ইতিহাস

516
৯৯৩৯৭

0687

เรขาคณิต

ภาค ๑

พระสันธิวิทยาพัฒน์

เรียบเรียง

พิมพ์ครั้งที่ห้า ๕๐๐๐ ฉะบับ

พ. ศ. ๒๔๙๐

ราคาเล่มละ ๗๐ สตางค์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์รัฐเทพ

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

เลขห้อง 216
หมู่ 516
เล่ม 2 ปี 2535

คำนำครั้งแรก

ใคร ๆ ก็รู้อยู่ว่าชาติที่จะเจริญได้ต้องอาศัยการศึกษา แต่การศึกษาที่จะให้ผลชักจูงให้ชาติเจริญเป็นถ่ำสันได้นั้น ไม่ใช่ชะนิดที่เอาอย่างความคิดความเจริญของผู้อื่นแต่ถ่ายเดียว เพราะฉะนั้น ศิลปวิทยาใด ๆ ที่เราเรียนกัน เราควรปรารถนาให้ได้ผล ๒ ประการ คือ

(๑) ให้รู้ด้วยวิธีหยั่งลึกตนหนาบางของวิชานั้น ๆ โดยตลอด และ

(๒) เมื่อรู้ด้วยอาการดังว่าแล้ว บัญญาจะพึงเกิดที่จะใช้ความรู้อันนั้นให้เป็นประโยชน์จริงๆ ต่อไป.

เมื่อความมุ่งหมายเป็นดังนี้ จะเรียนวิชาใด ๆ เพียงแต่ให้สามารถไปสาธยายวิชานั้นต่อไปตรงตามแบบครูเท่านั้นย่อมไม่พอ และเพื่อจะให้ได้ผลดัง

ว่านี้ จึงเห็นจำเป็นต้องพยายามสอนเป็นไทยซึ่ง
เป็นภาษากำเนิด เพราะฉะนั้นจำเป็นต้องง่ายกว่า
ภาษาต่างประเทศเป็นธรรมดา จริงอยู่ในระหว่าง
หัวต่อนี้ เป็นการยากอยู่ข้างที่จะปรับศัพท์และ
ความคิดในวิชาใหม่ ๆ เข้ามาเป็นภาษาไทย แต่
เมื่อได้ปรับลงรูปแล้ว ไม่ควรมีปัญหาว่าจะยาก
เกินไป.

ด้วยเหตุผลทั้งนี้ ข้าพเจ้าจึงได้ตั้งกองวิงวอน
บรรดาเพื่อนข้าราชการในกระทรวงธรรมการ และ
นอกกระทรวงก็มี ให้ช่วยกันแต่งตำราศัลปวิทยา
เป็นภาษาไทยขึ้นให้มากที่สุดที่จะเป็นได้ พระ
สันธิวิทยาพัฒน์แต่งขึ้นสำเร็จเป็นรายที่ ๒ ปรารถนา
จะให้ข้าพเจ้าเขียนคำนำให้จึงยินดีทำตาม เพราะ
เป็นโอกาสที่ข้าพเจ้าจะได้มีส่วนสนองคุณที่เขาช่วย
ให้ความปรารถนาของข้าพเจ้าสำเร็จได้ทันใจเช่นนี้

หวังว่าหนังสือนี้จะเป็นประโยชน์ในการที่จะอบรม
กลบตรสืบไปข้างหน้า.

บ้านถนนเพ็ชร์บุรี

วันที่ ๗ พฤศจิกายน พ. ศ. ๒๔๗๔

ธานินิวัต

คำนำในการพิมพ์ครั้งที่ ๔

เนื่องด้วยครผู้สอนเรขาคณิตของข้าพเจ้าได้แจ้งมาให้ทราบว่า การใช้อักษรไทยบอกชื่อรูปต่าง ๆ ยังไม่สะดวกดีเท่ากับใช้อักษรอังกฤษ ข้าพเจ้าจึงได้ดัดแปลงใช้อักษรอังกฤษในเล่มใหม่นี้ ทางคณิตศาสตร์แผนกอื่น ๆ เราก็ใช้เลขอังกฤษแทนเลขไทยอยู่แล้ว รู้สึกว่าสะดวกดีที่เขียนได้เร็วกว่า เมื่อเป็นเช่นนี้ เรขาคณิต ก็น่าจะใช้ตัวอักษรอังกฤษบ้าง เพื่อให้ได้ประโยชน์เช่นเดียวกัน.

อนึ่งในตำราเล่มใหม่นี้ ข้าพเจ้าได้ปรับปรุงแก้ไขบ้างเล็กน้อย และพยายามอยู่เสมอที่จะทำให้ดีขึ้นไปอีก แต่ถึงกระนั้นในการพิมพ์ครั้งนี้ก็น่าจะหลีกให้พ้นจากความผิดพลาดเล็ก ๆ น้อย ๆ เสียมิได้ หวังว่าท่านผู้ใช้คงให้อภัยแก่ข้าพเจ้า.

พระสันธิวิทยาพัฒน์

๖ กันยายน พ. ศ. ๒๔๗๘

บัญชีเรื่อง

	หน้า
สิ่งที่เห็นจริงแล้ว	๗
คำจำกัดความ	๘
การสร้างโดยไม่ต้องพิสูจน์	๑๗
การซ้อนรูปและความเท่ากัน	๑๗
เครื่องใช้	๑๘
คำนำ	๒๐
ทฤษฎีบทที่ ๑	๒๔
ทฤษฎีบทที่ ๒	๒๙
โจทย์แบบฝึกหัด	๓๐
ทฤษฎีบทที่ ๓	๓๓
โจทย์แบบฝึกหัด	๓๕
ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม	๓๘
ทฤษฎีบทที่ ๔	๔๕
โจทย์แบบฝึกหัด	๔๘

