

๖๗๖
พ. ๓. ๖.

๓ ๕๐๑๐



ประมวลคณิตศาสตร์

นักเรียน อาชีวศึกษาชั้นสูง ข้างกลปทุมวัน

ชั้นปีที่ ๑ ภาคกลาง—ปลาย

รวบรวมขึ้นเพื่อใช้ในโรงเรียนข้างกลปทุมวัน

515

๓๕๑๓ ๗

โดย อนันต์ สุเสารัจ

(สงวนลิขสิทธิ์)

๕๑๗
๓

สารบาญ

ภาคพีชคณิต

บทที่ ๔ พ. ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน

หน้า ๑-๒๘

- ระบบ coordinate, ระบบ Rectangular coordinate,

abscissa และ ordinate,

กราฟของสมการที่มีตัวแปร

๒ ตัว, กราฟของเส้นตรง

- ฟังก์ชัน และความสัมพันธ์

อย่างฟังก์ชัน, การแก้สมการ

ทางเส้น ๒ ชั้นด้วยกราฟ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๒ พ. หน้า ๘-๑๐

แบบฝึกหัดที่ ๑๓ พ. " ๑๕-๒๖

แบบฝึกหัดที่ ๑๔ พ. " ๒๘

บทที่ ๕ พ. ทฤษฎีแห่งตัวประกอบกำลังและเครื่องหมาย

หมายกรณ์ หน้า ๒๙-๖๐

- กฎ ๕ ข้อ สำหรับตัวประกอบ

กำลัง, กำลังเป็นเศษส่วน, เป็น

ศูนย์, เป็นลบ, imaginary

numbers, surds.



แบบฝึกหัดที่ ๑๕ พ.	หน้า ๓๕-๓๘
แบบฝึกหัดที่ ๑๖ พ.	„ ๔๑-๔๔
แบบฝึกหัดที่ ๑๗ พ.	„ ๕๕-๕๘
แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ ๓	„ ๕๘-๖๐

บทที่ ๖ พ. สมการควอดเรติก หน้า ๖๑-๑๐๕

— ฟังก์ชันควอดเรติก. การแก้
สมการควอดเรติกโดยแยกเป็น
แฟกเตอร์และวิธีอื่น. สูตร
สำหรับแก้ roots สมการ
ควอดเรติก. สมการที่ส่วนมีตัว
unknown, สมการมี surd,
กราฟของฟังก์ชันควอดเรติก,
การแก้สมการควอดเรติกโดย
กราฟ. ขรรษาคติของ roots
และการสังเกต discriminant,
สมการควอดเรติก
หลายชั้น

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ พ.	หน้า ๖๓-๖๕
แบบฝึกหัดที่ ๑๙ พ.	„ ๗๖-๗๘
แบบฝึกหัดที่ ๒๐ พ.	„ ๘๖-๙๐
แบบฝึกหัดที่ ๒๑ พ.	„ ๙๕-๙๗
แบบฝึกหัดที่ ๒๒ พ. (ระคน)	„ ๙๘-๑๐๑
แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ ๔	„ ๑๐๒-๑๐๕

เลข...

216

...

...

515

089321

...

ก

ภาคตรีโกณมิติ

บทที่ ๓ ต. ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมบางมุม

หน้า ๑๐๖—๑๒๐

-ของมุม ๔๕°, ๖๐°, ๓๐°, ๐°,
๕๐°, ๑๕๐°, ๒๗๐°, ๓๖๐°.

แบบฝึกหัดที่ ๘ ต. หน้า ๑๑๐—๑๑๑

แบบฝึกหัดที่ ๙ ต. ,, ๑๑๕—๑๒๐

บทที่ ๔ ต. ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ

หน้า ๑๒๑—๑๓๘

แบบฝึกหัดที่ ๑๐ ต. หน้า ๑๒๗—๑๓๐

แบบฝึกหัดที่ ๑๑ ต. ,, ๑๓๒—๑๓๓

แบบฝึกหัดที่ ๑๒ ต. ,, ๑๓๕—๑๓๖

แบบฝึกหัดที่ ๑๓ ต. ,, ๑๓๗—๑๓๘

บทที่ ๕ ต. การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก

หน้า ๑๓๙—๑๔๕

แบบฝึกหัดที่ ๑๔ ต. หน้า ๑๔๓—๑๔๔

กรมการปกครอง

กระทรวงมหาดไทย

ม.ป.ป.ช. ๑๐๐-๑๐๐

เรื่อง

การ

กรมการปกครอง

ม.ป.ป.ช. ๑๐๐-๑๐๐

เรื่อง

การ

เรื่อง

เรื่อง

กรมการปกครอง

ม.ป.ป.ช. ๑๐๐-๑๐๐

เรื่อง

เรื่อง

เรื่อง

เรื่อง

เรื่อง

ภาคพีชคณิต

บทที่ ๔ พ.

ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน

พ. 4. 1. ระบบ coordinate โดยทั่วไป
coordinate หมายถึงตำแหน่งที่ระบุไว้ให้รู้โดยแจ่มชัด
ว่าสิ่งใดสิ่งหนึ่งมีตำแหน่งอยู่ที่ใด ในกรุงเทพมหานคร
นคร เลขบ้านกับชื่อถนน ก็เพียงพอให้ทราบตำแหน่ง
ของบ้านได้ เลขบ้านกับชื่อถนน คือ coordinates
ของบ้านนั้น หรือเช่น โรงเรียนช่างกลปทุมวัน ตั้งอยู่
ถนนพระราม 1 หน้าสนามกีฬาแห่งชาติ ถนนพระราม 1
กับหน้าสนามกีฬาแห่งชาติ เป็น coordinates ของ
โรงเรียนช่างกลปทุมวัน รวมเป็น 2 coordinates กัน
ถ้าขยายวงกว้างออกไปอีก เมื่อระหา coordinates ของ

โรงเรียนช่างกลปทุมวัน ว่ามีตำแหน่งอยู่ที่ไหนในโลก
 coordinates เป็นดังนี้ หน้าสนามกีฬาแห่งชาติ ถนน
 พระราม 1 กรุงเทพมหานคร ประเทศไทย ทวีปเอเชีย
 รวมเป็น 5 coordinates หรือเช่น coordinates ของ
 กรุงเทพมหานคร คือ Lat. $13^{\circ}40'$ และ Long. $100^{\circ}30'$
 ซึ่งใช้บอกโดยเส้นแวงคิรูกกับขั้วของคิรูก (คำนี้ให้ไว้
 โดยประมาณ)

การบอกตำแหน่งของทุก ๆ จุดหนึ่ง บนเส้นตรง
 เส้นหนึ่ง ใช้ coordinate เดียว โดยคิดระยะทางว่า
 จุดนั้นห่างจากจุดใดจุดหนึ่ง เช่นจุด 0 เป็นระยะทาง
 เท่าใด และจากจุดที่ตรงอยู่ก็ยกกับ 0 ถ้าวัดไปทางหนึ่ง
 มีค่าเป็นบวก วัดไปอีกทางหนึ่งมีค่าเป็นลบ และเท่า
 ทีเดียวเหมือนกัน โดยใช้สัญลักษณ์แห่งเครื่องหมาย
 (The Convention of signs) ถ้า 0 เป็นจุดตรงอยู่ยกกับ
 ค่าของระยะทางที่วัดไปทางขวาเป็นบวก, ทางซ้ายเป็น
 ลบ, เหนือจุด 0 เป็นบวก, ใต้จุด 0 เป็นลบ

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงระบบของ coordinate ซะนิก
พิเศษอันหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า Cartesian Rectangular
Coordinate System

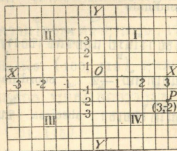
พ. 4. 2. Rectangular Coordinate System

ในรูป เรามีเส้นตรงสองเส้น, XX' และ YY'
ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด O

XX' มีชื่อเรียกว่า แกน $-x$

YY' ,, ,, แกน $-y$

จุด O ,, ,, จุดตั้งต้น origin



(3, -2)

บนแกน $-x$ และแกน $-y$ มีตัวเลขบอกขนาดของ
 เกล็ด ดังต่อไปนี้ O

สเกลบน OX และ OY มีค่าเป็นบวก

และ „ „ OX' และ OY' „ ลบ

Abscissa และ Ordinate ถ้าจุด P เป็นจุด ๆ

หนึ่ง มีตำแหน่งดังในรูป

ระยะที่วัดได้ตามแกน $-x$ เรียกว่า abscissa

หรือ x -coordinate

ระยะที่วัดได้ตามแกน $-y$ เรียกว่า ordinate

หรือ y -coordinate

เช่นตัวอย่างในรูป แอชชีสซาของจุด P เท่ากับ 3
 และออร์ดิเนตเท่ากับ -2 coordinates ทั้งสอง
 เขียนรวมกันได้โดยเขา abscissa ขึ้นหน้า กับ
 $(3, -2)$

และ abscissa กับ ordinate ของ P เรียกว่า Rectangular coordinates ของจุด P

สังเกตเห็นได้ว่า (ก) จุดทุกจุดบนระนาบอื่นหนึ่ง
ยังชี้โดยเลข 2 จำนวน คือ abscissa กับ ordinate
และกลับกัน (ข) เลข 2 จำนวน จะยังตำแหน่งอัน
หนึ่งของจุด

การเขียนจุดซึ่งแสดงไว้โดย coordinates (ใช้วิธี
เขียนจุดหรือวงกลมเล็กๆ หรือกากระดาษเล็กๆ ให้มี
ระยะจากแกน $-x$ และแกน $-y$ ตามค่าของ abscissa
และ ordinate

หมายเหตุ เราต้องกะเสถิลของจุดที่จะ plot ให้
เหมาะสมกับความโตของหน้ากระดาษ เช่น ถ้าจุดๆ
หนึ่งมี coordinates (100, 115) หน่วยหนึ่งๆ ของ
ความยาวตามเสถิล จะต้องเล็กกว่า เมื่อ coordinates
ของมันเช่น (.01, .115)

พ. 4. 3. กราฟของสมการอันหนึ่งที่มีตัวแปรผัน
2 ตัว

จากกราฟที่เราจะไต่เส้น ๆ หนึ่ง ซึ่งทำให้เกิด
สถานะดังนี้

(1) coordinates ของทุกจุดบนกราฟ จะพอ
เหมาะพอเจาะกับค่าของตัวแปรผันนั้น ๆ ในสมการ

(2) กลับกัน, จุดทุกจุดซึ่ง coordinates ของมัน
พอเหมาะพอเจาะกับค่าของตัวแปรผันในสมการ จะ
เป็นจุด ๆ หนึ่งของกราฟ

พ. 4. 4. กราฟของเส้นตรง จากเรขาคณิต
วิเคราะห์ กราฟของสมการทางเส้นทุกอัน คือ
 $ax+by+c = 0$ เป็นเส้นตรง

สูตร กราฟของ linear function ของ x คือ
 $y = ax+b$

สูตรพิเศษ $y = ax$ ถ้าเส้นตรงผ่านจุดตั้งต้น 0
จะเขียนกราฟของสมการเช่นนี้ เราหาจุดเพียง 2

จุดก็เพียงพอ โดยเลือกจุดทางไหนพอสมควร อย่า
ให้ใกล้กันเกินไปนัก เพราะจะทำให้ลากเส้นตรงผิด
พลาดได้ แล้วหาจุดที่สามแยกกลางๆ เส้นตรงนี้ออก
สักจุดหนึ่ง เป็นการตรวจสอบไปในตัว
ตัวอย่าง

เขียนกราฟของสมการ $4x - 3y = 11$

หาค่า y ในเทอม x เราได้

$$y = \frac{4x - 11}{3}$$

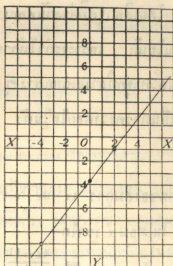
$$\text{ถ้า } x = 0, \quad y = \frac{-11}{3}$$

$$,, \quad x = 2, \quad y = -1$$

$$,, \quad x = -4; \quad y = -9$$

ค่าเหล่านี้เราทำตารางไว้ดังนี้:

x	0	2	-4
y	$-\frac{11}{3}$	-1	-9



๑. coordinates เหล่านี้ แล้วลากเส้นผ่านจุด
เหล่านี้ จะเห็นว่าเป็นเส้นตรง

แบบฝึกหัดที่ 12 พ

- เขียนจุดเหล่านี้ลงบนกระดาษกราฟ. $(4, -3)$,
 $(-6, -1)$, $(0, 8)$, $(-4, 0)$, $(0, 0)$, $(7, 5)$,
 $(-10, 6)$, $(0, -1)$

2. แกน— แกน—y แบ่งระนาบเป็น 4 quadrants
เรียกว่า ควอดแตรนทที่ 1, ที่ 2, ที่ 3 และที่ 4
ทั้งแสดงด้วยเลขโรมัน I, II, III, IV ในรูปที่ 1
จงบอกว่าจุดต่างๆต่อไปนี้อยู่ในควอดแตรนทใด

(ก) abscissa และ ordinate เป็น +ve ทั้งคู่

(ข) abscissa และ ordinate เป็น -ve ทั้งคู่

(ค) abscissa เป็น +ve, ordinate เป็น -ve

(ง) abscissa เป็น -ve, ordinate เป็น +ve

3. เราจะอ่าน coordinates อย่างไร เมื่อจุดนั้นอยู่

บน ก. แกน—x , ข. แกน—y

เขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

$$4. x+4y = 6 \quad 5. 6x = 10-2y$$

$$6. 6x+5y = 12 \quad 7. 2x = 6$$

$$8. x+5 = 0 \quad 9. 3y = -9$$

$$10. 2y+5 = 0$$

หลัก ข้อ (7)–(10) แสดงว่าค่า x หรือ $y = 0$
 จะไม่ได้ slope แต่ได้เส้นตรงที่ขนานกับแกนใดแกน
 หนึ่ง

$$11. \quad 3x + 7y = 10 \qquad 12. \quad 5x - 8y = 0$$

$$13. \quad 5x + y = 20 \qquad 14. \quad 3y = -9$$

$$15. \quad 9x = 30$$

พ. 4. 5. ฟังก์ชันและความสัมพันธ์อย่าง
 ฟังก์ชัน

เพื่อให้เข้าใจฟังก์ชันและความสัมพันธ์อย่างฟังก์ชันได้
 จะขอยกตัวอย่างของความสัมพัทธ์อย่างฟังก์ชันที่มองเห็นง่าย ๆ สัก 2–3 ตัวอย่าง

1. เงินรายได้ทั้งหมดของชายคนหนึ่งที่ได้วันละ
 15 บาท ย่อมอาศัยอยู่ที่จำนวนวัน

ในตัวอย่างนี้ ทุก ๆ จำนวนของวันย่อมโยงไปถึง
 จำนวนของเงินเป็นบาท ถ้า b เป็นจำนวนบาท, a เป็น

จำนวนวัน ความสัมพันธ์ระหว่าง b กับ d จะเป็นไป

ตามสมการ $b = 15d$

2. พนทของวงกลม ย่อมอาศัยอยู่ทวนาคความยาวของรัศมี

ในตัวอย่างนี้ ทุก ๆ ความยาวของรัศมี ย่อมพาพิงไปถึงค่าจำกัดหนึ่งของพนท ถ้า A เป็นพนท r เป็นรัศมี ความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ r จะเป็นไป

ตามสมการที่ทราบกันดีว่า $A = \pi r^2$

ตามตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่า เรขารวทเป็นไปในแบบเดียวกันก็คือ จำนวนแน่นอนของพนทความสัมพันธ์ เชื่อมโยง อยู่ กับอีก จำนวนหนึ่ง หรืออีกหลายจำนวน เป็นเหตุให้ทุก ๆ ค่าของจำนวนหลังเป็นเสมือนตัวควบคุมหรือรับผิดชอบในจำนวนแรก

จำนวนทั้งสองที่เช่นเช่น ถือว่า มีความสัมพันธ์กันอย่างพึ่งพิงกัน

พ. 4. 6. นิยาม ตัวแปรผัน (variable) หมายถึง
ค่าอันหนึ่งของค่ากลุ่มหนึ่ง ภายใต้การเจาะจงพิเศษ
และค่าเหล่านั้นทั้งกลุ่ม เรียกว่า ช่วงของตัวแปรผัน
(range of variables)

นิย (constant) หมายถึงค่าคงที่อันหนึ่งตลอดการ
เจาะจงพิเศษ

ตัวแปรผัน y พดไ้ว่า เป็นฟังก์ชันของตัวแปรผัน
อีกตัวหนึ่งเช่น x ถ้าทุก ๆ ค่าของ x รับผิดชอบต่อค่า
ของ y ฟังก์ชันนเรียกว่าสั้น ๆ ว่าฟังก์ชันของ x

