา

นายสหัส กาญจนพิจิตะ ผู้พิมพ์และผู้โฆษณา