หอสมุดแห่งชาติ ๑๔ ก.ย. กรมศิลปากร

	หน้า
ทฤษฎีบทที่ ๕	๕๑
โจทย์แบบฝึกหัด	๕๔
ทฤษฎีบทที่ ๖	๕๖
หมายเหตุสำหรับ ทฤษฎีบทที่ ๕ กับที่ ๖	๕๘
ทฤษฎีบทที่ ๗	๖๒
โจทย์แบบฝึกหัด (ทฤษฎีบท)	๖๖
ทฤษฎีบทที่ ๘	๗๓
โจทย์แบบฝึกหัด	๗๖
ทฤษฎีบทที่ ๙	๗๘
ทฤษฎีบทที่ ๑๐	๘๑
ทฤษฎีบทที่ ๑๑	๘๔
ทฤษฎีบทที่ ๑๒	๘๖
โจทย์แบบฝึกหัด	๘๘
เส้นขนาน	๙๒
ทฤษฎีบทที่ ๑๓	๙๔

หน้า

ทฤษฎีบทที่ ๑๔ ๙๙
ทฤษฎีบทที่ ๑๕ ๑๐๕
โจทย์แบบฝึกหัด ๑๐๖
ทฤษฎีบทที่ ๑๖ ๑๑๐
โจทย์แบบฝึกหัด ๑๑๓
โจทย์ตัวอย่าง ๑๑๖
โจทย์แบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ ๑๖ ๑๑๖
โจทย์แบบฝึกหัด ๑๒๒
ทฤษฎีบทที่ ๑๗ ๑๒๖
โจทย์แบบฝึกหัด ๑๒๙
ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันได้ทุกประการ ๑๓๒
ทฤษฎีบทที่ ๑๘ ๑๓๕
ทฤษฎีบทที่ ๑๙ ๑๓๗
บททวนต้นที่ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม ๑๔๒
โจทย์ระคน ๑๔๕

หน้า

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ๑๔๙
ทฤษฎีบทที่ ๒๐ ๑๕๑
ทฤษฎีบทที่ ๒๑ ๑๕๓
โจทย์แบบฝึกหัด ๑๕๗
โจทย์แบบฝึกหัด (ว่าด้วยเส้นขนานกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน) ๑๕๘
ทฤษฎีบทที่ ๒๒ ๑๖๕
โจทย์แบบฝึกหัด (ว่าด้วยเส้นขนานกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน) ๑๖๘
มาตราส่วนเย้ ๑๗๖
โจทย์แบบฝึกหัดสำหรับวัดทางยาว ๑๘๐
บทสร้าง ๑๘๕
บทสร้างที่ ๑ ๑๘๖
บทสร้างที่ ๒ ๑๘๘
บทสร้างที่ ๓ ๑๙๑

หน้า

บทสร้างที่ ๓ (วิธีที่ ๒) ๑๙๒
บทสร้างที่ ๓ (วิธีที่ ๓) ๑๙๓
บทสร้างที่ ๔ ๑๙๕
บทสร้างที่ ๔ (วิธีที่ ๒) ๑๙๗
บทสร้างที่ ๔ (วิธีที่ ๓) ๑๙๗
บทสร้างที่ ๕ ๑๙๙
บทสร้างที่ ๖ ๒๐๑
บทสร้างที่ ๗ ๒๐๒
บทสร้างที่ ๗ (วิธีที่ ๒) ๒๐๓
โจทย์แบบฝึกหัดว่าด้วยเส้นตรงและมุม ๒๐๔
บทสร้างที่ ๘ (ว่าด้วยการสร้างรูปสามเหลี่ยม) ๒๐๙
บทสร้างที่ ๙ ๒๑๓
โจทย์แบบฝึกหัด ๒๑๔
บทสร้างที่ ๑๐
ว่าด้วยการสร้างรูปสามเหลี่ยม -
(แบบฝึกหัดสำหรับสร้าง) ๒๑๗

หน้า

บทสร้างที่ ๑๑ ๒๒๓
บทสร้างที่ ๑๒ ๒๒๕
บทสร้างที่ ๑๓ ๒๒๘
โจทย์แบบผีกหัด (ว่าด้วยการสร้าง
รูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ) ๒๒๙
โลไซ (เอกพจน์ โลกัส) ๒๓๓
วิธีสอนโลกัสของจุด ๒๓๔
บทสร้างที่ ๑๔ ๒๓๗
บทสร้างที่ ๑๕ ๒๓๙
โลไซตัดกัน ๒๔๐
โจทย์ตัวอย่างว่าด้วยโลไซ ๒๔๔
ว่าด้วยเส้นตรงหลาย ๆ เส้นมารวมกัน
ที่จุดจุดหนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยม ๒๕๐
โจทย์ระคนของบทสร้าง ๒๕๗
การสร้างรูปสามเหลี่ยม ๒๕๙

เรขาคณิต

เหตุที่นักเรียนเรียนวิชาเรขาคณิตเข้าใจไม่ได้ดีเป็นเพราะ

๑. ครูไม่รู้จักวิธีสอน มักให้นักเรียนเรียนอย่างท่องสวดมนตร์ นักเรียนจึงไม่รู้ดี.

๒. นักเรียนไม่รู้จริงว่า สิ่งที่เห็นจริงแล้ว, คำจำกัดความต่าง ๆ และทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้วจะต้องนำไปใช้สำหรับทฤษฎีบทหลัง ๆ อย่างไร.

๓. ทั้งครูและนักเรียนลืมนึกไปว่าการเรียนเบื้องต้นนี้จะต้องเอาไปใช้ตอนปลาย ๆ เพราะนักเรียนโดยมาก พอเรียนถึงบทที่ ๗ ที่ ๘ ก็ต้องเรียนภาค ๔ หรือภาค ๕ บางคนไม่รู้ภาค ๑ ภาค ๒ ภาค ๓ เพราะเข้าใจว่า ภาคหนึ่งเขากะไว้สำหรับ

มัธยมปีที่ ๔ ภาค ๒ สำหรับปีที่ ๕ ภาค ๓ สำหรับปีที่ ๖ ฯลฯ จึงได้ปล่อยปละละเลยเสียหรือลืมไปเมื่อไปเรียนภาค ๔ ภาค ๕ จึงไม่เข้าใจดี.