ในต้น x เรียกว่า ตัวแปรผันอิสระ (independent
variable) ส่วน y เรียกว่า ตัวแปรผันไ้บังคับ (depend-
ent variable)

กระบวนเทอม $2x$ — เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่
ทุก ๆ ค่าของ x ย่อมทำให้กระบวนเทอมนี้มีค่าแปรผัน
ต่างกันออกไป

สิ่งที่เขย่งสำคัญในฟังก์ชันก็มีช่วงแปรผัน
2 ช่วง และข้อผูกพันระหว่างช่วงทั้งสอง

ข้อผูกพันอาจแสดงได้เป็นหลายทางคือ

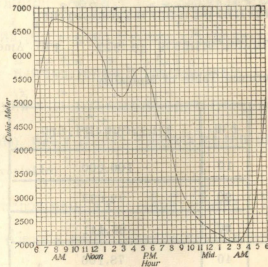
(ก) โดยสูตร (ข) โดยตาราง และ (ค) โดยกราฟ
ตัวอย่าง ในข้อ 4.5 เป็นการแสดงโดยสูตร

วิธี (ข) มีตัวอย่างดังตารางต่อไปนี้ แสดงความ
สัมพันธ์ระหว่างอายุกับจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ จาก
จำนวนแสนคนเมื่ออายุ 10 ขวบ จาก American
Experience Table of Mortality

อายุ	จำนวนคนยังมีชีวิตอยู่
10	100,000
20	92,638
30	85,441
40	78,106
50	69,804

อายุ	จำนวนคนยังมิชวตอยู่
60	57,917
70	38,569
80	14,474
90	847

วิธี (ค) มีตัวอย่างดังกราฟต่อไปนี้ สมมติว่า



จำนวนน้ำประปาใช้โดยเฉลี่ยต่อชั่วโมง ในจังหวัดแห่งนี้

แสดงจำนวนน้ำประปาที่ประชาชนใช้ต่อ 1 ชั่วโมง
ในจังหวัดแห่งหนึ่ง

ถ้าความสัมพันธ์อย่างฟังก์ชันให้ไว้โดยสมการ
เราอาจ แสดง โดย ตาราง และ กราฟ ได้ด้วย เหมือนกัน
ในวิทยาศาสตร์ภาคปฏิบัติการ มักจะแสดงโดยตาราง
ซึ่งจากตารางเช่นนี้ เราเขียนกราฟด้วยและบ่อยครั้งที่
เราต้องการแสดงในรูปของสูตร ซึ่งบางทีเราก็อาจได้
สูตรนั้น ๆ จากกราฟ

ตัวอย่าง 1. แสดง ความสัมพันธ์อย่างฟังก์ชัน
ระหว่างระยะทางที่เทหวัตถุตกโดยอิสระตั้งต้นแต่หยุด
นิ่งและเวลา โดยวิธีทั้งสาม

(ก) จากสูตรในวิชากลศาสตร์ ถ้า h ฟุต เป็น
ความสูงที่ตก และ t วินาทีเป็นเวลา ความสัมพันธ์
นี้มีสูตร

$$h = 16t^2$$

(ข) จากสูตรนี้ เราให้ค่า t ใดก็ได้หลาย ๆ ค่า และหาค่า s ของ s ค่าเหล่านี้เขียนในรูปตารางได้ดังนี้

t	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
h	0	4	16	36	64	100	144

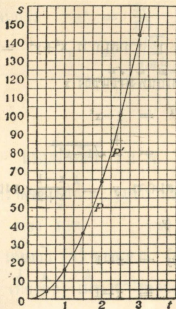
(ค) เขียนกราฟจากตารางนี้ ลากแกน 2 แกน เรียกแกนนอนว่า แกน $-t$ และแกนตั้งเรียก แกน $-h$ เลือกหน่วยความยาวให้เหมาะสำหรับแต่ละแกน แล้วกำหนดจุด $(0,0)$, $(1/2,4)$, $(1,16)$ ฯลฯ

ต่อจุดเหล่านี้โดยเส้นโค้ง กราฟแสดงไว้ในรูป

2. จากกราฟนี้ จงหาระยะทางซึ่งเทวัญตก
ระหว่าง ก. $1\frac{3}{4}$ วินาที
ข. $2\frac{1}{4}$ วินาที

ตามแกน $-t$ หาจุดซึ่งบอกระยะทาง $1\frac{3}{4}$ จาก 0 แล้วลากเส้นผ่านจุดนี้ ขนานกับแกน $-h$ ตัดเส้นโค้งที่ P

h—coordinate ของ P ได้ประมาณ 50
 ดังนั้นเทหวัตถุตกได้ 50 ฟุตใน $1\frac{3}{4}$ วินาที



ทำโดยทำของเดียวกัน จะได้จุด P' บนกราฟ
 แสดงว่าเทหวัตถุตกได้ 80 ฟุต ใน $2\frac{1}{4}$ วินาที

พ. 4. 7. เมื่อความสัมพันธ์อย่างฟังก์ชันของตัว
 แปรผัน 2 ตัว แสดงไว้ในรูปสมการ เราอาจคิดหา

ว่า ตัวใดตัวหนึ่งเป็นฟังก์ชันของอีกตัวหนึ่ง ดังนั้นถ้า
ให้ค่าของตัวแปรต้นตัวหนึ่ง ค่าของอีกตัวหนึ่งก็หาได้
จากสมการ

ตัวอย่าง 1 จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ จึงบอก
ค่าของ y ให้เป็นฟังก์ชันของ x

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

2 จากสมการ $y = \frac{x-1}{x+2}$ จึงบอก x เป็น
ฟังก์ชันของ y

$$(x+1)y = x-1$$

$$xy + y = x - 1$$

$$(y-1)x = -(y+1)$$

$$x = -\frac{y+1}{y-1} \text{ หรือ } = \frac{1+y}{1-y}$$

พ. 48. ในสมการที่มีตัวแปรต้นมากกว่า 2 ตัวขึ้นไป
ก็เช่นเดียวกัน เราอาจบอกตัวหนึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอื่นๆ

ตัวอย่าง จากสมการ $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$ ให้ออก r
เป็นฟังก์ชันของ v และ h

$$\begin{aligned}\text{จากสมการ} \quad r^2 &= \frac{3v}{\pi h} \\ r &= \sqrt{\frac{3v}{\pi h}}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 12 พ.

- จากกราฟของรูปที่ 3 ให้อ่านจำนวนชั่วโมงเวลา
(ก) 6:30 ก.ท. (ข) 8:00 ก.ท.
(ค) เทียงวัน (ง) 3:00 ล.ท. (จ) 5:00 ล.ท.
(ฉ) เทียงคน เมื่อเวลาใดจำนวนนาฬิกาขึ้น
ทีละ 1
- อุณหภูมิเป็นเซนต์ไกรกับฟาเรนไฮต์ สัมพันธ์
กันโดยสูตร $C = \frac{5}{9}(F-32)$ ให้อ่าน
กราฟอุณหภูมิเซนต์ไกร เป็นฟังก์ชันของ

อุณหภูมิฟาเรนไฮต์ จากกราฟบอกอุณหภูมิ
เซนติเกรดที่เทียบได้กับ (ก) 45°F (ข) 83°F ..
(ค) 102°F (ง) 145°F (จ) 12°F
(ฉ) -10°F

จากกราฟเดียวกัน บอกอุณหภูมิฟาเรนไฮต์ที่
(ก) 42°C (ข) 28°C (ค) 16°C (ง) 4°C
(จ) -5°C (ฉ) -25°C

3. เขียนกราฟของฟังก์ชันทางเส้นของ x ให้ y
แทนฟังก์ชันแต่ละอัน อ่านค่าของฟังก์ชัน
สำหรับค่าของ x ที่บ่งไว้ทางด้านขวามือ:

(ก) $3x+4$; $x = 2, 5, -3, -1$

(ข) $5-2x$; $x = 3, 6, -2, -4$

4. ระบุส่วนสูง h ของสามเหลี่ยมเป็นฟังก์ชัน
พหุ A และด้านฐาน b และใช้สมการที่ได้หา
ส่วนสูง เมื่อ

(ก) $A = 6$ ตร. นว, $b = 2$ นว

$$(ข) A = \frac{16}{5} \text{ ตร.ฟุต, } b = \frac{5}{4} \text{ ฟุต}$$

5. ตารางต่อไปนี้แสดง การผลิตน้ำตาลประจำปีใน

หมู่เกาะฟิลิปปินส์ ค.ศ. 1923 ถึง 1932 รัง

เขียนกราฟแสดงเมตริกตันเป็นฟังก์ชันของปี

ปี	เมตริกตัน
1923	431,212
1924	479,988
1925	707,167
1926	550,995
1927	695,728
1928	732,844
1929	847,278
1930	892,468
1931	869,121
1932	1,065,328

6. บันทึกการทดลองยืนยันกฎของบอยล์ มก
ตารางนี้ :

ความกดกันเป็น							
ซ.ม. ของปรอท	19.7	21.5	23.4	30.8	44.8	47.4	59.2
ปริมาตรเป็น							
ลบ. ซม.	120.5	112.8	101.3	77.0	52.9	41.4	40.2

จงเขียนกราฟ แล้วหาปริมาตรของก๊าซในความ
กดกัน (ก) 20 ซม. (ข) 36 ซม.
(ค) 62 ซม.

7. พื้นที่ A ของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ
ครึ่งหนึ่งของผลคูณ ของความยาวด้านรอบ p
และรัศมี r ของวงกลมเขียนภายใน

จงบอก (ก) r เป็นฟังก์ชันของ A และ p
(ข) p ,, ,, A และ r

8. ในการทดลองยืนยันกฎของ Hooke นำหนัก

ต่าง ๆ ใส่ในถาด แขนงถ่วง ลวดสปริงเหล็กที่
เหนียว และวัดส่วนยกแต่ละครั้งที่เติมน้ำหนัก
บันทึกการทดลองแสดงไว้โดยตารางดังนี้

น้ำหนักเป็นกรัม	100	200	300	400
ส่วนยกออกเป็น ซม.	2.15	4.35	6.50	8.55

จงเขียนกราฟ ส่วนยก เป็นฟังก์ชันของ น้ำหนัก
ถ่วง จากกราฟนี้ หาส่วนยกเนื่องจากน้ำหนัก

(ก) 150 กรัม (ข) 250 กรัม (ค) 380 กรัม

9. จากสมการ $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ บอก x เป็น
ฟังก์ชันของ y จากผลลัพธ์นี้ หาค่า x เมื่อ

(ก) $y = 4$ (ข) $y = \frac{1}{2}$

10. ตารางต่อไปนี้แสดงเวลาที่ทำให้เงินเป็น 2 เท่า
เดิม ถ้าให้กู้โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นหนึ่ง
คอกเบี้ยทบต้นครึ่งปี

จำนวน	$69\frac{1}{2}$	$46\frac{1}{3}$	23	$23\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	14	$11\frac{3}{4}$
อัตราดอกเบี้ย	1%	$1\frac{1}{2}\%$	$2\frac{1}{2}\%$	3%	4%	5%	6%

เขียนกราฟเวลา เป็นฟังก์ชันของอัตราดอกเบี้ย
จากกราฟหาเวลาที่ต้องการให้เงินเป็น 2 เท่า
เกิน ในอัตราดอกเบี้ย (ก) $3\frac{1}{2}\%$ (ข) $4\frac{1}{2}\%$
(ค) $6\frac{1}{2}\%$

11. ในการทดลองสมบัติการหักเหของแสงที่ก้อน ลวด
เหล็กก้อนท่อนหนึ่งยาว 8" และด้านตัด .444
ตร. นิ้ว ถูกเขาน้ำหนักถ่วงต่าง ๆ กัน แล้ววัด
ส่วนยัก เนื่องจากน้ำหนักถ่วงแต่ละครั้ง ผล
ของการทดลองมีทั้งการวางค้ำไป:

จงเขียนกราฟส่วนยักเป็นฟังก์ชันของน้ำหนัก
ถ่วง และจากกราฟนี้ จงหาส่วนยัก เมื่อถ่วง
น้ำหนัก (ก) 9,500 เป้าตัน (ข) 11,500

เปานต์ (ค) 13,500 เปานต์ ภายในขอบ
เขตค้ำของน้ำหนักเท่าใด ที่กฎของฮุกยังคงใช้
ได้

น้ำหนักถ่วงเป็นเปานต์	ส่วนยืดยาว
3,550	0.0000
5,000	.0020
7,000	.0030
9,000	.0045
11,000	.0057
12,000	.0061
13,000	.0079
14,000	.0703
15,000	.0773
16,000	.0911
16,500	.0954

12. จากสมการ $y = 1 + \sqrt{x^2 + 4}$, จงบอก x เป็นฟังก์ชันของ y จากนาค่าของ x เมื่อ

(ก) $y = 10$, (ข) $y = 3$

พ. 4. 9. การแก้สมการทางเส้น 2 ชั้น ด้วยกราฟ เราทำดังนี้

(1) เขียนกราฟของ สมการ ทั้งสองบนกระดาษกราฟเดียวกัน และใช้เสกสของ coordinates เดียวกัน

(2) หา coordinates ของจุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกัน coordinates นี้น คือดาค่าของ unknowns ทั้งสอง และจากกราฟที่เขียน เราได้หลักสังเกตดังนี้

(ก) ถ้าเส้นตรงทั้งสอง ตัดกัน ที่จุดๆ เดียว สมการทั้งสองต่างเป็นอิสระ และมีโซลูชัน (ทำไม)

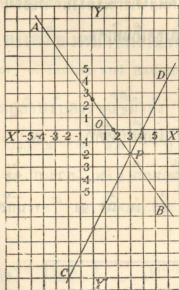
(ข) ถ้าเส้นตรงทั้งสอง ขนานกัน สมการไม่มีโซลูชัน (ทำไม)

(ค) ถ้าเส้นตรงทั้งสองทับกัน สมการทั้งสอง ต่างต้องอาศัยกันและกัน ไม่เป็นอิสระ (ทำไม)

ตัวอย่าง = โจทย์สมการ โดยกราฟ:

$$3x + 2y = 5 \quad (1)$$

$$y = 2x - 8 \quad (2)$$



จากสมการ (1) และ (2) เราได้เส้นตรง AB
และ CD ตามลำดับ

เส้นตรงทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด P (3, -2)

ดังนั้น: โซลูชันคือ $x = 3; y = -2$ ดี

หมายเหตุ วิธีแก้สมการโดยกราฟน่าจะไม่ได้
โซลูชันที่แน่นอนเหมือนกับการคำนวณค่าออกมา ทั้งนี้
เนื่องจากข้อผิดพลาดขบพร่องในการเขียน จึงต้องการ
ความละเอียดละเอียดเป็นพิเศษ

แบบฝึกหัดที่ 14 พ.

จากแบบฝึกหัดที่ 9 พ. ส่วน ก. ข้อ 4 ถึงข้อ 12
และส่วน ข. ข้อ 17 ถึง 23 จึงแก้สมการนั้นๆ
โดยกราฟ

บทที่ ๕ พ.

ทฤษฎีแห่งดรรชนีกำลัง

และเครื่องหมายกรณฑ์

Theory of Indices and Radicals

พ. 5. 1. กฎสำหรับดรรชนีกำลัง

เราทราบว่า $a^2 = a.a$ 2 แฟกเตอร์

$a^3 = a.a.a$ 3 ,,

ทำนองเดียวกัน $a^m = a.a.a....m$,,

กฎที่ 1

การคูณ

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

ตัวอย่าง

$$a^5 . a^7 = a^{5+7} = a^{12}$$

$$5^x . 5^2 = 5^{x+2}$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } a^4 . a^2 . a^5 = a^{4+2+5} = a^{11}$$

กฎที่ ๒

การหาร

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{เมื่อ } m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{เมื่อ } n > m$$

ตัวอย่าง

$$\frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$$

$$\frac{x^5}{x^8} = \frac{1}{x^{8-5}} = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{หรือ } x^A = x^{3-3} = x^{-3}$$

กฎที่ ๓

กำลังยกกำลัง

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ตัวอย่าง

$$(x^7)^3 = x^{7 \times 3} = x^{21}$$

$$(y^{a+1})^2 = y^{2a+2}$$

กฎที่ 4

กำลังของผลคูณ

$$(ab)^m = a^m b^m$$

ตัวอย่าง

$$(xy)^4 = x^4 y^4$$

$$(a^2 b c^3)^3 = a^{2 \cdot 3} b^3 c^{3 \cdot 3} = a^6 b^3 c^9$$

กฎที่ 5

กำลังของผลหาร

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

ตัวอย่าง

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$$

$$\left(\frac{ac}{2d^2}\right)^4 = \frac{a^4 c^4}{16d^8}$$

ข้อควรระวังความผิดพลาด

$$1. a^2 + a^3 \neq a^5 \quad (\text{เพราะไม่ใช่คูณกัน})$$

$$2. a^2 \cdot b^5 \neq ab^7 \quad (\text{เพราะตัวฐานไม่เหมือนกัน})$$

$$3. x^3 - x^2 \neq x \quad (\text{เพราะไม่ใช่หารกัน})$$

$$4. 3a^2 \neq (3a)^2 \quad \text{จึง} \quad \neq 9a^2$$

พ. 5. 2. กำลังที่เป็นเศษส่วน วรรณชกำลังอา
เป็นจำนวนเต็ม, เศษส่วน ขว, ลบ, คันย หรือตัว
อักษรใดทั้งสัน และกฎทั้ง 5 ข้อทกล่าวมาแล้ว ให้
ใช้คูลมใดทุก ๆ กรณี เช่น

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = x^2$$

จากนั้น จึงเห็นได้ว่า x^2 อาแยกเป็นแฟคเตอร์
เหมือนกัน คือ $x^{\frac{2}{3}}$ ใ้ 3 แฟคเตอร์ หรืออนคือ
 $\frac{2}{3}$ เป็นกรณหาค 3 ของ x^2

นิยาม ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มและเป็นขว

$$(1) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

หรือจะเขียนเป็น

$$(2) \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

ยกเว้นแต่เฉพาะเมื่อ a เป็นลบและ n เป็นเลขคี่
พร้อม ๆ กัน

ตัวอย่าง

$$\text{โดย } (2), (-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$$

พ. 5. 3. กำลังเป็นศูนย์

$$\boxed{a^0 = 1} \quad (\text{โดยที่ } a \neq 0)$$

$$a^0 a^m = a^{0+m} = a^m$$

$$a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1 \quad (a \text{ ใดๆ } \neq 0)$$

ตัวอย่าง

$$(78)^0 = 1, (ab)^0 = 1 \quad \text{ถ้า } a \neq 0, b \neq 0$$

พ. 5. 4. กำลังเป็นลบ

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

(ถ้า $a \neq 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มและเป็นบวก)

$$a^2 a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$$

$$\therefore a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

ตัวอย่าง

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} ; x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

หลักข้อ 4 นี้ แสดงว่า ถ้าต้องการจะเปลี่ยน
 วรรณจากลบเป็นบวก หรือบวกเป็นลบของจำนวนใด
 ก็ตาม ให้กลับจากเศษเป็นส่วนหรือส่วนเป็นเศษ

ตัวอย่าง 1. ให้ทำให้เป็นกำลังบวก

$$\frac{3x^2y^{-3}}{2a^{-1}b} = \frac{3ax^2}{2by^3}$$

ตัวอย่าง 2. หาค่าของ $\frac{2-2^{-2}}{2+2^{-2}}$ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย 2^2 เราได้

$$\frac{2-2^{-2}}{2+2^{-2}} = \frac{(2-2^{-2})2^2}{(2+2^{-2})2^2} = \frac{2^3-2^0}{2^3+2} = \frac{8-1}{8+1} = \frac{7}{9}$$

แบบฝึกที่ 15 พ.

(ข้อ 1—50 ทำได้ด้วยการลอกเปล่า)

ทำให้เป็นผลสำเร็จ

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. x^3x^5 | 2. a^6a^4 |
| 3. y^2y^a | 4. x^ay^b |
| 5. $(y^4)^3$ | 6. $(z^5)^4$ |
| 7. $(a^3)^b$ | 8. $(x^a)^b$ |
| 9. $\frac{a^{12}}{a^7}$ | 10. $\frac{x^6}{x^3}$ |
| 11. $\frac{y^a}{y^2}$ | 12. $\frac{x^a}{x^b}$ |
| 13. $(-2x^2)^2$ | 14. $(3y^3)^4$ |
| 15. $(-5xy^4)^3$ | 16. $(x^2y)^a$ |
| 17. $(\frac{a}{b})^3$ | 18. $(\frac{-2x}{y})^3$ |
| 19. $(\frac{-3x^2}{2y})^4$ | 20. $(\frac{xy}{y^2})^a$ |
| 21. $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ | 22. $a^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$ |
| 23. $(y^2)^{\frac{1}{4}}$ | 24. $(d^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ |

25. $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

26. $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}$

27. $(x^2 y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

28. $(2xy^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$

29. $(\frac{a^3}{b^2})^{\frac{2}{5}}$

30. $(\frac{x^a}{y^3})^{\frac{3}{5}}$

หาค่าของ:

31. $9^{\frac{1}{2}}$

32. $27^{\frac{2}{3}}$

33. $(-32)^{\frac{3}{5}}$

34. $(\frac{9}{16})^{\frac{3}{2}}$

35. $(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}$

36. $(.010)^0$

37. 81^{-4}

38. $64^{\frac{1}{3}}$

ทำให้เป็นกำลังบวก:

39. $x^3 y^{-4}$

40. $\frac{2x^{-4}}{3y^{-3}}$

41. $\frac{4ax^{-4}}{b^{-2}y^{-3}}$

42. $x(y+z)^{-2}$

ทำให้มีเครื่องหมายกรณฑ์

43. $a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{2}}$

44. $x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{3}}$

45. $5a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{6}}$

46. $a^{\frac{1}{5}}(x+y)^{\frac{3}{5}}$

ทำให้เป็นกรรณเศษส่วน

$$47. \sqrt{a} \sqrt[3]{x}$$

$$48. \sqrt[3]{a^{-4}} \sqrt[4]{d^5}$$

$$49. 2x^2 \sqrt[3]{y^7}$$

$$50. a \sqrt[4]{x^5} \sqrt[4]{y^3}$$

ทำให้ง่าย

$$51. (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \quad 52. (a^{2x} - a^{-3x})^{-2}$$

$$53. \left(\frac{xz}{3y}\right)^4 \left(\frac{2xy^2}{z}\right)^3 \quad 54. \left(\frac{.008x^{-3}}{27z^0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$55. \frac{1}{3^2 + 3^{-2}}$$

$$56. \frac{x^{-4}y^{-4}}{x^{-2} + y^{-2}}$$

$$57. \left(\frac{x^{-4}y^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$58. \left[\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3(x+y)}\right]^{-3}$$

$$59. (x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{3}{4}} + 2y^{\frac{1}{2}}) \quad 60. (x^{\frac{5}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}})^{-2}$$

$$61. \left(\frac{a^2x^4}{y^6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{9y^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad 62. \frac{8^{-\frac{2}{3}} + (2y)^0}{2(x^2)^0}$$

$$63. \frac{a}{y^3 - y^{-3}}$$

$$64. \left(\frac{81x^{-3}}{16(x-y)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$65. \left(\frac{4x^{\frac{2}{3}}y^2}{9x^0}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$66. \frac{x^2 - y^{-2}}{x^{-2} + y^2}$$

$$67. (x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$68. (x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} - 5 + 6x^{-\frac{3}{2}})(2x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$

$$69. \left(\frac{.0064x^{-\frac{2}{3}}}{9y^0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$70. \left(\frac{2axy^{\frac{1}{2}}}{3bz^2} \right)^4 \left(\frac{9z^4}{4y^6} \right)^{\frac{1}{2}}$$

W. 5. 5 Imaginary Numbers

โดยที่กำลังสองของเลขจำนวนหนึ่งจะเป็นบวกหรือลบก็ตามย่อมได้ผลลัพธ์เป็นบวกเสมอ ทั้งนี้เพราะกำลังสองของเลขจำนวนที่เป็นลบจะมีค่าเป็นบวกเสมอ พหุคูณหนึ่งจำนวนลบไม่มีกรณีที่สอง

ถ้าเราสมมติขึ้นว่า i เป็นเลขจำนวนหนึ่งซึ่ง

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}$$

โดยการสมมติให้เกิดมีจำนวน i ขึ้นเช่นนั้น ทำให้เลขจำนวนลบใดๆ มีกรณีที่สองขึ้นได้

เช่นตัวอย่าง $\sqrt{-9}$ $z = \pm 3i$

$$\text{เพราะว่า } (\pm 3i)^2 = (\pm 3)^2 \times i^2 = 9 \times -1 \\ = -9$$

จำนวนใดๆ ที่อยู่ ในรูป $a+bi$, เมื่อ $b \neq 0$
 เช่นนี้เราเรียกว่า จำนวนในมโนภาพ imaginary
 number เพราะเป็นเสมือนจำนวนที่นักคณิตศาสตร์ได้
 วาดภาพให้มันเห็นเท่านั้น ไม่สามารถจะมีจริงได้ เช่น
 เกี่ยวกับ 0 หรือ ∞ ซึ่งใช้แทนจำนวนที่น้อยที่สุดกับ
 มากที่สุดตามลำดับ

(ความจริงตัวอย่างที่น้อยที่สุด มองแง่หนึ่ง 0
 ก็ต้องมีค่าอะไรสักจำนวนหนึ่ง เพราะถ้าไม่มีค่าเสีย
 เลยจะเรียกว่ามีค่าน้อยที่สุดได้อย่างไร แต่โดยที่ 0
 ถูกสมมติให้มค่าน้อยที่สุด เมื่อบวกหรือลบด้วย 0
 ไม่ทำให้ค่าเดิมเปลี่ยนแปลง เมื่อคูณด้วย 0 ผลลัพธ์
 เลยกลายเป็น 0 และเมื่อหารด้วย 0 ผลลัพธ์ก็กลับมาก

ที่สุด คือเท่ากับ ∞ ทั้ง 0 และ ∞ ถ้ามีผู้ถามว่ามี
ค่าสักเท่าใด ใคร ๆ ก็ตอบไม่ได้ เพราะเป็นแค่ตั้ง
ขึ้นสำหรับแทนค่าตามมโนภาพเท่านั้น)

ในรูป imaginary number $a+bi$ ถ้า $b = 0$
จำนวนนี้จะกลายเป็นจำนวนธรรมดา ซึ่งเรียกว่า
จำนวนแท้ real number

ตัวอย่าง

$$1. \text{จงทำให้ง่าย: } (4-3\sqrt{-5})(-2+4\sqrt{-5})$$

$$(4-3\sqrt{-5})(-2+4\sqrt{-5})$$

$$= (4-3i\sqrt{5})(-2+4i\sqrt{5})$$

$$= -8 + 16i\sqrt{5} + 6i\sqrt{5} - 12i^2(\sqrt{5})^2$$

$$= -8 + 22i\sqrt{5} + 60$$

$$= 52 + 22i\sqrt{5}$$

2. จงทำให้ง่าย: $\frac{3+\sqrt{-2}}{4+2\sqrt{-2}}$

$$\begin{aligned}\frac{3+\sqrt{-2}}{4+2\sqrt{-2}} &= \frac{3+i\sqrt{2}}{4+2i\sqrt{2}} \times \frac{4-2i\sqrt{2}}{4-2i\sqrt{2}} \\ &= \frac{12-2i\sqrt{2}-4i^2}{16-8i^2} \\ &= \frac{16-2i\sqrt{2}}{24} = \frac{8-i\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 16 พ.

หาคำตอบที่ 2 ของจำนวนต่อไปนี้:

1. -4 2. -9 3. $-\frac{1}{4}$

4. -7 5. $-\frac{5}{9}$ 6. $-x^2$

7. $\frac{-y^2}{26}$ 8. $-36a^4$ 9. $-5x^6$

10. $\frac{-3b^2}{4}$

จากความจริงที่ว่า $i^2 = -1$, หาคำของ:

11. i^3 12. i^4 13. i^6 14. i^9

15. i^{12} 16. i^{13} 17. i^{101} 18. i^{24}

19. i^{103}

ส่วน ก.

ทำให้ง่าย:

20. $(2+3i)(2-3i)$ 21. $(2+5i)^2$

22. $(1+i)^3$ 23. $(2-i)^3$

24. $(3+2\sqrt{-2})(-1+3\sqrt{-2})$

25. $(-5+2\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$

26. $\frac{3-\sqrt{-2}}{3+\sqrt{-2}}$

27. $\frac{2+2\sqrt{-7}}{-2-\sqrt{-7}}$

28. หาคำของ x^2-3x+1 เมื่อ $x = 2-3i$

29. หาคำของ $3x^2-5x+1$ เมื่อ $x = 2-i\sqrt{12}$

30. โปรดแสดงว่า $1 - \sqrt{-6}$ เป็น root หนึ่งของ

$$x^2 - 2x + 7 = 0$$

31. โปรดแสดงว่า $\frac{2-i\sqrt{10}}{2}$ เป็น root หนึ่งของ

$$2x^2 - 4x + 7 = 0$$

ส่วน ข.

ทำให้ง่าย:

32. $(a+bi)(a-bi)$

33. $(\sqrt{x}+i\sqrt{y})(\sqrt{x}-i\sqrt{y})$

34. $(3-5i)^2$

35. $(3-i)^3$

36. $(-5-3\sqrt{-7})(3+5\sqrt{-7})$

37. $(2+3\sqrt{-3})(4+\sqrt{-3})$

38. $\frac{2+3\sqrt{-6}}{1-2\sqrt{-6}}$

39. $\frac{3+\sqrt{-5}}{3-\sqrt{-5}}$

40. จงหาค่าของ $2x^2-x-5$ เมื่อ $x = 3+i\sqrt{3}$

41. จงหาค่าของ $2x^2-3x+5$ เมื่อ $x = 1-\sqrt{-2}$

42. จงแสดงว่า $\frac{-2-\sqrt{-5}}{3}$ เป็น root หนึ่งในของ

$$3x^2+4x+3 = 0$$

43. จงแสดงว่า $-2-i$ เป็น root หนึ่งในของ

$$x^2+4x+5 = 0$$

พ. 5. 6. เซต Surd หรือจำนวนในเครื่องหมายกรณฑ์

จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ มีชื่อ

เรียกตามอันดับ order ของกรณฑ์นั้น เช่น

$\sqrt{2}$ เรียกว่า square root ของ 2, กรณฑ์ที่สองของ 2

$\sqrt[3]{2}$ เรียกว่า cube root ของ 2, กรณที่
สามของ 2

$\sqrt[4]{5}$ เรียกว่า fourth root ของ 5, กรณที่
สี่ของ 5

$\sqrt[5]{pq}$ fifth root ของ pq, กรณที่ 5 ของ pq
 $\sqrt[mn]{a^p}$ mnth root ของ a กำลัง p, กรณที่ mn
ของ a กำลัง p

กรณที่ 2 และ 3 เท่านั้น ทมชื่อเรียกแปลก
เป็นพิเศษว่า square และ cube roots ตามลำดับ

และโดยความนิยม กรณที่ 2 ไม่ต้องมีเลข
order ข้างหน้าเครื่องหมายกรณที่ ส่วนอื่นอื่นต้อง
ใส่ด้วย

พ. 5. 7 การแปลงจาก surd เป็น index and
vice versa

$$\sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab} = ab^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

หลัก การแปลง

(1) ในการแปลง surd เป็น index เอา order ของกรณฑ์เป็นตัวส่วนของกำลัง และเอากำลังของจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายของกรณฑ์เป็นตัวเศษ (ถ้ามี)

(2) กลับกัน, แปลง index เป็น surd เอาตัวส่วนของ index เป็น order ของกรณฑ์ และเอาตัวเศษของ index เป็นกำลังของจำนวนนั้น

ตัวอย่าง $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{\frac{3}{ab^2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}}}$$

พ. 5. 8 การทำ surd ให้เป็นแบบง่ายที่สุด มี
หลักดังนี้

(ก) ตัวส่วนต้องไม่ติดเครื่องหมายกรณฑ์

(ข) กำลังของจำนวนภายใน กับ order ของ
surd ทอนกันลงเป็นอย่างต่ำแล้ว

ตัวอย่าง

1. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ไม่เป็นแบบง่ายที่สุด ทำเป็นแบบง่ายที่สุด
ดังนี้

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

2. $\sqrt[n]{x^m}$ ไม่เป็นแบบง่ายที่สุด ต้องทอนเป็น $\sqrt[n]{x^2}$

3. $\sqrt[3]{16}$ ไม่เป็นแบบง่ายที่สุด เพราะ $16 = 2 \times 8$
จึง $= 2 \times 2$

จึงเอา 2 ออกนอกกรณฑ์ได้ ดังนี้

$$\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

การทำให้เป็นอย่างง่าย จึงใช้กฎไตรกฎหนึ่งต่อไปนี้

กฎที่ 1 ถ้าจำนวนภายใน surd อาจทำให้กำลังเป็นแฟกเตอร์ของ order ของกฎ ให้ทำจำนวนภายในเป็นจำนวนที่มกำลังซึ่งจะทอนกับ order ของกฎได้ ทุกตัวอย่างนี้จะเข้าไปอีก