วิธีแก้ไข ข้อ ๑ ครูต้องสอนให้เข้าใจ. รูปจะต้องเขียนให้ถูกต้องชัดเจน, ตอนไหนสร้างต้องสร้างให้นักเรียนเห็น, นักเรียนสงสัยต้องถามครู เพื่อให้เข้าใจได้ถ่องแท้ นี่จะเป็นเครื่องช่วยให้นักเรียนรู้วิชาดีขึ้น.

ข้อ ๒. สิ่งที่เห็นจริงและคำจำกัดความต่าง ๆ นักเรียนต้องรู้ดีจริง ๆ เพราะสิ่งเหล่านี้ไม่ต้องการพิสูจน์ ส่วนทฤษฎีบทที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วจะต้องเข้าใจและจำได้ดี เพราะทฤษฎีบทข้างหน้าต้องอาศัยทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้วจึงจะทำได้.

ข้อ ๓. ไม่ว่าวิชาคำนวณประเภทใด ๆ เราจะถือเป็นเกณฑ์ว่าจบชั้นนั้นแล้ว จบภาคนี้แล้ว ไม่ต้องเรียนซ้ำอีกนั้น ไม่ได้เป็นอันขาด เพราะวิชา

คำนวณถึงจะเรียนให้สูงขึ้นไปเท่าไร ๆ ก็ดี จำเป็น
ต้องใช้กฎหรือวิธีต่ำ ๆ ที่เรียนมาแล้วทั้งสิ้น แม้
ท่านศาสตราจารย์ท่านจะคำนวณเลขคณิตหรือวิชา
คณิตศาสตร์ประเภทใด ๆ ก็ดี ที่จะให้พ้นจาก บวก
ลบ คูณ หาร ซึ่งเราเรียนมาแต่ชั้นประถมหาได้ไม่
เหตุฉะนั้นครูต้องถามสอบนักเรียนเสมอถึงสิ่งที่เห็น
จริงแล้ว และคำจำกัดความต่าง ๆ. ตามที่ข้าพเจ้า
ได้สังเกตมาแล้ว แม้แต่เด็กชั้นมัธยมปีที่ ๘
บางคนก็ยังจำสิ่งที่เห็นจริงแล้วไม่ได้ เมื่อเป็น
เช่นนี้นักเรียนจะเรียนวิชาเรขาคณิตให้เข้าใจดีได้
อย่างไร.

ถ้านักเรียนอยากรู้วิชาเรขาคณิตดี จงจำข้อ
แนะนำ ๓ ประการนี้ไว้เถิด พอถึงชั้นสูง ๆ นักเรียน
ก็จะเห็นจริงตามที่ข้าพเจ้ากล่าว.

การที่ข้าพเจ้าได้เขียนตำราเล่มนี้ขึ้น ก็เพื่อ
แนะนำให้ผู้ที่ไม่ได้ศึกษาวิชาภาษาอังกฤษเรียนได้

แต่ที่ข้าพเจ้าดำเนินแนวเดียวกับตำราของท่านฮอลส์
และสตีเวนส์นี้ ก็เพราะเหตุว่าเป็นตำราที่กระทรวง
ธรรมการให้ใช้ตามโรงเรียนมัธยมของรัฐบาลและ
เหมาะที่จะใช้ตั้งแต่มัธยมปีที่ ๔ ขึ้นไป เพราะ
มัธยมตอนต้นได้มีการสอนวิชานี้มาบ้างแล้ว เช่น
การวัดเส้น วัดมุม วิธีใช้วงเวียนไม้โปรแตรคเตอร์
ไม้ฉาก การแบ่งเส้นและมุมออกเป็นสองส่วนเท่าๆ
กัน กับการสร้างรูปสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม เว้นไว้
แต่ไม่ต้องพิสูจน์ ตำราเล่มนี้จะช่วยให้เข้าใจ
พิสูจน์หาเหตุผลต่อไป.

อนึ่งข้าพเจ้าอยากจะให้ครูสอนนักเรียน โดย
ไม่ให้นักเรียนอ้างทฤษฎีบทที่เท่านั้นที่เท่านี้ เพราะ
ตำราบางเล่มลำดับเลขที่ทฤษฎีบทไม่ตรงกัน จึง
ขอแนะนำให้สอนอย่างนี้ คือแทนที่จะอ้างทฤษฎีบท
ที่ ๕ ดังที่ข้าพเจ้าได้ทำไว้ในตำราเล่มนี้ ควรบอก
ให้เด็กเขียนหรือพูดว่า “เพราะว่าเป็นมุมที่ฐานของ

สามเหลี่ยมหน้าจั่ว” หรือถ้าจะพิสูจน์สามเหลี่ยม
สองรูปเท่ากันทุกประการ ก็อ้างอย่างใดอย่างหนึ่ง
ในสี่อย่างข้างล่างนี้.

๑. “เพราะด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน
และมุมในระหว่างด้านเท่าเท่ากัน” แทนที่จะอ้าง
ทฤษฎีบทที่ ๔

๒. “เพราะด้านเท่ากันสามด้าน ด้านต่อด้าน”
แทนที่จะอ้างทฤษฎีบทที่ ๗

๓. “เพราะมุมสองมุมเท่ากัน มุมต่อมุม และ
ด้านด้านหนึ่งเท่ากัน” แทนที่จะอ้างทฤษฎีบทที่ ๑๗

๔. “เพราะด้านตรงข้ามกับมุมฉากเท่ากัน
และด้านอีกด้านหนึ่งเท่ากัน” แทนที่จะอ้างทฤษฎี
บทที่ ๑๘ อย่างนี้เป็นต้น.

ถ้าสอนให้เด็กอ้างอย่างนี้ จะทำให้เด็กเรียน
เรขาคณิตได้ด้วยความเข้าใจ ดีกว่าอ้างทฤษฎีบทที่
เท่านั้นเท่านี้ เพราะว่าเป็นการใช้ความจำ ไม่นาน
ก็ลืมหมด.

ข้าพเจ้าได้กล่าวแล้วว่า ตำราเล่มนี้ข้าพเจ้า
แปลจากต้นฉะบับอังกฤษ จึงไม่ทำให้แปลกไปกว่า
ต้นฉะบับเดิมของเขา เพราะฉะนั้นขอผู้สอนจงทำ
ตามคำแนะนำนี้เถิด ข้าพเจ้ามั่นใจว่า ศิษย์ของ
ท่านจะได้รับผลดียิ่งขึ้น.

ภาค ๑
สิ่งที่เห็นจริงแล้ว

ความจริงบางอย่างที่ไม่ต้องพิสูจน์ เรียกว่า **สิ่งที่เห็นจริงแล้ว** เช่น

สิ่งทั้งหลายที่ต่างก็เท่ากับสิ่งอันเดียวกัน สิ่งเหล่านั้นย่อมเท่ากันหมด.

สิ่งที่เห็นจริงแล้วต่อไปนี้ ตรงกับ บวก ลบ คูณ หารในเลขคณิต เรามักจะต้องนำมาใช้บ่อย ๆ ในการพิสูจน์เรขาคณิต คือ:

บวก สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าเอาอะไรมาบวกเข้าอีกเท่า ๆ กัน ผลบวกเหล่านั้นย่อมเท่ากันหมด.

ลบ สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าหักออกเสียเท่าๆ กัน ที่เหลืออยู่ต้องเท่ากัน.

คูณ สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าคูณด้วยสิ่งที่เท่ากัน ผลคูณย่อมเท่ากันทั้งหมด.

หาร สิ่งทั้งหลายที่เท่ากัน ถ้าหารด้วยสิ่งที่เท่ากัน ผลลัพธ์ย่อมเท่ากันทั้งหมด.

คำจำกัดความ

๑. **จุด** คือสิ่งที่ไม่มีกำหนดกว้างยาวใหญ่เล็ก มีกำหนดแต่ที่อยู่เท่านั้น.

คือเราไม่สามารถจะวัดได้ว่ามันใหญ่โตเพียงไร เราได้แต่ทราบว่ามันอยู่ที่ตรงนี้ตรงนั้น ซึ่งหมายความว่าอย่างไรก็ต้องมีที่อยู่.

๒. **เส้น** คือสิ่งที่มีแต่ส่วนยาวเท่านั้น ไม่มีส่วนกว้าง.

ถ้าเราเอาดินสอดำปลายแหลมกดเข้าที่กระดาษก็จะเกิดเป็นจุดจุดหนึ่ง ถ้าลากดินสอไปบนกระดาษแผ่นนั้น รอยที่ดินสอขีดไว้ก็จะเป็นเส้นยาวสั้นตามแต่เราต้องการ แต่เราจะวัดว่ารอยนั้นกว้างเท่าไรไม่ได้ ฉะนั้นเส้นจึงไม่มีส่วนกว้าง.

๓. พื้นที่ คือสิ่งที่มีส่วนกว้าง, ส่วนยาว แต่ไม่มีส่วนหนา.

รูปตัน มีส่วนกว้าง, ส่วนยาว, และส่วนหนา.

รูปตัน, พื้นที่, เส้นและจุดเกี่ยวข้องกันอย่างไร.

(ก) รูปตัน มีหน้าเป็นพื้นที่.

(ข) พื้นที่มีขอบเป็นเส้น และเมื่อพื้นที่ตัดกันเองหรือพบกัน ที่ที่ตัดกันหรือที่พบกันต้องเกิดเป็นเส้น.

(ค) เส้นมีปลายทั้งสองข้างเป็นจุด และเมื่อเส้นตัดกันเองหรือพบกัน ที่ที่ตัดกันหรือที่พบกันต้องเกิดเป็นจุด.

๔. เส้นมีสองชะนิด คือ เส้นตรง, และเส้นคด.

เส้นตรง คือ เส้นที่ขึงตึงเครียดในระหว่างจุดปลายทั้งสองข้าง.

เส้นคด คือเส้นที่หย่อนในระหว่างจุดปลายทั้งสองข้าง.

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว เราจะลากเส้นตรงต่อระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้แต่เพียงเส้นเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้นเส้นตรงสองเส้นจะบีดพื้นที่ของรูปใด ๆ ไม่มิด.

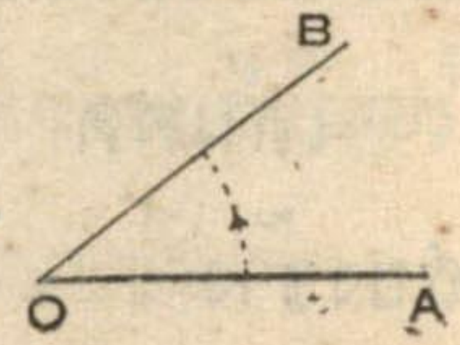
๕. **พื้นที่ราบ** คือพื้นที่ที่แบนเรียบ

เพื่อทดลองดูว่า พื้นที่ใดจะราบจริงหรือไม่ จงเลือกที่ในพื้นที่นั้น แล้วจุดลงไปสองจุด ลากเส้นตรงให้ผ่านจุดทั้งสองนี้ ถ้าเส้นตรงเส้นนี้สัมผัสกับพื้นที่นิด พื้นที่นั้นเป็นพื้นที่ราบ.