ตัวอย่าง

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{9^2} [= 9^{\frac{2}{6}} = 9] = \sqrt{9}$$

$$\sqrt[4]{9x^2} = \sqrt[4]{(3x)^2} [= (3x)^{\frac{2}{4}} = 3x^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \sqrt{3x}$$

กฎที่ 2 ถ้าจำนวนภายในกฎมีแฟกเตอร์ที่มีกำลังเท่ากับ order ของกฎ ให้เอาแฟกเตอร์นั้นออกนอกเครื่องหมายกฎ

214
515
0893 M

๕๘

ตัวอย่าง

$$\sqrt[3]{16x^5y^7} \left(= \sqrt[3]{8x^3y^6} \cdot \sqrt[3]{2x^2y} \right) \\ = 2xy^2 \sqrt[3]{2x^2y}$$

กรณี 3 ถ้าส่วนของจำนวนใด เป็น surd คือ
ติดเครื่องหมายกรณฑ์ จะทำให้เป็นจำนวน rational
ทำได้โดยเอาจำนวนซึ่งจะทำให้ส่วนเป็น perfect n^{th}
power เมื่อ n เป็นอันดับของกรณฑ์

ตัวอย่าง

$$1. \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$2. \frac{5}{\sqrt{a}} = \frac{5}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{5\sqrt{a}}{a}$$

$$3. \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

$$4. \sqrt{\frac{11}{27a^3}} = \sqrt{\frac{11}{27a^3}} \times \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{33a}}{9a^2}$$

พ. 5. 9 การบวกและการลบ surds

surd ของจำนวนเดียวกัน และอันดับ (order) เท่ากันเรียกว่า surd เหมือน เช่น $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $ab\sqrt{2}$ เรียกว่า surds เหมือน ถ้าไม่เป็นดังนี้ เป็น surds ไม่เหมือน

surds เหมือน เท่านั้นที่จะบวกลบกันได้ โดยเอาสัมประสิทธิ์ของ surds นั้น ๆ บวกลบกัน

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 1. \quad \sqrt{48} + \sqrt{75} - \frac{1}{\sqrt{3}} &= 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{26}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$2. \quad a\sqrt{b} + 2\sqrt{b} - a^2\sqrt{b} = (2 + a - a^2)\sqrt{b}$$

พ. 5. 10 การทำให้ order ของ surds เท่ากัน

หลัก จะแปลง surds ที่มี order หวอนนคช อันดับไม่เท่ากัน ให้มีอันดับเท่ากัน ให้แปลงเป็นรูป

indices เล็กก่อน แล้วหา ค.ร.น. ของส่วนของ
กำลัง ต่อไปให้ index ทุกอันมีส่วนเท่ากัน แล้ว
ทำให้เศษเป็นพหุคูณ ของเศษเดิม

ตัวอย่าง 1. $a^{\frac{2}{3}}, b^2, c^{\frac{1}{4}}$

ค.ร.น. ของส่วนของ indices = 12

$$\therefore a^{\frac{2}{3}}, b^2, c^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12}}, b^{\frac{24}{12}}, c^{\frac{3}{12}}$$

$$2. \sqrt[3]{k^2}, \sqrt[5]{d}, \sqrt{ab} = k^{\frac{2}{3}}, d^{\frac{1}{5}}, (ab)^{\frac{1}{2}}$$

ค.ร.น. ของ 3, 5 และ 2 = 30

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{k^2}, \sqrt[5]{d}, \sqrt{ab} &= k^{\frac{20}{30}}, d^{\frac{6}{30}}, (ab)^{\frac{15}{30}} \\ &= \sqrt[30]{k^{20}}, \sqrt[30]{d^6}, \sqrt[30]{ab^{15}} \end{aligned}$$

พ. 5. 11 การคูณ surds

หลัก ทำให้ surd ทุกอันมี order เท่ากัน จึง
จะคูณกันได้ ถ้า surd มี order ไม่เท่ากัน คูณ
กันไม่ได้

ตัวอย่าง

$$1. \sqrt{10} \times \sqrt{6} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt{3x} \times \sqrt[3]{x^2} &= 3x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{2}{3}} = (3x)^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{4}{3}} \\ &= \sqrt[6]{27x^3} \times \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{27x^7} \\ &= x \sqrt[6]{27x} \end{aligned}$$

พ. 5. 12 การหาร surds

หลัก ทำให้ surd ทกอันมี order เท่ากันก่อน
เช่น เกี่ยวกขวิคณ

ตัวอย่าง

$$1. \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

$$2. \frac{\sqrt{6a}}{\sqrt[3]{2a}} = \frac{(6a)^{\frac{1}{2}}}{(2a)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(6a)^{\frac{3}{6}}}{(2a)^{\frac{2}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{(6a)^3}}{\sqrt[6]{(2a)^2}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{(6a)^3}{(2a)^2}} = \sqrt[6]{\frac{216a^3}{4a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{54a}$$

พ. 5. 13 การทำส่วนที่เป็นกระบวนเทอม

irrational ให้เป็น rational

หลัก ถ้าส่วนมี surd 2 เทอม ให้คูณทั้งเศษ
และส่วน ด้วยกระบวนเทอมซ้ำกันส่วน แต่เครื่องหมาย
หมายผกผัน

ตัวอย่าง ทำส่วนให้เป็นจำนวนเต็ม $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{12-2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

พ. 5. 14.42 การคูณของสองกรณฑ์บวก
irrational ของ surds เหมือน

$$\begin{aligned}\text{ก. } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= a + b + 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

$$\text{ข. } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\text{ค. } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}1. (2\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 &= (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{7} \\ &= 12 + 7 + 4\sqrt{21} \\ &= 19 + 4\sqrt{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. (5\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 &= (5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 50 + 3 - 10\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$= 53 - 10\sqrt{6}$$

$$3. (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

แบบฝึกหัดที่ 17 พ.

(ข้อ 1—16 ทำได้ก็วยปากเปล่า)

หาคำของ:

1. $\sqrt{25}$

2. $\sqrt[3]{-64}$

3. $\sqrt[5]{-243}$

4. $\sqrt{9x^2}$

5. $\sqrt[3]{-27x^6}$

6. $\sqrt{\frac{16y^4}{81}}$

7. $\sqrt{\frac{8a^6}{b^3}}$

8. $\sqrt[4]{\frac{9}{x^8y^4}}$

จงอธิบายว่าข้อใดต่อไปนี้ ไม่อยู่ในแบบง่ายที่สุด,

9. $\sqrt{8}$

10. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

11. $\sqrt{x^3}$

12. $\sqrt[6]{x^4}$

13. $\sqrt[3]{3xy^5}$

14. $\sqrt[4]{\frac{a}{4b}}$

15. $\sqrt{x^{-2}y^{-1}}$

16. $\sqrt{x^2-2x^2y+xy^2}$

ทำให้เป็นแบบง่ายที่สุด:

$$17. \sqrt{\frac{2}{27}} \quad 18. \sqrt[3]{\frac{2x^4}{9}}$$

$$19. \sqrt[5]{64a^6} \quad 20. \sqrt[5]{49x^6}$$

$$21. \sqrt[4]{\frac{1}{9x^7}} \quad 22. \sqrt[6]{\frac{x^4}{y^2}}$$

$$23. \sqrt[5]{81x^4y^2} \quad 24. \sqrt[5]{\frac{3}{16a^6x^2}}$$

$$25. \sqrt[10]{\frac{a^{15}}{b^3}}$$

ทำให้ง่าย,

$$26. \sqrt{8+2\sqrt{50}} - \sqrt{98}$$

$$27. \sqrt{\frac{9}{5}} - \sqrt{\frac{5}{9}} + 3\sqrt{20}$$

$$28. 2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27}} + \sqrt{75}$$

$$29. 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + 3\sqrt[3]{54}$$

จงคูณและทำผลลัพท์ให้ง่าย,

30. $\sqrt{6}\sqrt{15}$

31. $\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{4x^4y}$

32. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{6})^2$

33. $(2\sqrt{7}+3)(2\sqrt{7}-3)$

34. $(\sqrt{5}-3\sqrt{2})(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$

35. $(3\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+4)$

36. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}$

37. $\sqrt{ax}\sqrt[4]{a^3x^2}$

38. $\sqrt{x}\sqrt[4]{x}$

39. $\sqrt[3]{9x^2}\sqrt[6]{27x^5}$

จงหาร และทำผลลัพท์ให้ง่าย,

40. $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$

41. $\frac{\sqrt[3]{16x^4}}{\sqrt[3]{4x^2}}$

$$42. \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$43. \frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[6]{4x^5}}$$

$$44. \sqrt[5]{\frac{64x^6}{4x^3}}$$

$$45. \frac{\sqrt[4]{9x^2y}}{\sqrt[6]{3xy}}$$

ทำส่วนให้เป็นจำนวนเต็ม:

$$46. \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$47. \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

$$48. \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$49. \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$50. \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$$

$$51. \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$$

$$52. \frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$$

$$53. \frac{\sqrt{2a-3}\sqrt{a+b}}{\sqrt{2a+3}\sqrt{a+b}}$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ 3

1. ทำให้ง่าย, $\left[x, \sqrt{\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{5}{3}}} \right]^{-\frac{1}{3}}$

2. ทำให้ง่าย : $\frac{a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}} - \frac{7a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+6b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-6b^{\frac{2}{3}}}$

3. หาว $6x^{-1}y^2+18xy^{-2}-23+x^{-\frac{1}{2}}y$ โดย $3x^{\frac{1}{2}}y^{-1}$
 $-2x^{-\frac{1}{2}}y+x^{\frac{1}{2}}$

4. หาค่าของ $\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$

เมื่อ $y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$,

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ทำให้ส่วนเป็นจำนวนเต็ม;

5. $\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{7+3}-\sqrt{3}\sqrt{7-2}}$

$$6. \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$7. \frac{3}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$8. \frac{a}{x - \sqrt{y}}$$

9. จงแสดงว่า $1-i$ เป็นกรรมาท 4 ของ -4

10. จงแสดงว่า $2 + \sqrt{3}$ เป็นกรรมาท 3 ของ $-10 + 9i\sqrt{3}$

บทที่ ๖ พ.

สมการควอดเรติก

พ 6. 1 ฟังก์ชันควอดเรติก Quadratic function
ซึ่งมีตัวแปร 1 ตัว เช่น x เขียนได้ในแบบ

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

สมการควอดเรติก ซึ่งมี unknown ตัวเดียว
เช่น x เขียนได้ในแบบ

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

• สมการควอดเรติก คือสมการที่ตัว unknown
ตัวหนึ่งจะมีค่าได้ 2 ค่า คือมี 2 roots

พ 6. 2 การแก้สมการควอดเรติก โดยแยกเป็น
แฟกเตอร์

จากสมการควอดเรติก ซึ่งจัดให้ขวามือ $= 0$

เทอมทางซ้ายอาจแยกเป็นแฟกเตอร์ได้ และ roots

ของสมการ นั้นคือค่าของ unknown หาหาได้โดยอาศัยหลักดังนี้

หลัก ถ้าผลคูณของสองแฟกเตอร์ หรือมากกว่า เท่ากับศูนย์ แฟกเตอร์อื่นใดอันหนึ่งจะเป็นเพียงแฟกเตอร์เดียว หรือหลายอัน ย่อมมีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง 1. แก้สมการ $x^2 - x - 2 = 0$

แยกเป็นแฟกเตอร์, $(x-2)(x+1) = 0$

โดยหลักที่กล่าวแล้ว $x-2 = 0$ หรือ $x+1 = 0$ เพียงอันเดียว หรือ $= 0$ ทั้งสองอัน

ถ้า $x-2 = 0$; $x = 2$

ถ้า $x+1 = 0$; $x = -1$

ดังนั้น roots ของสมการ คือ 2 หรือ -1

2. แก้สมการ $x^2 = 3x$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

ดังนั้น x หรือ $x-3 = 0$

$$\text{ถ้า } x-3 = 0; x = 3$$

$$\text{ดังนั้น } x = 0 \text{ หรือ } 3$$

หมายเหตุ นักเรียนควรระวัง อย่าเอา x หาคลอท

เพราะถ้าเอา x หาคลอท จะได้ $x = 3$ เพียง

root เดียว และทั้ง root 0 เสีย ซึ่งเป็นการไม่

สมบูรณ์

พ 6. 3 การแก้สมการควอดเรติก ในแบบ

$$(ax+b)^2+c=0$$

ตัวอย่าง 1. แก้สมการ $(2x+1)^2-3=0$

$$(2x+1)^2 = 3$$

ถอดกรณฑ์ทั้งสองข้าง $2x+1 = \pm\sqrt{3}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

(ในทันที $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$)

2. แก้สมการ $3x^2+4=0$

$$x^2 = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ถอดกรณาทสองทงสองข้าง } x &= +\sqrt{\frac{-4}{3}} \\ &= +\frac{2i}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ถ้าสมการนั้นไม่อยู่ในแบบ $(ax+b)^2 = k$
 เราอาจทำให้เข้าแบบนี้ได้ โดยการทำให้เป็นกำลังสอง
 สมบูรณ์ ซึ่งดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้ :

1. ทำให้เข้ารูป $ax^2+bx = -k$
 2. คูณทั้งสองข้างด้วย 4 เท่า สมประสิทธิ์ของ x^2 (นั่นคือคูณด้วย $4a$)
 3. บวกทั้งสองข้างด้วยกำลังสองสมประสิทธิ์ของ x ใน 1
 4. เขียนทางขวาเป็นรูปกำลังสองของไบโนเมียล
 5. ถอดกรณาทสองทงสองข้าง แล้ว แก้ค่า
 ของ x
- ข้อแม้ ถ้าสมประสิทธิ์ของ x ในข้อ 1 เป็นเลขคู่
 ข้อ 2 กับข้อ 3 อาจก็ก่แปลงให้ง่ายขึ้น ดังนี้

๒. คูณทั้งสองข้าง ด้วยสัมประสิทธิ์ของ x^2
(นั่นคือ a)

๓. บวกทั้งสองข้าง ด้วยครึ่งหนึ่งของสัมประสิทธิ์
ของ x ใน 1 ยกกำลังสอง
ตัวอย่าง 1.

แก้สมการ $2x^2 + 5x - 3 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสอง

$$2x^2 + 5x = 3 \quad \dots\dots\dots (\text{ขั้น 1})$$

คูณด้วย (4×2) หรือ 8,

$$16x^2 + 40x = 24 \quad \dots\dots\dots (\text{ขั้น 2})$$

บวกด้วย 5^2 หรือ 25,

$$16x^2 + 40x + 25 = 24 + 25 = 49 \quad \dots\dots (\text{ขั้น 3})$$

$$(4x + 5)^2 = 49 \quad \dots\dots\dots (\text{ขั้น 4})$$

$$\text{ถอดกรณฑ์ทั้งสอง } 4x + 5 = \pm 7$$

$$4x = -5 \pm 7 = 2 \text{ หรือ } -12$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ หรือ } -3$$

2. แก่สมการ $3x^2+2x-1=0$ โดยทำเป็นกำลังสอง

$$3x^2+2x = 1$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x (คือ 2) เป็นเลขคู่
คูณทั้งสองข้างด้วยสัมประสิทธิ์ของ x^2 (คือ 3)

$$9x^2+6x = 3 \dots\dots (\text{ขั้น 2'})$$

บวกด้วย $(\frac{2}{3})^2$ หรือ 1

$$9x^2+6x+1 = 4 \dots\dots (\text{ขั้น 3'})$$

$$(3x+1)^2 = 4$$

$$\text{ถอยกรณพท 2, } 3x+1 = \pm 2$$

$$3x = -1 \pm 2 = 1 \text{ หรือ } -3$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ หรือ } -1$$

3. แก่สมการ $x^2+6x=-11$ โดยทำเป็นกำลังสอง

บวก $(\frac{6}{2})^2$ หรือ 9 ทั้งสองข้าง

$$x^2+6x+9 = -2$$

$$(x+3)^2 = -2$$

ถอดกรณฑ์ที่ 2, $x+3 = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$

$$x = -3 \pm i\sqrt{2}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ พ.