๖. เมื่อเส้นตรง ๒ เส้นมาพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จะทำให้เกิด **มุม** ขึ้นมุมหนึ่ง เส้นใดเส้นหนึ่งของเส้นตรงคู่นี้เรียกว่า **แขน** ของมุมนั้น และจุดที่เส้นตรงคู่นี้พบกัน เรียกว่า **ยอด** (Vertex).

เราจะทราบได้ว่ามุมหนึ่ง ๆ กางออกกว้างใหญ่เท่าไร โดยวิธีนี้.

สมมติว่าแขน OA เคลื่อนที่ไม่ได้

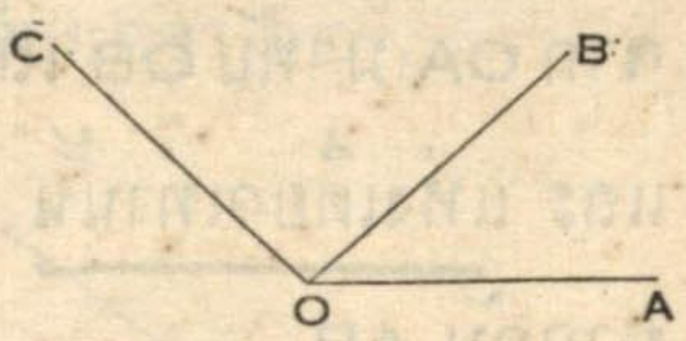


แต่ OB หมุนไปได้ (ดังในรูปที่มีปลายลูกศร) แล้ว ค่อย ๆ หมุนแขน OB ให้ห่างออกไปจาก OA เมื่อ OB ไปถึงแค่ไหนก็ให้วัดส่วนที่หมุนไปในระหว่างเส้น OB กับ OA.

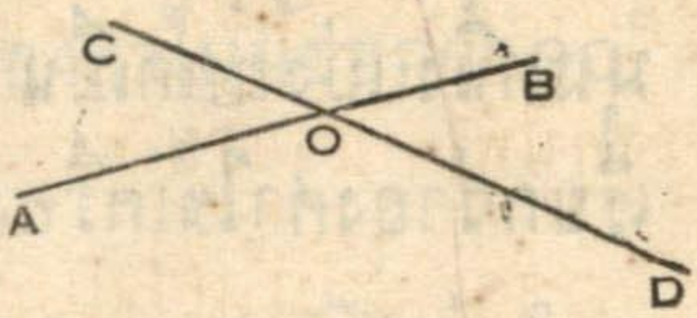
จงจำไว้ว่า ส่วนยาวของแขนจะไม่ทำให้ขนาดของมุมนั้นเปลี่ยนแปลงไปเลย.

มุมที่มีแขนร่วมกันอยู่ข้างหนึ่ง เรียกว่า **มุมประชิด.**

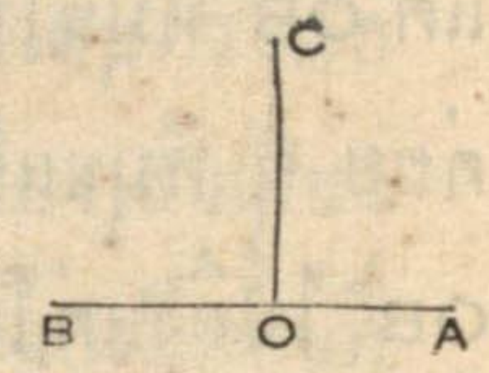
ตัวอย่างมุม AOB กับมุม BOC ซึ่งมี OB เป็นแขนร่วม ต่างก็เป็นมุมประชิดซึ่งกันและกัน.



เมื่อเส้นตรงสองเส้น เช่น AB, CD ตัดกันที่จุด O มุม COA จะเป็นมุมตรงข้ามของมุม BOD และมุม BOC จะเป็นมุมตรงข้ามของมุม AOD.



๗. เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง และทำให้มุมประชิดเท่ากัน. มุมใดมุมหนึ่งของมุมประชิดคู่นี้ เรียกว่า หนึ่งมุมฉาก หรือเท่ากับหนึ่งมุมฉาก และเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งในเส้นตรงคู่นี้ ต่างก็ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน.



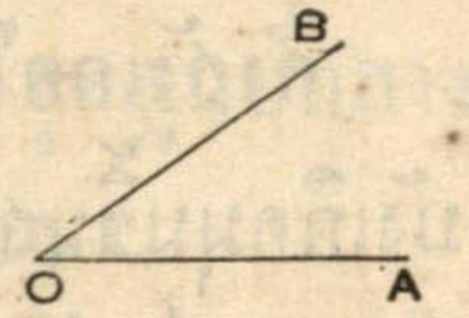
สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (๑) ถ้า O เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ในเส้นตรง AB และมีเส้นตรง CO หมุนรอบจุด O จาก OA มาทับ OB เส้นตรง OC นี้จะผ่านที่แห่งหนึ่งและ แห่งเดียวเท่านั้น ที่จะทำให้เส้น OC ตั้งได้ฉากกับ AB.

(๒) มุมฉากทั้งหลายย่อมเท่ากัน มุมฉากมุมหนึ่งแบ่งออกเป็น 90 ส่วนเท่าๆกัน ส่วนเหล่านี้เรียกว่าองศาใช้เครื่องหมาย ($^\circ$) เช่นนี้แทน เช่น 45° อ่านว่า 45 องศา องศาหนึ่งแบ่งออกเป็น 60 ลิบดา ($'$) และ 1 ลิบดาแบ่งออกเป็น 60 พิลิบดา ($''$).