1. เมื่อแก้สมการ $(x-1)(x+3) = 4$ อธิบาย
ว่า ถ้าทำต่อไปถึงขั้นใดอย่างใด :

โดยที่ $(x-1)(x+3) = 4$, เราได้

$$x-1 = 4 \text{ หรือ } x+3 = 4$$

$$\text{จากนั้น } x = 5 \text{ หรือ } 1$$

นี่เป็นข้อผิดพลาดของนักเรียน ที่เคย

ปรากฏอยู่บ่อย ๆ จึงเป็นข้อควรระวัง

2. เพื่อจะหา roots ของสมการ $x^2 = a$ เรา

ถอด sq.rt. ทั้งสองข้าง และได้ $x = \pm\sqrt{a}$

การที่ใส่เครื่องหมาย $\pm$ เท่านั้น ทำให้

เป็นการเพียงพอ

ส่วน ก.

แก้ค่าของ x :

3. $2x^2 = 8$ 4. $5x^2 + 9 = 0$

5. $(x+2)^2 = 16$ 6. $(x+1)^2 + 5 = 0$

7. $3x^2 = 4x$ 8. $2x^2 - 11x = 0$

9. $x^2 - x = x + 35$ 10. $4x^2 + 3 = 8x$

11. $(x-2)(x+3) = 6$

12. $(2x+1)(x-1) = 9$

แก้โดยทำเป็นกำลังสอง

13. $3x^2 - x - 10 = 0$ 14. $x^2 + 8x = -7$

15. $3x^2 + 5x + 1 = 0$ 16. $5x^2 = 6x - 3$

17. $ax^2 + 4x = 3$ 18. $x^2 + bx = k$

ส่วน ข.

แก้ค่าของ x :

19. $3x^2 = 27$ 20. $6x^2 + 7 = 0$

$$21. (2x-1)^2 = 5 \quad 22. (3x+1)^2 + 4 = 0$$

$$23. 4x^2 = 7x \quad 24. 3x^2 + 5x = 0$$

$$25. x^2 + 3x = 24 - 2x$$

$$26. 5x = 12 - 2x^2$$

$$27. (2x-3)(x-2) = 3$$

$$28. (x+1)(3x+1) = 5$$

แก้โดยทำเป็นกำลังสอง

$$29. 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$30. x^2 - 2x = 2x + 5$$

$$31. 7x^2 - 8x = -2$$

$$32. 2x^2 - 3x = -3$$

$$33. x^2 - 2bx - 3 = 0$$

$$34. 3x^2 - kx - 1 = 0$$

พ 6. 5 สูตรสำหรับแก้ roots ของสมการ

ควอดเรติก

สมการควอดเรติกในรูปมาตรฐาน $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) เราวิธีแก้หลายวิธีทั้งที่เคยเรียนมาแล้ว และวิธีต่างๆ นั้นเราเลือกมาใช้ในที่นี้สักวิธีหนึ่ง คงจะสรุปไว้ในที่นี้.

ก. ถ้า $b = 0$, หา roots ได้โดยวิธีในข้อ 9.3

ข. ถ้า $b \neq 0$ แต่ $c = 0$ ใช้วิธีแยกเป็นแฟคเตอร์

ค. ถ้า $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ อาจใช้วิธีแยกเป็นแฟคเตอร์ ถ้าทางซ้ายมือแยกเป็นแฟคเตอร์ง่าย

แต่ถ้าแยกเป็นแฟคเตอร์ยาก หรือแยกเป็นแฟคเตอร์จำนวนเต็มไม่ได้ เราอาจใช้สูตรก็จะกล่าวต่อไป

สูตร ได้จากการทำเป็นกำลังสอง

$$\text{จากสมการ } ax^2+bx+c = 0$$

$$ax^2+bx = -c$$

$$\text{คูณด้วย } 4a, \quad 4a^2x^2+4abx = -4ac$$

$$\text{บวกด้วย } b^2, \quad 4a^2x^2+4abx+b^2 = b^2-4ac$$

$$(2ax+b)^2 = b^2-4ac$$

$$\text{ถอดกรณฑ์ทั้งสอง, } 2ax+b = \pm \sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2-4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ตัวอย่าง 1. แก้สมการ $3x^2-5x-22 = 0$

ในที่นี้ $a = 3, b = -5, c = -22$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times -22}}{2 \times 3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5 + \sqrt{25+264}}{6} \\
 &= \frac{5 + \sqrt{289}}{6} = \frac{5+17}{6} = \frac{11}{3} \text{ หรือ } -2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2. แก้สมการ x^2+3x+1

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

พ 6. 6 สมการที่ส่วนมีตัว unknown

เราทำให้เป็นสมการควอดเรติกก่อน แต่ข้อสำคัญเมื่อแก้ค่าของ x แล้ว ต้องตรวจสอบทุกครั้ง เพราะบางทีมี roots บางอันไม่มีความสัมพันธ์กับสมการนั้น

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวอย่าง} \quad & \text{แก้สมการ} \quad \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x+3} \\
 &= \frac{x^2-2x+3^2}{x^2-9}
 \end{aligned}$$

เรา ต.ร.น x^2-9 คูณตลอด

$$x+3-x+3 = x^2-2x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ หรือ } -1$$

แต่เราเห็นว่า ส่วนของสมการ หรือ ค.ร.น.

$x^2 - 9$ จะเป็นศูนย์ไม่ได้ เพราะถ้าส่วนเป็นศูนย์

สมการจะผิดความจริง

โดยที่ $x = 3$ เป็นค่าเหมาะเจาะสำหรับ

$$x^2 - 9 = 0$$

ดังนั้น $x = 3$ จึงต้องทิ้งไป

$$\therefore x = -1 \text{ เท่านั้น}$$

พ 6. 7 สมการมี surd

วิธีแก้ ให้นำข้างใดข้างหนึ่งของสมการมี surd
อันเดียวแล้วกำลังสองซึ่งจะทำให้เครื่องหมายลบ
หมดไป แล้วแก้โดยวิธีของสมการควอดเรติก

ในการแก้เช่นเดียวกับ 6.6 ต้องตรวจสอบค่า

ของ roots ทุกครั้ง

ตัวอย่าง 1 แก่สมการ $\sqrt{x+3} = 3x-1$

$$\text{sq. ทั้งสองข้าง} \quad x+3 = 9x^2-6x+1$$

$$9x^2-7x-2 = 0$$

$$(x-1)(9x+2) = 0$$

$$x = 1 \text{ หรือ } -\frac{2}{9}$$

ตรวจสอบ

แทนค่า 1 สำหรับ x

$$\sqrt{1+3} \stackrel{?}{=} 3-1$$

$$2 = 2$$

แทนค่า $-\frac{2}{9}$ สำหรับ x

$$\sqrt{-\frac{2}{9}+3} \stackrel{?}{=} 3(-\frac{2}{9})-1$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} \stackrel{?}{=} -\frac{2}{3}-1$$

$$\frac{5}{3} \neq -\frac{5}{3}$$

ค่า $x = -\frac{2}{9}$ ทิ้งไป

$$\therefore \underline{x = 1}$$

ตัวอย่าง 2.

$$\text{แก้สมการ } \sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$$

$$\sqrt{2x+5} = 2 - \sqrt{x-1}$$

$$\text{sq. ทั้งสองข้าง } 2x+5 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1$$

$$x+2 = -4\sqrt{x-1}$$

$$\text{sq. ทั้งสองข้าง } x^2+4x+4 = 16x-16$$

$$x^2-12x+20 = 0$$

$$(x-2)(x-10) = 0$$

$$x = 2 \text{ หรือ } 10$$

ตรวจสอบ

แทนค่า 2 สำหรับ x

$$\sqrt{2 \times 2 + 5} + \sqrt{2 - 1} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{1} \stackrel{?}{=} 2$$

$$3+1 \neq 2$$

ตัวอย่าง แทนค่า 10 สำหรับ x

$$\sqrt{2 \times 10 + 5} + \sqrt{10 - 1} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 2$$

$$5 + 3 \neq 2$$

ดังนั้น สมการนี้ ไม่มี roots เลย (ข้อ 1
แบบฝึกหัดที่ 19 พ.)

แบบฝึกหัดที่ ๑๘ พ.

1. ในข้อ พ 6. 7 ตัวอย่างที่ 1, $-\frac{2}{9}$ เป็น roots

ของ $-\sqrt{x+3} = 3x-1$ และในตัวอย่างที่ 2

10 และ 2 เป็น roots ของ $\sqrt{2x+5}$

$-\sqrt{x-1} = 2$ อธิบายว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

จงหาวิธีทั่วไปสำหรับตรวจสอบคำตอบ ใน โจทย์

เช่นนั้น

ส่วน ก.

แก้โดยสูตร :

$$2. \quad 7x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$3. \quad 3 - 3x = -2x^2$$

$$4. \quad 4x^2 + 3x = 15 - 4x$$

$$5. \quad 6x^2 + 8x = 5$$

$$6. \quad 5x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$7. \quad 2x^2 - dx + 3 = 0$$

จงหา roots ของสมการ :

$$8. \quad \frac{x}{12} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{2x} - \frac{3x}{4}$$

$$9. \quad \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

$$10. \quad \sqrt{3x-5} = x-1$$

$$11. \quad \sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} = 3$$

$$12. \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{2x-3} = 2$$

ส่วน ข.

แก้โดยสูตร

$$13. \quad x^2 = 5x + 14$$

$$14. \quad 5x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$15. \quad 9x^2 - 5x = 4$$

$$16. \quad 3x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$17. \quad x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$18. \quad x^2 + bx = x - 1$$

หาค่า roots :

$$19. \quad \frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = \frac{5}{6}$$

$$20. \quad \frac{2x+5}{x+1} - \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x^2+4x+3}$$

$$21. \quad \sqrt{2x+1} = 3x+1$$

$$22. \quad \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 4$$

$$23. \quad \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x-1}$$

พ 6. 8 กราฟของฟังก์ชันควอดเรติก

กราฟของฟังก์ชันควอดเรติกในรูป ax^2+bx+a จะมรูปร่าง

ก. เมื่อ $a > 0$ มีรูปร่างที่ 6

ข. เมื่อ $a < 0$, , , 7

เส้นโค้งของฟังก์ชันควอดเรติก เรียกว่า เส้น

โค้งพาราโบลา parabola

สมบัติของพาราโบลา คือ

(1) มีจุดต่ำสุดในกรณี ก. คือ $a > 0$ หรือ จุดสูงสุดในกรณี ข. คือ $a < 0$ จุดนี้เรียกว่า จุดยอด vertex ของพาราโบลา

(2) พาราโบลาเป็น symmetric โดยเส้นตรงลากผ่านจุดยอดขนานกับแกน y นั่นคือส่วนของส่วนโค้ง curve ด้านซ้ายของเส้นตรงนี้ เป็นส่วนสะท้อนของส่วนทางขวา

ในเรขาคณิตวิเคราะห์ที่หาพิกัดได้แล้ว abscissa
ของจุดยอดของพาราโบลา $= -\frac{b}{2a}$ (ข้อ 2 แบบ
ฝึกหัดที่ 21)

สมมติดังกล่าวนั้น เป็นแนวทางให้พบ
วิธีเขียนกราฟของฟังก์ชันควอดเรติก ดังนี้ :

1. เข้าสมการ $ax^2+bx+c=y$
2. หาค่าของแอชชีสว่าของจุดยอด คือ $-\frac{b}{2a}$

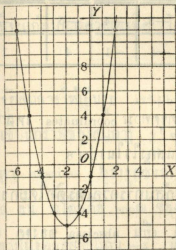
แล้วเข้าคู่กับออร์ดิเนตที่คล้ายกัน

3. เลือกค่าของ x ที่มากกว่า และน้อยกว่า
 $-\frac{b}{2a}$ โดยกระจำนวนพอสมควร แล้วเข้าคู่กับค่าของ y
ที่คล้ายกัน

4. กำหนดจุดตาม coordinates ที่ได้จาก
ข้อ 3

5. ลากเส้นโดยเครื่องลากเส้นโค้ง โดยคำนึง
อยู่เสมอว่า เส้นโค้งนี้มี symmetry

ตัวอย่าง เขียนกราฟของฟังก์ชัน x^2+4x-1



ให้ $y = x^2 + 4x - 1$

abscissa ของจุดยอด $= -\frac{4}{2}$ หรือ $= -2$

เลือกค่าของ x ที่มากกว่า -2 ถึง 4 ค่า

และค่าของ x ที่น้อยกว่า -2 ถึง 4 ค่า

เข้าคู่กับค่าของ y ที่เป็นคู่กัน

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-4	-1	4	11
x	-3	-4	-5	-6	
y	-4	-1	4	11	

กำหนดจุดตาม coordinates เหล่านี้แล้ว ลาก
เส้นโค้ง ดังแสดงไว้ในรูปที่ 8

พ 6. 9 แก่สมการควอดเรติกโดยกราฟ

ถ้า x เป็น abscissa ของจุด A ซึ่งกราฟ
แห่งสมการ $y = ax^2 + bx + c$ ตัดแกน $-x$ (ดูรูปที่ 6)
coordinates ของจุด A จะเป็นดังนี้

$$x = x_1 \text{ และ } y = 0 \text{ ดังนั้น}$$

$$0 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

x_1 จึงเป็น root หนึ่งของสมการควอดเรติก

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ในทำนองเดียวกัน x_2 ซึ่งเป็น abscissa ของ
จุด B เป็น root อีกอันหนึ่งของสมการ

ดังนั้นจะแก้สมการควอดเรติก โดยกราฟ ทำ
ดังนี้

1. จัดสมการให้เป็นรูป $ax^2+bx+c = 0$

2. เขียนกราฟของสมการ $y = ax^2+bx+c$

3. หา abscissa ของจุดซึ่งกราฟตัดแกน $-x$
abscissa 2 อัน ที่ได้นี้คือ roots ของสมการ

ถ้ากราฟมีจุดยอดบนแกน $-x$ นั่นคือกราฟตัด
แกน $-x$ ที่จุด ๆ หนึ่ง สมการนั้นมี roots 2 อันที่
เท่ากัน

ถ้ากราฟไม่ตัดแกน $-x$ เลย สมการนั้นไม่มี
root แท้ (real roots) และเราอาจสรุปได้ว่า roots
ของสมการนั้นเป็น imaginary

พ 6. 10 ธรรมชาติของ roots ของสมการควอดเรติก

ถ้าให้ r_1 และ r_2 เป็น roots ของสมการ

$$ax^2+bx+c = 0$$

จากสูตรในข้อ 6.5

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{และ } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ มัชอเรียกว่า discriminant ของสมการควอดเรติก ค่าของ discriminant นี้ แสดงธรรมชาติของ roots ทั้งการวางข้างล่าง :

ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนแท้, roots r_1 และ r_2 ของสมการ $ax^2+bx+c = 0$ เป็น

แท้และไม่เท่ากัน	เมื่อ $b^2 - 4ac > 0$
แท้และเท่ากัน	เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$
imaginary	เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

ถ้า a , b , และ c เป็นจำนวน, rational roots r_1 และ r_2 ของสมการ $ax^2+bx+c = 0$ เป็น

rational รากค่าลงตัว	เมื่อ b^2-4ac เท่ากับกำลังสอง ของจำนวน rational
irrational รากค่าไม่ลงตัว	เมื่อ b^2-4ac ไม่เท่ากับกำลัง- สองของจำนวน rational

ตัวอย่าง 1. บอกธรรมชาติของ roots ของสมการ

$$4x^2-8x+3 = 0$$

ในที่นี้ $a = 4$, $b = -8$, $c = 3$

$$b^2-4ac = 64-48 = 16$$

ดังนั้นโดยที่ discriminant เป็นกำลังสองของ

จำนวน rational และมากกว่า 0 ทั่ว roots จึง
เป็น rational และไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 2. ึงหาค่าของ k ซึ่งทำให้สมการ

$$9x^2 - 4x + 2 + k(4x - 1) = 0 \quad \text{มี roots เท่ากัน}$$

เขียนให้เข้ารูปมาตรฐาน เราได้

$$9x^2 + 4(k-1)x + (2-k) = 0$$

$$\text{ในที่นี้ } a = 9, \quad b = 4(k-1) \quad \text{และ}$$

$$c = 2-k; \quad b^2 - 4ac = 16(k-1)^2 - 36(2-k)$$

$$= 16k^2 + 4k - 56 \quad \text{และโดยที่ roots เท่ากัน}$$

discriminant ต้องเท่ากับศูนย์

$$\therefore 16k^2 + 4k - 56 = 0$$

$$4k^2 + k - 14 = 0$$

$$(4k-7)(k+2) = 0$$

$$k = \frac{7}{4} \quad \text{หรือ} \quad -2$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๐ พ.