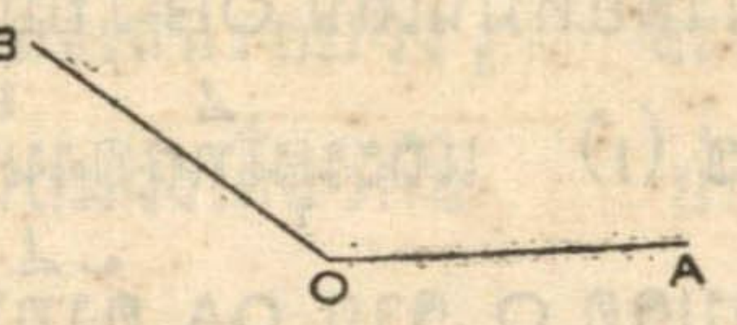
ในรูปข้างบนนี้ ถ้า OC หมุนรอบจุด O จาก OA มาทับ OB เส้น OC หมุนได้สองมุมฉากหรือ 180°.

ถ้า OC หมุนรอบจุด O ได้รอบหนึ่งพอดี คือ จาก OA มาทับ OA ตามเดิม เส้น OC จะหมุนได้สี่มุมฉาก หรือ 360°.

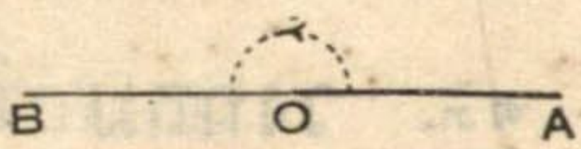
๘. มุมใดที่ย่อมกว่าหนึ่งมุมฉาก เรียกว่า **มุมแหลม** นี่คือ มุมแหลมใด ๆ มีจำนวนองศาน้อยกว่า 90°.



๙. มุมใดซึ่งโตกว่าหนึ่งมุมฉากและย่อมกว่าสองมุมฉากเรียกว่า **มุมป้าน** นี่คือมุมป้านมีจำนวนองศาไม่น้อยกว่า 90° และไม่เกินกว่า 180°.



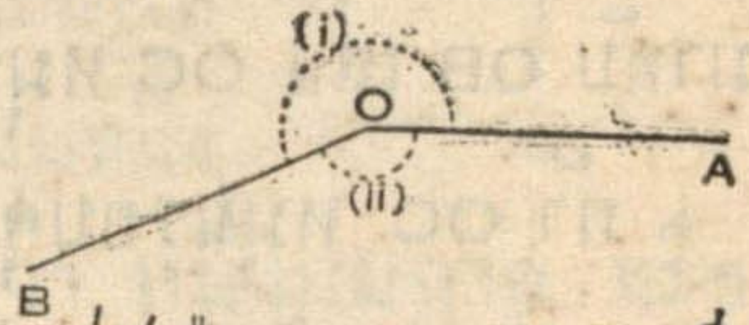
๑๐. ถาแขน OB ของมุม



ใดมุมหนึ่งหมุนไป จนเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกันกับแขน OA มุมที่เกิดขึ้นนี้ เรียกว่า **มุมตรง**.

มุมตรงมุมหนึ่ง = สอง มุมฉาก = 180°.

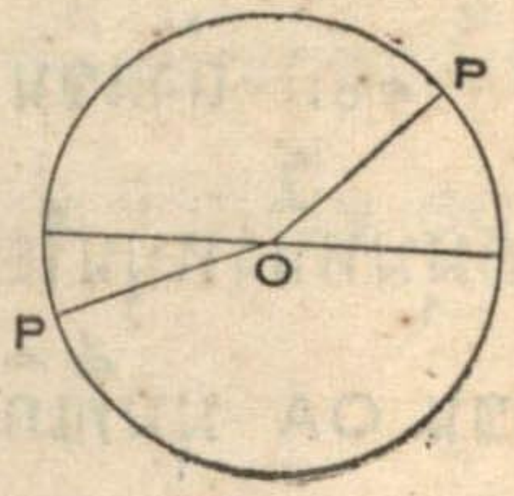
๑๑. มุมใดซึ่งโตกว่าสองมุมฉาก และย่อมกว่าสี่มุมฉาก เรียกว่า มุมกลับ นี่ก็คือ มุมกลับ มีจำนวนองศาไม่น้อยกว่า 180°.



จงสังเกตไว้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นพบกัน และบังเกิดมุมขึ้นสองมุม มุมหนึ่งใหญ่กว่าสองมุมฉาก อีกมุมหนึ่งต้องเล็กกว่าสองมุมฉาก มุมที่หนึ่งเกิดขึ้นโดยหมุนเส้น OB รอบจุด O จาก OA ดังที่หมายเลข (i) และมุมที่สองนั้นเกิดขึ้นโดยหมุนเส้น OB รอบจุด O จาก OA ดังที่หมายเลข (ii)

๑๒. ส่วนใด ๆ ของพื้นที่ราบ ซึ่งมีเส้นเส้นหนึ่งหรือหลาย ๆ เส้นล้อมรอบ เรียกว่า **รูปแบน**.

๑๓. **วงกลม** คือรูปแบนรูปหนึ่ง ซึ่งมีเส้นล้อมรอบ และเส้นล้อมรอบนี้เกิดโดยการลากเส้นจาก



จุดจุดหนึ่ง ให้โค้งกลับมาบรรจบที่เดิม โดยที่ระยะทุก ๆ ตอนในเส้นโค้งนั้นห่างจากจุดที่กำหนดไว้อีกจุดหนึ่งเท่ากันเสมอ.

เช่นจุด P หมุนไปตามเส้นที่ปรากฏในรูป ระยะทางจากจุด P มาถึง O ต้องเท่ากันเสมอ.

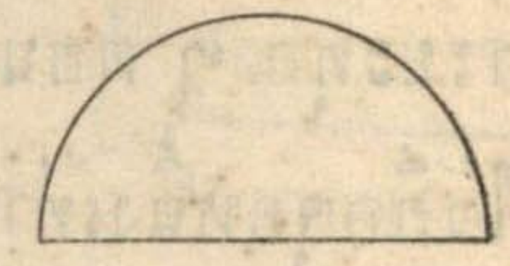
จุดที่กำหนดไว้ คือจุด O เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** และเส้นล้อมรอบเรียกว่า **เส้นรอบวง.**

๑๔. **เส้นรัศมีของวงกลม** คือเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปถึงเส้นรอบวง ฉะนั้นเส้นรัศมีหลายเส้นของวงกลมวงเดียวกัน ย่อมเท่ากันหมด.