1. เทหวัตถุหนึ่งถูกโยนขึ้นตรง ๆ ด้วยอัตราเร็ว 60 ฟุตต่อวินาทีในทางพลศาสตร์ ถ้า s เป็น

ระยะเป็นฟุต, t เป็นเวลาเป็นวินาที เมื่อเทห-
 วัตถุนเคลื่อนที่ไปเป็นเวลา t วินาที ระยะทาง
 ที่เคลื่อนจะไต่คอง $s = 60t - 16t^2$
 จงเขียนกราฟของสมการนี้ โดยให้ t เป็น

abscissa

จากกราฟนี้ หว่า

- (1) เทหวัตถุขึ้นไปถึงสูงสุดเท่าใด
- (2) นานเท่าใดจากเวลาโยน เทหวัตถุ
 จะถึงจุดสูงสุด
- (3) เมื่อใดมันจะกลับมาถึงจุดที่เริ่ม
 เคลื่อนที่ออก
- (4) ภายหลังเวลา $1\frac{1}{2}$ วินาที มันจะอยู่
 สูงเท่าใด วัดจากจุดเริ่มต้น
- (5) ถ้าจุดตั้งต้นอยู่สูงจากพื้นดิน 54 ฟุต
 นานเท่าใดมันจะตกถึงพื้นดิน

2. โดยทำให้เป็นกำลังสอง กังซ้อ พ 6. 5,

สมการ $y = ax^2 + bx + c$ อาจเขียนในรูป

$$y = \frac{1}{4a} (2ax + b)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ใช้สมการนี้ แสดงว่า

(ก) ถ้า $a > 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ จะเป็น

จุดต่ำสุดของพาราโบลา

(ข) ถ้า $a < 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ จะเป็น

จุดสูงสุดของพาราโบลา

3. จงหาโดยไม่ต้องแก้สมการว่า roots แท้หรือ
imaginary, เท่าหรือไม่เท่า, วิกค่าใดลงตัว
หรือไม่

(ก) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

(ข) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(ค) $3x^2 + 2x + 2 = 0$

(ง) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$(๑) \quad x^2 - x - 12 = 0$$

$$(๒) \quad 5x^2 - 4x + 3 = 0$$

4. อะไรที่เรากล่าวได้เกี่ยวกับกราฟของสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เกี่ยวกับตำแหน่งอันสัมพันธ์กับแกน $-x$ เมื่อ

$$(ก) \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$(ข) \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$(ค) \quad b^2 - 4ac < 0$$

5. โดยไม่ต้องเขียนกราฟ จงหาจำนวนจุดที่กราฟตัดแกน $-x$

$$(ก) \quad y = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(ข) \quad y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$(ค) \quad y = 3x^2 + 2x + 2$$

$$(ง) \quad y = 9x^2 - 12x + 4$$

$$(จ) \quad y = x^2 - x - 12$$

$$(ฉ) \quad y = 5x^2 - 4x + 3$$

6. หา roots เพื่อให้ใกล้เคียงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

โดยกราฟ :

$$ก. \quad 3x^2 = x+10$$

$$ข. \quad 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$ค. \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$ง. \quad x^2 + 3x = -5x - 7$$

$$จ. \quad 9x^2 + 6x = -1$$

$$ฉ. \quad 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

7. หาค่าของ k เมื่อสมการมี Δ roots เท่ากัน

$$ก. \quad x^2 + kx = 5x - 4$$

$$ข. \quad 3x^2 - 7x + 5 + k(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$ค. \quad 6x^2 + 3x - 2 + 3k(x^2 + x + 1) = 0$$

$$ง. \quad kx^2 - 4x + 9 = 2kx$$

$$จ. \quad 2x^2 + 4x + k(x^2 + 1) - 1 = 0$$

$$ฉ. \quad x^2 - 6x + 1 + 2k(x^2 - 3x + 3) = 0$$

พ 6. 11 สมการควอดเรติกหลายชั้น ต่อไป

นักเรียนจะได้เรียนสมการ 2 ชั้น ที่มี 2 unknowns

และอย่างน้อยสมการหนึ่ง มีกรณฑ์ 2

กรณี 1 เมื่อสมการหนึ่ง อยู่ในรูป

$$ax^2 + by^2 = c$$

แก้โดยกำจัด unknown ตัวใดตัวหนึ่งโดยการ

บวกลบ หรือแทนค่า

ตัวอย่าง แก้สมการ $x^2 - 2y^2 = 2$ (1)

$$3x^2 + y^2 = 13 \quad (2)$$

$$(2) \times 2 \quad 6x^2 + 2y^2 = 26 \quad (3)$$

$$(1) + (3) \quad 7x^2 = 28$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

แทนค่า ± 2 สำหรับ x ใน (2)

$$12 + y^2 = 13 \quad (2)$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

ดังนั้น solutions คือ

$x =$	2	2	-2	-2
$y =$	1	-1	1	-1

โดยที่เช่นนี้อาจแก้โดยแทนค่า y^2 หรือ x^2

กรณีที่ 2 เมื่อสมการหนึ่งมีตัวที่ 2 ส่วนอีก
สมการหนึ่งมีตัวที่ 1

แก้โดยหาค่าของ unknown ตัวหนึ่งในเทอม
ของอีกตัวหนึ่งในสมการตัวที่ 1 แล้วนำไปแทนค่า

ในสมการตัวที่ 2 แก่ค่าของ unknown ตัวหนึ่ง
ได้แล้ว จะหาค่าของ unknown อีกตัวหนึ่ง ให้เอา
ค่าของ unknown ที่หาได้ แทนในสมการตัวที่ 1

ตัวอย่าง $2x^2 - xy + y^2 = 4$ (1)

$2x + y = 1$ (2)

$$\text{จาก (2)} \quad y = 1 - 2x \quad (3)$$

แทนค่า y ใน (1)

$$2x^2 - x(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 4 \quad (4)$$

$$2x^2 - x + 2x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 4 \quad (5)$$

$$8x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(8x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ หรือ } -\frac{3}{8}$$

แทนค่า x ใน (3), $y = 1 - 2$ หรือ $1 + \frac{3}{4}$

$$\text{หรือ } y = -1 \text{ หรือ } \frac{7}{4}$$

ดังนั้น solutions คือ

$x =$	1	$-\frac{3}{8}$
$y =$	-1	$\frac{7}{4}$

กรณี 3 วิธีอื่น ๆ ที่ทำให้สะดวกขึ้น ก็คล้าย

ตัวอย่าง 1. $x^2 + y^2 = 25 \quad (1)$

$$xy = 12 \quad (2)$$

$$(2) \times 2 \qquad 2xy = 24 \quad (3)$$

$$(1) + (3) \qquad x^2 + 2xy + y^2 = 49 \quad (4)$$

ฉก sq.rt. $x + y = \sqrt{49} \quad (5)$

$$(1) - (3) \qquad x^2 - 2xy + y^2 = 1 \quad (6)$$

ฉก sq.rt. $x - y = \sqrt{1} \quad (7)$

จาก (5) และ (7) เราทำได้

$$\begin{cases} x+y = 7 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 7 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = -7 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = -7 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

ซึ่งแก้ค่าได้ ดังนี้

$x =$	4	3	-3	-4
$y =$	3	4	-4	-3

$$2. \qquad x^2 + y^2 = 9 \quad (1)$$

$$x+y = 3 \quad (2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad (x+y)(x^2-xy+y^2) = 9 \quad (3)$$

$$(3) \div (2) \quad x^2-xy+y^2 = 3 \quad (4)$$

จาก (4) และ (2) แก้ค่าของ x และ y

ได้โดยวิธีในกรณี 2

แบบฝึกหัดที่ ๒๑ พ.

1. ถ้ากราฟของสมการ $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ ซึ่งเป็นเส้นตรงกับ $y = -a_2x^2+b_2x+c_2$ ซึ่งเป็นพาราโบลา (ก) ตัดกันที่จุด 2 จุด (ข) ตัดกันที่จุดเดียว (ค) ไม่ตัดกันเลย

ในกรณี (ก) และ (ข) จงแสดงว่า coordinates ของจุดที่ตัดกันทุก ๆ จุดให้โซลชันของสมการทั้งสอง

- (๕) ในกรณี (ค) เราจะได้ว่าอะไรก็ได้ข้าง
 (๕) เกี่ยวกับธรรมชาติของโซลูชัน

แก้สมการ :

$$2. \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$3. \quad x^2 + y = 7$$

$$3x^2 + y^2 = 21$$

$$4. \quad 3x^2 - y^2 = -6$$

$$2x^2 + y^2 = 11$$

$$5. \quad y^2 = 4x$$

$$x^2 - y^2 = -3$$

$$6. \quad x^2 - y^2 = 19$$

$$x - y = 1$$

$$7. \quad x^3 + 8y^3 = 7$$

$$x + 2y = 1$$

$$8. \quad 4x^2 + 5y^2 = 9$$

$$x - 3y + 2 = 0$$

$$9. \quad xy = 5$$

$$y = 2x+3$$

$$10. \quad x^2+3xy+y^2 = -1$$

$$11. \quad x-y = 3$$

$$12. \quad xy = -2$$

$$13. \quad 9y^2+4x^2 = 25$$

แก้สมการโดยกราฟ :

$$14. \quad 4y = x^2$$

$$x+y = 3$$

$$15. \quad y = x^2-3x+2$$

$$y = x-2$$

$$16. \quad y = 3x^2$$

$$x-2y+7 = 0$$

$$17. \quad y = 2x^2-7x+7$$

$$x-y = 1$$

แบบฝึกหัดที่ ๒๒ พ.

ระคน

แก้สมการโดยวิธีรศกมทศก

$$1. \quad 5x^2 - 2 = 0$$

$$2. \quad 4x^2 = 9x$$

$$3. \quad 7x^2 = 2x + 2$$

$$4. \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$5. \quad 3x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$6. \quad 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

แก้ค่าของ x :

$$7. \quad \frac{1}{2x-3} + \frac{3}{x} = \frac{x^2-9}{2x^2-3x}$$

$$8. \quad \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+1} = \frac{3x^2-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$9. \quad \frac{2}{3x} + \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{3}$$

$$10. \quad \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{8x}{x^2-4}$$

$$11. \sqrt{3x+2} = 6x-2$$

$$12. \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$$

$$13. \sqrt{2x+3} + \sqrt{4x+2} = 4$$

$$14. \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = 4$$

แก้โดยใช้ unknown เกียว

15. จงหาเลข 2 จำนวนเรียงกัน ซึ่งคูณกันได้ 132

16. จากแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ตัดสี่เหลี่ยม
จัตุรัสโตเท่า ๆ กันออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับ
กระดาษนั้นเป็นรูปทึบ ปรากฏว่าได้ทึบสูง 2 นิ้ว
และมีปริมาตร 72 ลูกบาศก์นิ้ว แผ่นกระดาษ
เกมมิกานยาวกว้างละเท่าใด

17. รถไฟ ก. วิ่งเร็วกว่ารถไฟ ข. ชั่วโมงละ 5 ไมล์
และในระยะทาง 300 ไมล์ จะถึงก่อนรถ ข.
2 ชั่วโมง จงหาความเร็วของรถไฟทั้งสอง

แก้โดยใช้ 2 unknowns

18. ความยาวลอมรอบของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งเท่า
กับ 23 ฟุต และพื้นที่ของมัน 48 ตร. ฟุต จง
หาค่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้า
19. แม่ครัวจ่ายเงินจำนวนหนึ่งในการซื้อไข่ ถ้าซื้อ
เพิ่มอีก 2 โหล จะต้องจ่ายเงินทั้งหมด 1.75 บาท
แต่ถ้าซื้อแพงไปโหลละ 5 สตางค์ และช้อนน้อย
กว่าที่ซื้อจริง 1 โหล จะต้องจ่ายเงิน 1.20 บาท
เขาซื้อไข่มากี่โหล และราคาโหลละเท่าใด
20. ความยาวลอมรอบของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 23
และพื้นที่ 23 จงหาค่าของมัน
21. กลาสักคนหนึ่งกรรเชิงเรือตามนาฬิกาไปไกล 10.5
ไมล์ แล้วกลับถึงที่ต้นใช้เวลา 5 ชั่วโมง
ถ้าความเร็วของกระแสน้ำเท่ากับ 2 ไมล์ ต่อ
ชั่วโมง หาค่าความเร็วของเรือในน้ำนิ่ง
22. เศษส่วนจำนวนหนึ่ง มีเศษมากกว่าส่วนอยู่ 1
ถ้าเอา 7 ขวักกับเศษ และเอา 2 ขวักกับส่วน

ผลบวกของเศษส่วนเดิม กับเศษส่วนใหม่ จะ

เท่ากับ 4 จงหาเศษส่วนเดิม

23. เลข 2 หลักจำนวนหนึ่งมากกว่า 6 เท่าของ
ผลบวกของเลขในหลักอยู่ 2 ผลบวกของกำลัง
สองของเลขในหลัก มากกว่าผลคูณของเลข
ในหลักอยู่ 7 จงหาเลขจำนวนนี้

24. ถ้าเขาค้นเงินจำนวนหนึ่งให้กับธนาคารออมสิน
เป็นเวลา 4 ปี จะได้เงินรวม 744 บาท ถ้า
เพิ่มอัตราดอกเบี้ยอีก 2% แต่ลดเงินต้นลง
200 บาท เงินรวมเวลา 4 ปี จะเป็นเงิน 528
บาท จงหาเงินต้นและอัตราดอกเบี้ยครั้งแรก

25. แปลงปลอกคอกไม้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว 4 เมตร
กว้าง 3 เมตร ล้อมรอบด้วยสนามหญ้าตาม
ความกว้างสามเหลี่ยม ถ้าพื้นที่ของสนามหญ้า
ที่ล้อมรอบเท่ากับแปลงนั้น จงหาความกว้าง
ของสนามหญ้า

แบบฝึกหัดเพิ่มเติมที่ ๔

1. 1. 1. หาผลบวกของ roots r_1 และ r_2 ของสมการ $ax^2+bx+c=0$ และบอกผลลัพธ์เป็นภาษาคำพูด และหาผลคูณของ r_1 และ r_2 ทั้งบอกผลลัพธ์เป็นภาษาคำพูด

2. ใช้ผลที่ได้จากข้อ 1. หาโดยไม่ต้องหาคำพูด
ผลบวกและผลคูณของ roots ของสมการต่อไปนี้

ก. $x^2+3x-5=0$

ข. $x^2-5x+7=0$

ค. $x^2-x-4=0$

ง. $2x^2+5x-6=0$

จ. $3x^2-2x-3=0$

ฉ. $9x^2+4=0$

ช. $7x^2-3=0$

ซ. $4x^2+7x=0$

$$\text{ณ. } -x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$\text{ณ. } -3x^2 + x - 2 = 0$$

แก้สมการ โดยการใช้วิธีเหมือนกับการควมเทรติค
ก็ได้ :

$$3. \quad 9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$$

$$(\text{หลัก : ให้ } y = x^2)$$

$$4. \quad (4x-1)^4 - 26(4x-1)^3 - 27 = 0$$

$$(\text{หลัก : ให้ } y = (4x-1)^3)$$

$$5. \quad (3x-5) + 2\sqrt{3x-5} = 8$$

$$6. \quad \frac{x-3}{2} + \frac{2}{x-3} = \frac{17}{4}$$

$$7. \quad x^{-3} - 9x^{-\frac{5}{2}} + 8 = 0$$

$$8. \quad \left(5 - \frac{2}{x}\right) - \sqrt{\frac{5x-2}{x}} = 6$$

$$9. \quad (x^2 - 6x - 2) - 6\sqrt{x^2 - 6x - 2} + 5 = 0$$

$$(\text{หลัก : ให้ } y = \sqrt{x^2 - 6x - 2})$$

$$10. \quad x^2 - 2x - 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 0$$

11. ภาชนะใบหนึ่งบรรจุแอลกอฮอล์บริสุทธิ์อยู่เต็ม ถ้าตวงเขาออก 5 ลิตร แล้วเติมน้ำแทน ถ้าภายหลังตวงออกอีก 5 ลิตร จะมีแอลกอฮอล์อยู่ 16 ลิตร ภาชนะนั้นจุลิตร

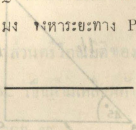
12. ชายคนหนึ่งจะต้องเดินทางในระยะเวลาอันหนึ่ง ภายหลังที่เดินไป 16 ก.ม. เขาเพิ่มความเร็วอีก 1 ก.ม. ต่อชั่วโมง ถ้าเขาเดินตั้งแต่ต้น ด้วยความเร็วหลังนั้นเขาจะถึงจุดหมายเร็วขึ้น 48 นาที อนึ่งถ้าเขาเดินด้วยความเร็วอย่างตอนต้น เขาจะถึงช้าไป 9 นาที กว่าเวลาที่เขาได้ใช้จริง ๆ จงหาระยะเวลาที่เขาเดินและความเร็วตอนต้น

13. รถบรรทุกคันหนึ่งวิ่งจากตำบล ก. ไปยัง ข. และรถบรรทุกอีกคันหนึ่งวิ่งจาก ข. ไปยัง ก. โดยทั้งคันออกวิ่งพร้อมกัน และต่างวิ่งด้วยความ

เร็วสม่ำเสมอ รดคันแรกถึง B $3\frac{3}{4}$ ชม. และ
 รดคันหลังถึง A $2\frac{2}{5}$ ชม. หลังจากเวลาที่พบกัน
 รดแต่ละคันใช้เวลาวิ่งตลอดระยะทางเท่าใด

14. ก. และ ข. วิ่งตามลู่หนึ่ง ทั้งต้นจากจุด
 เดียวกันแต่สวนทางกัน ก. ถึงจุดตั้งต้นใน $1\frac{1}{4}$
 นาที และ B ใน 27 วินาที ภายหลังจากที่พบ
 กัน ถ้าเขายังวิ่งต่อไปอีกด้วยความเร็วเดิม อีก
 กี่นาทีจึงจะพบกัน

15. A ออกเดินทางจาก P ไป Q พร้อมกับ B
 ซึ่งออกเดินทางจาก Q ไป P เมื่อเขาทั้งสอง
 พบกัน B เดินทางได้ไกลกว่า A 48 กม.
 A ถึง Q ใน 56 ชั่วโมง และ B ถึง P ใน
 42 ชั่วโมง จงหาระยะทาง PQ



ภาคตรีโกณมิติ

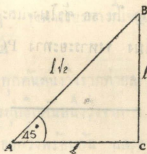
บทที่ ๓ ต.

ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมบางมุม

ต 3. 1 โดยที่ค่าอัตราส่วนของมุมบางมุม เป็นค่าที่มีตัวเลขสั้นๆ ง่าย ๆ เราจะเลือกเอามาหาค่าสำหรับท่องจำ และใช้ค่านั้น ๆ ได้โดยไม่ต้องสร้างรูปหาหรือเขียนตาราง ดังต่อไปนี้

ต 3. 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของ 45°

ให้ $\triangle BAC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B = A = 45^\circ$



ให้ด้านเท่า AC และ BC ยาวกันละ l

$$\therefore AB^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$AB = l\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{l}{l} = 1$$

อัตราส่วนทเป็นส่วนกลับของเหล่านี้นคือ

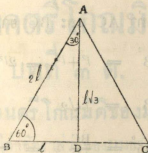
$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}, \sec 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\cot 45^\circ = 1$$

ต 3.3 อัตราส่วนตรีโกณมิติของ 60° และ 30°

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม

แต่ละมุมมุมฉากกับ 60°



ลาก AD แบ่งครึ่งมุม $\angle BAC$ พบ BC ที่ D
 ดังนั้น $\angle BAD = 30^\circ$

จากทฤษฎีบทเรขาคณิต สามเหลี่ยม ABD ,
 ACD ย่อมเท่ากันทุกประการ

ดังนั้น $BD = CD$

และมุม $\angle ADB = 90^\circ$

ใน $\triangle$ มุมฉาก ADB ให้ $BD = l$

ดังนั้น $AB = BC = 2l$

$\therefore AD^2 = 4l^2 - l^2 = 3l^2; AD = l\sqrt{3}$

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AE} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{l\sqrt{3}}{l} = \sqrt{3}$$

และ , $\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ต 3. 4 กำลังของอัตราส่วนตรีโกณมิติ เขียนดังนี้

$(\sin A)^2$ นิยมเขียน $\sin^2 A$ โดยอ่านว่า

sine กำลังสอง A

$(\tan A)^3$ นิยมเขียน $\tan^3 A$ โดยอ่านว่า

tan กำลังสาม A

ทั้งนั้นเมื่อเราเขียน $\sin^2 A$ เราหมายความว่า

$$\sin A \times \sin A$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cot^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ + 2\sin^4 60^\circ$

ค่าของมัน $= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{8} = 1\frac{3}{8}$$

แบบฝึกหัดที่ ๘ ท.

จงหาค่าของ

1. $2 \operatorname{cosec}^2 45^\circ - 3 \sec^2 60^\circ$

2. $\cot 60^\circ \tan 30^\circ + \sec^2 45^\circ$

3. $\cot 60^\circ \tan 30^\circ + \sec^2 45^\circ$

4. $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$

5. $\tan^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 30^\circ \tan^2 60^\circ$

6. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 45^\circ - 2 \cot^2 60^\circ$

7. $3 \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2} \sec^2 45^\circ - \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ$

$$8. \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \sec 60^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$$

$$9. \text{ ถ้า } \tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 15^\circ \tan 60^\circ$$

จงหา x

$$10. \text{ หา } x \text{ จากสมการ } x \sin 30^\circ \cos^2 15^\circ$$

$$= \frac{\cot 30^\circ \sec 60^\circ \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ}$$

๓ 3. 5 ในการพิจารณาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ
ของมุม $0^\circ, 90^\circ$ หรือ $\frac{\pi}{2}, 180^\circ$ หรือ $\pi, 270^\circ$
หรือ $\frac{3\pi}{2}, 360^\circ$ หรือ 2π หรือมุมใดๆ ที่เกิด

ขึ้นซึ่งจะได้กล่าวในบทหลัง เราอาจพิจารณาได้โดย
ง่าย โดยใช้เส้นกากะบาท แบ่งมุมวงกลม คือ 360°
เป็น 4 ส่วน เรียกว่า 4 quadrants และใช้สัญลักษณ์
นิยมแห่งเครื่องหมายบ่งค่าวงกลมของการวัด

ทั้งเช่นรูปต่อไปนี้ (ดูหน้า 113)

(1) ระยะวัดจาก O ไปทางขวาของ O บนเส้น OX หรือตามแนวขนานกับ OX เป็นขวก

(2) ระยะวัดจาก O ไปเหนือจาก O บนเส้น OY หรือตามแนวขนานกับ OY เป็นขวก

(3) ระยะวัดจาก O ไปทางซ้ายของ O บนเส้น OX' หรือแนวขนานกับ OX' เป็นลบ.

(4) ระยะวัดจาก O ไปใต้จาก O บนเส้น OY' หรือตามแนวขนานกับ OY' เป็นลบ.

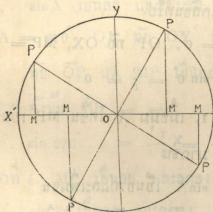
ทั้งตัวอย่าง (กรรปหน้า 113) OM และ MP ในเลี้ยวที่ 1 เป็นขวก

OM และ MP ในเลี้ยวที่ 3 เป็นลบ
เป็นต้น

ต่อไปเราจะพิจารณา อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมต่างๆ และความผันแปร ของขนาดของอัตราส่วนนั้นๆ จากมุม 0° ถึง 360°

ต 3. 6 ค่าของ $\sin$ ของ 0° , 90° , 180° , 270° , 360° , และการผันแปร

ให้ XX' และ YY' เป็นเส้นตรงสองเส้น
ตัดกันเป็นมุมฉาก



เอา O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี OP เขียน
วงกลม และให้มุม A (ซึ่งเป็นมุมที่พิจารณาจากมุม
 POM) เกิดขึ้นโดยการหมุนของตัวพาราคัม OP
ไปตลอด 4 เลี้ยว ทั้งกันจาก OX หมด

ลาก PM ตั้งฉากกับ OX และให้ $OP = r$

$$\sin A = \frac{MP}{r}$$

โดยที่ r ไม่เปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและเครื่องหมาย เราจึงศึกษาการเปลี่ยนแปลงของ MP ตลอดรอบที่ P เคลื่อนที่ไป

เมื่อ $A = 0^\circ$, OP ทับ OX, $MP = 0$

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$$

ในเสวที่ 1, เมื่อมุม A โตขึ้น MP เป็นบวกและมากขึ้น

$\therefore \sin A$ เป็นบวกและเพิ่มขึ้น

เมื่อ $A = 90^\circ$ OP ทับ OY นั่นคือ MP ทับ OP

$$\text{ดังนั้น } MP = OP = r$$

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$$

ในเสวที่ 2 เมื่อมุม A โตขึ้น MP เป็นบวก

และลดลง

$\therefore \sin A$ เป็นบวกและลดลง

เมื่อ $A = 180^\circ$, OP ทับ OX' , $MP = 0$

$$\therefore \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0$$

ในเสี้ยวที่ 3, MP เป็นลบ และเพิ่มขึ้น

$\therefore \sin A$ เป็นลบ และเพิ่มขึ้น

เมื่อ $A = 270^\circ$, OP ทับ OY' นั่นคือ MP

ทาบ OP แต่ MP เป็นลบ

ดังนั้น $MP = -r$

$$\therefore \sin 270^\circ = -\frac{r}{r} = -1$$

ในเสี้ยวที่ 4, MP เป็นลบ และลดลง

$\therefore \sin A$ เป็นลบ และลดลง

เมื่อ $A = 360^\circ$ เหมือนกับ $A = 0^\circ$, $MP = 0$

$$\therefore \sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

จากผลลัพท์ข้างต้น เราอาจเขียนเป็นโคไซน์แกรม

สั้น ๆ สำหรับยกทำ ดังนี้

$\sin 90^\circ = 1$	
$\sin A$ เป็นบวก และลดลง	$\sin A$ เป็นบวก และเพิ่มขึ้น
$\sin 180^\circ = 0$	$\sin 0^\circ = 0$
$\sin A$ เป็นลบ และเพิ่มขึ้น	$\sin A$ เป็นลบ และลดลง
$\sin 270^\circ = -1$	

ต 3. 7 ค่าและการแปรผันของ cosine ทั้งไว้ให้นักเรียนลองพิจารณาเอง และถ้าเขียนเป็นโคออร์ดิเนตจะไดดังนี้

$\cos 90^\circ = 0$	
$\cos A$ เป็นลบ และเพิ่มขึ้น	$\cos A$ เป็นบวก และลดลง
$\cos 180^\circ = -1$	$\cos 0^\circ = 1$
$\cos A$ เป็นลบ และลดลง	$\cos A$ เป็นบวก และเพิ่มขึ้น
$\cos 270^\circ = 0$	

ต 3. 8 ค่าของ tangent ของ 0° , 90° , 180° , 270° 360° และการผันแปร

ในรูปของข้อ 3.5, $\tan A = \frac{MP}{OM}$ และค่า
ของมันจะเปลี่ยนแปลงไปโดยอาศัย MP และ OM
เมื่อ $A = 0^\circ$, $MP = 0$, $OM = r$

$$\therefore \tan 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$$

ในเส้นที่ 1 MP เพิ่มขึ้น และเพิ่มขึ้น

OM เพิ่มขึ้น และลดลง

$\therefore \tan A$ เพิ่มขึ้น และเพิ่มขึ้น

เมื่อ $A = 90^\circ$, $MP = r$, $OM = 0$

$$\therefore \tan 90^\circ = \frac{r}{0} = \infty$$

ในเส้นที่ 2 MP เพิ่มขึ้น และลดลง

OM เป็นลบ และเพิ่มขึ้น

$\therefore \tan A$ เป็นลบ และลบลึง

เมื่อ $A = 180^\circ$, $MP = 0$, $OM = r$

$$\therefore \tan 180^\circ = \frac{0}{r} = 0$$

ในเสี้ยวที่ 3 MP เป็นลบ และเพิ่มขึ้น

OM เป็นลบ และลบลึง

เมื่อ $A = 270^\circ$, $MP = -r$, $OM = 0$

$$\therefore \tan 270^\circ = \frac{-r}{0} = \infty$$

ในเสี้ยวที่ 4 MP เป็นลบ และลบลึง

OM เป็นบวก และเพิ่มขึ้น

$\therefore \tan A$ เป็นลบ และลบลึง

เมื่อ $A = 360^\circ$, เหมือนกับ $A = 0^\circ$

$$\therefore \tan 360^\circ = \tan 0^\circ = 0$$

เราเขียนไดอะแกรมสำหรับค่าใดก็ตาม

$\tan 90^\circ = \infty$		$\tan 90^\circ = \infty$
$\tan A$ เป็นลบ		$\tan A$ เป็นบวก
และลดลง		และเพิ่มขึ้น
$\tan 180^\circ = 0$		$\tan 0^\circ = 0$
$\tan A$ เป็นบวก		$\tan A$ เป็นลบ
และเพิ่มขึ้น		และลดลง
$\tan 270^\circ = \infty$		$\tan 270^\circ = \infty$

แบบฝึกหัดที่ ๙ ต.

จงไล่เรียงการเปลี่ยนแปลงในเครื่องหมายและ

ขนาดของ :

1. $\cos A$, ระหว่าง 0° ถึง 360°
2. $\operatorname{cosec} \theta$, ระหว่าง 0 ถึง π
3. $\cos \theta$, ระหว่าง π ถึง 2π

4. $\tan A$, ระหว่าง -90° ถึง -270°

5. $\sec \theta$, ระหว่าง $\frac{\pi}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2}$

หาค่าของ :

6. $\cos 0^{\circ} \sin^2 270^{\circ} - 2 \cos 180^{\circ} \tan 45^{\circ}$

7. $3 \sin 0^{\circ} \sec 180^{\circ} + 2 \operatorname{cosec} 90^{\circ} - \cos 360^{\circ}$

8. $2 \sec^2 \pi \cos 0 + 3 \sin \frac{3\pi}{2} - \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$

9. $\tan \pi \cos \frac{3\pi}{2} + \sec 2\pi - \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}$

บทที่ ๔ ต.

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ต 4. 1 จาก 2.1 เราได้เห็นความสัมพันธ์มาแล้วว่า

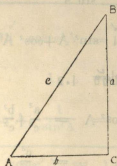
$$I \text{ ก. } \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \quad \underline{\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1}$$

$$I \text{ ข. } \sec A = \frac{1}{\cos A}; \quad \underline{\cos A \cdot \sec A = 1}$$

$$I \text{ ค. } \cot A = \frac{1}{\tan A}; \quad \underline{\tan A \cdot \cot A = 1}$$

4. 2 $\tan A$ และ $\cot A$ ในเทอมของ $\sin A$

และ $\cos A$



$$\begin{aligned}\text{จากรูป } \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} \\ &= \sin A \div \cos A\end{aligned}$$

$$\text{II ก. } \boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$\cot A = -\frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$\text{II ข. } \boxed{\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$\text{จาก } \tan^2 A = \left(\frac{\sin A}{\cos A} \right)^2 = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$\cot^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$\text{ท 4.3 พิสูจน์ } \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\text{จากรูปข้อ 4.2}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \cos^2 A &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2} = 1\end{aligned}$$

III ก.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

และจากนั้น

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A; \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A; \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

ต 4. 4 พิสูจน์ $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$1 = \sin^2 A + \cos^2 A$$

หารตลอดโดย $\cos^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$

III ข. ∴

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

ต 4. 5 พิสูจน์ $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$$1 = \sin^2 A + \cos^2 A$$

หารตลอดโดย $\sin^2 A$; $\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

III ค. ∴

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

๓ ๔. ๖ การพิสูจน์ไอดี (identity)

ไอดี คือ สมการชนิดหนึ่งแต่เป็นสมการพิเศษ ตรงที่กระบวนเทอมที่อยู่ข้างซ้ายและข้างขวาเท่ากันเสมอไม่ว่าตัว unknown จะผันแปรไปอย่างไร หลักการพิสูจน์ไอดี เรายกข้างใดข้างหนึ่ง เช่นข้างซ้ายมาพิสูจน์ให้เท่ากับข้างขวามือ หรือกลับกันแล้วแต่สะดวก หรือถ้าเป็นการยากที่จะทำเช่นนั้น อาจยกมาทีละข้าง แล้วพิสูจน์ให้ตรงกันตรงกลาง ๆ

เพื่อเป็นการย่อชื่อ ใช้ตัวย่อแทนข้างที่ยกมา โดยไม่ต้องลอกไอดี เช่น L.S. หรือ L.H.S. แทนซ้ายมือ (Left Side, Left Hand Side), R.S. หรือ R.H.S. แทนขวามือ (Right Side หรือ Right Hand Side) การยกมาที่เกี่ยวข้องทั้งหมดไอดีแล้วแยกแยะแต่ละข้างไปพร้อม ๆ กัน เป็นการฝึกวิธี

ตัวอย่าง 1.

$$\text{พิสูจน์โดยเทคนิค : } \sin^2\theta \sec^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$\text{L.S.} = \sin^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \tan^2\theta$$

$$= \sec^2\theta - 1$$

ท.ท.พ.

$$2. \text{ พิสูจน์ } \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$$

$$\text{L.S.} = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{2}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A \cos^2 A} = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$$

ท.ท.พ.

$$3. \text{ พิสูจน์ } \sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A$$

$$= \tan A + \cot A$$

$$\text{L.S.} = \sin^2 A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} + \cos^2 A \cdot \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$+ 2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2\sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$\text{R.S.} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$\therefore \text{L.S.} = \text{R.S.}$$

ท.ท.พ.

$$4. \text{ พิสูจน์ } \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \beta - \cos \alpha} = \tan \alpha \cot \beta$$

$$\text{L.S.} = \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\frac{1}{\cot \beta} - \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\frac{\tan \alpha - \cot \beta}{\tan \alpha \cot \beta}}$$

$$= \frac{\tan \alpha - \cot \beta}{1} \times \frac{\tan \alpha \cot \beta}{\tan \alpha - \cot \beta}$$

$$= \tan \alpha \cot \beta$$

ท.ท.พ.