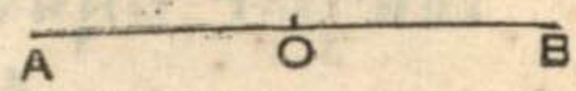
๑๕. **เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม** คือเส้นที่ลากทับจุดศูนย์กลางของวงกลม และปลายเส้นทั้งสองข้างต้องไปสุดที่เส้นรอบวง.

๑๖. **เส้นอารุค** (Arc) คือส่วนหนึ่งส่วนใดของเส้นรอบวง.

๑๗. รูปครึ่งวงกลม (Semi-circle) คือรูปรูปหนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง กับครึ่งหนึ่งของเส้นรอบวง.



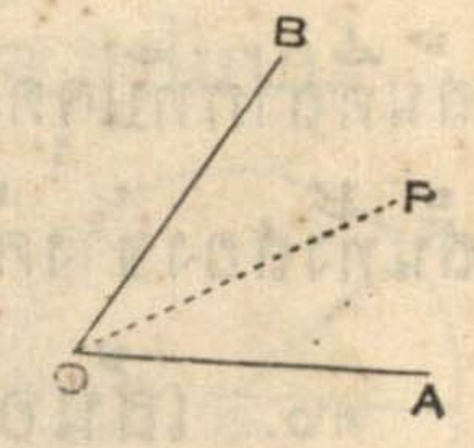
๑๘. แบ่งครึ่ง หมายความ



ว่าแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว ๑. ถ้าจุด O เคลื่อนที่จาก A ไป B ตามเส้นตรงAB จุด O นี้ต้องผ่านที่แห่งหนึ่งซึ่งแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน นี่ก็คือเส้นตรงทุกเส้นที่ทราบส่วนยาวแน่นอน ย่อมมีจุดแบ่งครึ่งจุดหนึ่ง.

๒. ถ้าเส้น OP หมุนรอบจุด O จาก OA ไปยัง OB เส้น OP นี้ต้องผ่านที่แห่งหนึ่งซึ่งแบ่งมุม AOB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน นี่ก็คือมุมทุก ๆ มุมย่อมมีเส้นแบ่งครึ่งเส้นหนึ่ง.



การสร้างโดยไม่ต้องพิสูจน์

ตามสิ่งที่เห็นจริงแล้ว ซึ่งได้กล่าวไว้ข้างท้ายคำจำกัดความข้อ ๗ กับข้อ ๑๘ เราอาจสมมติได้ดังนี้

๑. จากจุดใด ๆ ในเส้นตรงที่กำหนดให้ จะลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้นั้นก็ได้.

๒. เส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งทราบส่วนยาวแน่นอนแล้ว จะแบ่งครึ่งที่จุดจุดหนึ่งก็ได้.

๓. มุมมุมหนึ่งจะแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่งก็ได้.

การซ้อนรูปและความเท่ากัน

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว ขนาดของสิ่งทั้งหลาย ซึ่งนำมาซ้อนกันได้สนิทดี ย่อมเท่ากัน.

สิ่งที่เห็นจริงนี้หมายถึงเส้น มุม รูปต่าง ๆ ซึ่งได้

ยกไปจากที่โดยไม่ทำให้เปลี่ยนลักษณะเดิม แล้ว
เอาไปซ้อนบนเส้น หรือมุม หรือรูป เพื่อจะเปรียบ
เทียบกนดู เมื่อเห็นว่าของอย่างหนึ่งทับของอก
อย่างหนึ่งได้สนิทดี คือไม่เหลื่อมกันแล้ว เรากล่าว
ได้ว่าขนาดของของทั้งสองอย่างนั้น เท่ากัน.

วิธีทำอย่างนี้เรียกว่า **การซ้อนรูป** คือเอารูป
ที่หนึ่งไปซ้อนบนรูปที่สอง.

เครื่องใช้

ในการเขียนรูปเรขาคณิต เราต้องมีเครื่องใช้.
เครื่องใช้สำหรับตำราเล่มนี้ คือ ๑. ไม้บรรทัด
๒. วงเวียน. อาศัยเครื่องใช้เหล่านี้ เราก็จะ
สำเร็จประสงค์ในสิ่งที่จักได้กล่าวต่อไปนี้.

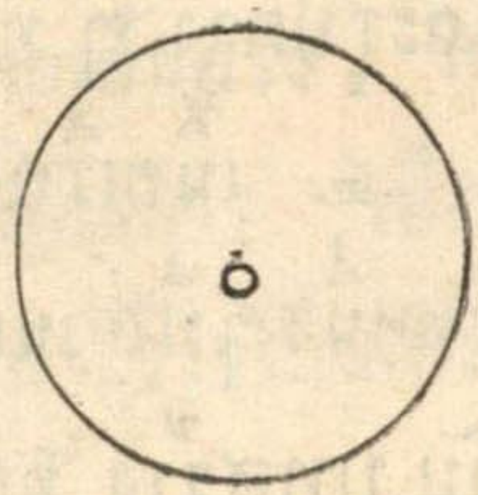
๑. เราอาจลากเส้นตรงจากจุดจุดหนึ่งไปยังจุด
อีกจุดหนึ่งก็ได้.

๒. เส้นตรงที่แน่นอนว่า ปลายไปสุดที่ไหน

แล้ว แม้จะต่อตรงออกไปทางใดทางหนึ่งให้ยาว
เท่าไร ๆ ก็ได้.