แบบฝึกหัดที่ ๑๐ ท.

พิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้ :

$$1. \sin A \sec A = \tan A$$

$$2. \cot A \sec A \sin A = 1$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 A (1 - \cos^2 A) = 1$$

$$4. (1 - \sin^2 A) \sec^2 A = 1$$

$$5. (1 - \cos^2 A) \cot^2 A = \cos^2 A$$

$$6. \tan a \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sin a$$

$$7. \cos a \operatorname{cosec} a \sqrt{\sec^2 a - 1} = 1$$

$$8. \cos a \sqrt{\cot^2 a + 1} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}$$

$$9. \sin^2 \theta \cot^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$10. \operatorname{cosec}^2 \theta \tan^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

$$11. \frac{\sin a \cot^2 a}{\cos a} = \frac{1}{\tan a}$$

$$12. 1 - \operatorname{vers} \theta = \sin \theta \cot \theta$$

13. $\text{vers}\theta \sec\theta = \sec\theta - 1$
14. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \csc\theta$
15. $\sqrt{1+\cot^2 A} \cdot \sqrt{\sec^2 A - 1} \cdot \sqrt{1-\sin^2 A} = 1$
16. $(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 2$
17. $(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan\theta)^2 = 2\sec^2\theta$
18. $(\cot\theta - 1)^2 + (\cot\theta + 1)^2 = 2\csc^2\theta$
19. $\cos^2 A (\sec^2 A - \tan^2 A) + \sin^2 A (\csc^2 A - \cot^2 A) = 1$
20. $\cot^2 a + \cot^4 a = \csc^4 a - \csc^2 a$
21. $\frac{1}{1-\sin a} + \frac{1}{1+\sin a} = 2\sec^2 a$
22. $\frac{1}{1+\sin^2 a} + \frac{1}{1+\csc^2 a} = 1$
23. $(\sec\theta + \csc\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = \sec\theta \csc\theta + 2$
24. $(\cos\theta - \sin\theta)(\csc\theta - \sec\theta) = \sec\theta \csc\theta - 2$
25. $(1+\cot A + \csc A)(1+\cot A - \csc A) = 2\cot A$
26. $(\sec\theta + \tan\theta - 1)(\sec\theta - \tan\theta + 1) = 2\tan\theta$

$$27. (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = \tan^2 A$$

$$+ \cot^2 A + 7$$

$$28. (\sec^2 A + \tan^2 A)(\operatorname{cosec}^2 A + \cot^2 A) = 1 + 2\sec^2 A$$

$$\operatorname{cosec}^2 A$$

$$29. (1 - \sin A + \cos A)^2 = 2(1 - \sin A)(1 + \cos A)$$

$$30. \cos \theta (\tan \theta + 2)(2 \tan \theta + 1) = 2 \sec \theta + 5 \sin \theta$$

$$31. (\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$32. \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta}{1 - \sin \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \cot \theta$$

$$33. \cot^2 \theta \cdot \frac{\sec \theta - 1}{1 + \sin \theta} + \sec^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} = 0$$

ในตัวอย่างต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันของ 2 มุม ซึ่ง

มุมทั้งสองไม่ได้หาค่าเดียวกันและกันเลย

$$34. \tan^2 \alpha + \sec^2 \beta = \sec^2 \alpha + \tan^2 \beta$$

$$35. \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

$$36. \frac{\tan a - \cot \beta}{\cot a - \tan \beta} = -\frac{\cot \beta}{\cot a}$$

$$37. \cot a \tan \beta (\tan a + \cot \beta) = \cot a + \tan \beta$$

$$38. \sin^2 a \cos^2 \beta - \cos^2 a \sin^2 \beta = \sin^2 a - \sin^2 \beta$$

$$39. \sec^2 a \tan^2 \beta - \tan^2 a \sec^2 \beta = \tan^2 \beta - \tan^2 a$$

$$40. (\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta)^2 + (\cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta)^2 = 1$$

๓ 4. 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมส่วนมุมฉาก

(complementary angles)

ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม B เป็นมุมฉาก มุม A และ C เป็นมุมส่วนมุมฉาก

$$\text{ดังนั้น } C = 90^\circ - A$$

$$\sin(90^\circ - A) = \sin C = \frac{AB}{AC} = \cos A$$

$$\text{และ } \cos(90^\circ - A) = \cos C = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

ทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} \tan(90^\circ - A) &= \cot A \\ \cot(90^\circ - A) &= \tan A \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{และ } \sec(90^\circ - A) &= \operatorname{cosec} A \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - A) &= \sec A \end{aligned} \right\}$$

สูตรเหล่านี้อาจะนิยมนำให้เห็นจริงตามข้อ 3.3 คือ

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

ตัวอย่าง 1.

จงหาค่าของมุม A เมื่อ $\cos 2A = \sin 3A$

$$\cos(2A) = \sin(90^\circ - 2A)$$

$$\therefore \sin(90^\circ - 2A) = \sin 3A$$

$$\therefore 90^\circ - 2A = 3A$$

$$A = 18^\circ$$

ตัวอย่าง ๒.

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \sec A \sec(90^\circ - A) = \tan A + \tan(90^\circ - A)$$

$$\text{R.S.} = \tan A + \cot A$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} = \sec A \operatorname{cosec} A$$

$$= \sec A \sec(90^\circ - A)$$

$$= \text{L.S.} \quad \text{จ.ก.พ.}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๑ ก.

หาค่าของ A จากสมการ

$$1. \sin A = \cos 4A \quad 2. \cos 3A = \sin 7A$$

$$3. \tan A = \cot 3A \quad 4. \cot A = \tan A$$

$$5. \cot A = \tan 2A \quad 6. \sec 5A = \operatorname{cosec} A$$

พิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไป

$$7. \sin A \tan(90^\circ - A) \sec(90^\circ - A) = \cot A$$

$$8. \cos A \tan A \tan(90^\circ - A) \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = 1$$

$$9. \operatorname{cosec}^2(90^\circ - A) = 1 + \sin^2 A \operatorname{cosec}^2(90^\circ - A)$$

$$10. \tan^2 A \sec^2(90^\circ - A) - \sin^2 A \operatorname{cosec}^2(90^\circ - A) = 1$$

$$11. \frac{\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A}{\cot(90^\circ - A)} \cdot \frac{\cot A}{\sec^2 A} = \sec^2(90^\circ - A) = 1$$

$$12. \frac{\cos^2(90^\circ - A)}{\operatorname{vers} A} = 1 + \sin(90^\circ - A)$$

$$13. \frac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A$$

$$14. \text{ ถ้า } x \sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A)$$

$$= \cos(90^\circ - A) \text{ หมายความว่า } x$$

$$15. \text{ ถ้า } \sec A \operatorname{cosec}(90^\circ - A) - x \cot(90^\circ - A) = 1$$

$$\text{หมายความว่า } x$$

ด 4. 8 จากความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตามข้อ 4.1 ถึง 4.5 เราหาอัตราส่วนตรีโกณมิติทุกอัน ในเทอมของอัตราส่วนอันใดอันหนึ่ง

ตัวอย่าง 1.

$$\text{ถ้า } \cos A = \frac{5}{13} \text{ จงหา } \operatorname{cosec} A \text{ และ } \cot A$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}} = \frac{13}{12}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \cos A \operatorname{cosec} A$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

2. จงหา $\tan A$ ในเทอมของ $\operatorname{cosec} A$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\operatorname{cosec} A \sqrt{1-\sin^2 A}}$$

๑ ท.๕

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\operatorname{cosec} A \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}}} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{cosec} A \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}{\operatorname{cosec} A}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๒ ท.

1. ให้ $\sin A = \frac{1}{2}$ จงหา $\sec A$ และ $\cot A$

2. ให้ $\tan A = \frac{4}{3}$ จงหา $\sin A$ และ $\cos A$

3. ให้ $\sec \theta = 4$ จงหา $\cot \theta$ และ $\sin \theta$

4. ถ้า $25 \sin A = 7$ จงหา $\tan A$ และ $\sec A$

5. จงบอก $\sin A$ และ $\tan A$ ในเทอมของ $\cos A$

6. จงบอก $\operatorname{cosec} A$ และ $\cos A$ ในเทอมของ $\cot A$

7. เปรียบอঙ্กตรีส่วนตรีโกณมิติของ A ทุกอันใน
เทอมของ $\sin A$

8. ให้ $\tan A = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ หมายความว่า $\cos A$ และ $\operatorname{cosec} A$

9. ถ้า $\sec A = \frac{m^2 + 1}{2m}$ หมายความว่า $\tan A$ และ $\sin A$

10. ถ้า $\cos \theta = \frac{p}{q}$ หมายความว่า $\frac{p \cos \theta - q \sin \theta}{p \cos \theta + q \sin \theta}$

ต 4. 9 สมการตรีโกณมิติอย่างง่าย การแก้

สมการเช่นนี้ คือ แก้หาค่าของมุม

ตัวอย่าง 1. แก้สมการ $3 \sec^2 \theta = 8 \tan \theta - 2$

$$3(1 + \tan^2 \theta) = 8 \tan \theta - 2$$

$$3 \tan^2 \theta - 8 \tan \theta + 5 = 0$$

$$(\tan \theta - 1)(3 \tan \theta - 5) = 0; \tan \theta = 1$$

$$\text{หรือ } \frac{5}{3}$$

$$\text{ถ้า } \tan \theta = 1 = \tan 45^\circ; \theta = 45^\circ$$

$$\text{ถ้า } \tan \theta = \frac{5}{3} = 1.6666 = \tan 59.2^\circ; \theta = 59.2^\circ$$

๑๓๗

$$2. \text{ จงแก้สมการ } 3\tan\theta + \cot\theta = 5\operatorname{cosec}\theta$$

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{\sin\theta}$$

$$3\sin^2\theta + \cos^2\theta = 5\cos\theta$$

$$3(1 - \cos^2\theta) + \cos^2\theta = 5\cos\theta$$

$$2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0; (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 3) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \text{ หรือ } -3$$

โดยที่ค่าของ $\cos\theta$ เกิน 1 ไม่ได้, $\cos\theta = -3$

จึงเป็นไปได้ ถ้า $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$;

$$\theta = 60^\circ$$

แบบฝึกหัดที่ ๑๓๓ ท.

หาโซลูชันของสมการต่อไปนี้

$$1. \sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = 0 \quad 2. \sqrt{2}\cos\theta = \cot\theta$$

$$3. \sec^2\theta = 2\tan^2\theta \quad 4. \operatorname{cosec}^2\theta = 4\cot^2\theta$$

$$5. \sec^2\theta + \tan^2\theta = 7 \quad 6. 2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 3$$

$$7. \tan\theta = 4 - 3\cot\theta$$

$$8. 6\tan\theta - 5\sqrt{3}\sec\theta + 12\cot\theta = 0$$

$$9. 5\tan\theta + 6\cot\theta = 11$$

$$10. \sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$$

$$11. \cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$$

$$12. 2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$$

บทที่ ๕ ต.

การแก้สามเหลี่ยมมุมฉาก

การแก้สามเหลี่ยมคือการหาส่วนที่ยังไม่ทราบ ซึ่งอาจเป็นด้านหรือมุมก็ได้ เราดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

- (1) บอกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการหา
- (2) เขียนสามเหลี่ยมตามสิ่งที่กำหนดให้
- (3) เขียนตัว unknown ตัวใดตัวหนึ่ง ในเทอมของสิ่งที่กำหนดให้
- (4) แทนค่าและแก้ตัว unknown ซอก
- (5) ตรวจสอบ

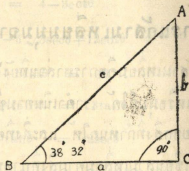
ตัวอย่าง

$$1. \text{ ให้ } B = 38^{\circ} 32', a = 40, C = 90^{\circ}$$

จงแก้สามเหลี่ยม

1. กำหนดให้: $B = 38^{\circ} 32'$
 $a = 40$

2. การสร้าง:

ต้องการหา: $A = ?$, $b = ?$ $c = ?$, $S = ?$ 3. สูตร: $A + B = 90^\circ$; $A = 90^\circ - B$

$$\tan B = \frac{b}{a}; \quad b = a \tan B$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \quad c = \frac{a}{\cos B}$$

$$S = \frac{ab}{2}$$

4. การหาค่า: $A = 90^\circ - 38^\circ 32' = 51^\circ 28'$

$$b = 40 \tan 38^\circ 32' = 40 \times .7964$$

$$= 31.86$$

๑๔๑

$$c = \frac{40}{\cos 38^{\circ} 32'} = \frac{40}{.7823} = 51.14$$

$$S = \frac{40 \times 31.86}{2} = 637.2$$

5. การตรวจสอบ $b = c \cos A$

$$31.86 \stackrel{?}{=} 51.14 \times .6229 = 31.86$$

ตัวอย่าง 2

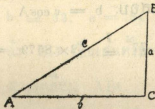
กำหนดให้ $a = 37$, $c = 72$, $C = 90^{\circ}$
 จงแก้สามเหลี่ยม

1. กำหนดให้: $a = 37$, $c = 72$

ต้องการหา: $A = ?$ $B = ?$

$b = ?$ $S = ?$

2. การสร้าง



3. สูตร $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$ หรือ $B = 90^\circ - A$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$S = \frac{ab}{2}$$

4. การหาค่า: $\sin A = \frac{37}{72} = .5139;$

$$A = 30^\circ 55'$$

$$B = 90^\circ - A = 90^\circ - 30^\circ 55'$$

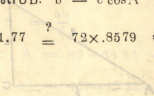
$$= 59^\circ 5'$$

$$b = \sqrt{72^2 - 37^2} = 61.77$$

$$S = \frac{37 \times 61.77}{2} = 1142.7$$

5. การตรวจสอบ: $b = c \cos A$

$$61.77 \stackrel{?}{=} 72 \times .8579 = 61.77$$



แบบฝึกหัดที่ 14 ต.

• จงแก้สามเหลี่ยม ตามสิ่งกำหนดต่อไปนี้

1. $A = 90^\circ$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$
2. $2a = b = 6\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$
3. $A = 90^\circ$, $B = 25^\circ$, $a = 4$
4. $A = 54^\circ$, $c = 8$, $C = 90^\circ$
5. $A = 27^\circ$, $C = 63^\circ$, $b = 6$
6. $B = 90^\circ$, $C = 37^\circ$, $b = 100$
7. $A = 90^\circ$, $B = 39^\circ 24'$, $b = 25$
8. $C = 90^\circ$, $a = 225$, $b = 272$
9. $C = 90^\circ$, $b = 22.75$, $c = 25$
10. $b = 53$, $c = 84$, $C = 90^\circ$
11. ถ้า BD เป็นเส้นตั้งฉากไปยังฐาน AC ของ
สามเหลี่ยม ABC จงหา a และ
กำหนดให้ $A = 30^\circ$, $C = 45^\circ$, $BD = 10$

12. ถ้าลาก PQ ไปตั้งฉากกับเส้นตรง QRS
 จงหา RS กำหนดให้ $PQ = 36$, $\angle RPQ = 35^\circ$, $\angle SPQ = 53^\circ$

13. ถ้าลาก PQ ไปตั้งฉากกับเส้นตรง QRS
 จงหา RS กำหนดให้ $PQ = 20$, $\angle PRS = 135^\circ$, $\angle PSR = 25^\circ$

14. ในสามเหลี่ยม ABC มุม B และมุม C เท่า
 กัน 45° และ 120° ตามลำดับ ถ้า $a = 40$
 จงหาความยาวของเส้นตั้งฉากจาก A บน BC
 ที่ทอดออกไป

15. ในสามเหลี่ยม ABC, $AB = 20$, $BC = 33$,
 $\angle B = 42^\circ$ จงหาเส้นตั้งฉากจาก A บน BC
 และหามุม C

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ครูสภา นายสหัส กาญจนพงศ์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