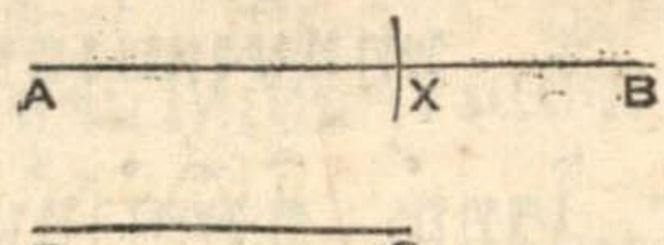
๓. เราอาจเขียนวงกลมโดยเอาจุดใดจุดหนึ่ง
เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมียาวเท่าไร ๆ ก็ได้.

จงสังเกตไว้ว่า (๑) ที่กล่าวไว้ในข้อ ๓ มี
ความหมายว่า เรากางวงเวียนให้
เท่ากับส่วนยาวของเส้นตรง PQ
และด้วยรัศมียาวเท่ากับ PQ เขียน
วงกลมโดยเอา O เป็นจุดศูนย์กลาง
นี่ก็คือ เราใช้วงเวียน เพื่อย้าย



ระยะส่วนยาวของ PQ เอาไปไว้เป็นระยะส่วนยาว
ในวงกลม.

(๒) ถ้าเส้น AB ยาว
กว่าเส้น PQ เราอาจจะตัด
เส้น AB ให้ยาวเท่ากับเส้น PQ ได้.



เพราะถ้าเราเอา A เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมี

ยาวเท่ากับ PQ เขียนส่วนโค้งของเส้นรอบวง (arc) ให้ตัดเส้น AB ที่จุด X เส้น AX จะยาวเท่ากับ PQ.

คำนำ

๑. Plane Geometry ว่าด้วยคุณสมบัติของเส้นและรูปต่าง ๆ ที่เขียนหรือสร้างขึ้นบนพื้นที่ราบ.

๒. เนื้อเรื่องแบ่งออกเป็นข้อต่าง ๆ เรียกว่าบท บทหนึ่ง ๆ มีส่วนต่างกันเป็น ๒ ประเภทคือ ทฤษฎีบท กับ บทสร้าง. ทฤษฎีบทมีไว้เพื่อพิสูจน์เอาความจริงในวิชาเรขาคณิต บทสร้างมีไว้เพื่อให้รู้จักการสร้างรูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่นการลากเส้น และการสร้างรูปให้ได้ตามความประสงค์.

๓. บทหนึ่งแบ่งออกเป็นส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้.

โจทย์, สิ่งที่กำหนดให้, การสร้าง และการพิสูจน์.

(๑) โจทย์ คือสิ่งที่กล่าวโดยไม่จำกัดความ

ให้ตายตัวในความประสงค์แห่งบทนั้น ๆ.

(๒) สิ่งที่กำหนดให้ คือการเรียนแบบจากโจทย์นั่นเองแต่ต้องให้ใจความตายตัว โดยมีรูปไว้อ้าง ซึ่งทำให้ผู้เรียนเข้าใจในการให้เหตุผลง่ายเข้า.

(๓) การสร้าง คือการลากเส้นตรง หรือการเขียนวงกลม ฯลฯ ตามที่เราต้องการ เพื่อให้สมประสงค์ในบทสร้าง หรือจะเอาไว้ใช้เป็นเครื่องพิสูจน์หาความจริงในทฤษฎีบทก็ได้.

(๔) การพิสูจน์ คือการแสดงให้เห็นว่าความมุ่งหมายที่ได้ถามไว้ในบทสร้างได้กระทำเรียบร้อยแล้ว หรือคุณสมบัติของรูปต่าง ๆ ที่จะต้องพิสูจน์ให้ได้ความจริงนั้น ได้พิสูจน์ให้เห็นจริงแล้ว.

๕. ตัวอักษร ซ. ค. พ. ที่มีข้างท้ายทฤษฎีบทหนึ่ง ๆ หมายความว่า สิ่งซึ่งต้องพิสูจน์.

๕. บทแทรก คือสิ่งที่กล่าวถึงความจริง อัน

สืบเนื่องมาจากทฤษฎีบท ซึ่งได้พิสูจน์ไปแล้ว
บทแทรกมักมีต่อท้ายทฤษฎีบท เพื่อใช้เป็นสิ่งที่อ้าง
ถึงหรือสรุปความ ซึ่งตามปกติไม่ต้องการที่จะ
พิสูจน์ต่อไปอีก

๖. เครื่องหมายและอักษรย่อต่อไปนี้ใช้ในหนังสือนี้

ภาค ๑

∴ แทนคำว่า เพราะฉะนั้น.

= แทนคำว่า เท่ากับ. △ แทนรูปสามเหลี่ยม

∵ แทนคำว่า เพราะว่า.

เครื่องหมาย ∠ หรือ ⌒ ใช้แทนมุม เช่น
∠ AOB หรือ $\overset{\frown}{AOB}$ อ่านว่า มุม AOB.

ต่อจากภาค ๑ ไป.

⌊ฉ แทนมุมฉาก. ◇น แทนสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

$\parallel$ แทนคำว่าขนานกัน $\odot$ แทนวงกลม.

$\perp$ ตั้งได้ฉาก. $\bigcirc$ แทนเส้นรอบวง.

เพื่อเป็นการสะดวก และมิให้ผู้เรียนใช้เครื่องหมายเหล่านี้ผิดๆถูกๆ ครูควรจะนำมาสอนเวลาทำปากเปล่าทีละอย่างสองอย่าง ไม่ช้าผู้เรียนก็จะชำนาญการใช้ได้ดี ในแบบฝึกหัดว่าด้วยการคำนวณมีตัวอักษรใช้ดังนี้

ม.	แทน	เมตร.
มม.	,,	มิลลิเมตร.
ซม.	,,	เซ็นติเมตร.
กม.	,,	กิโลเมตร.

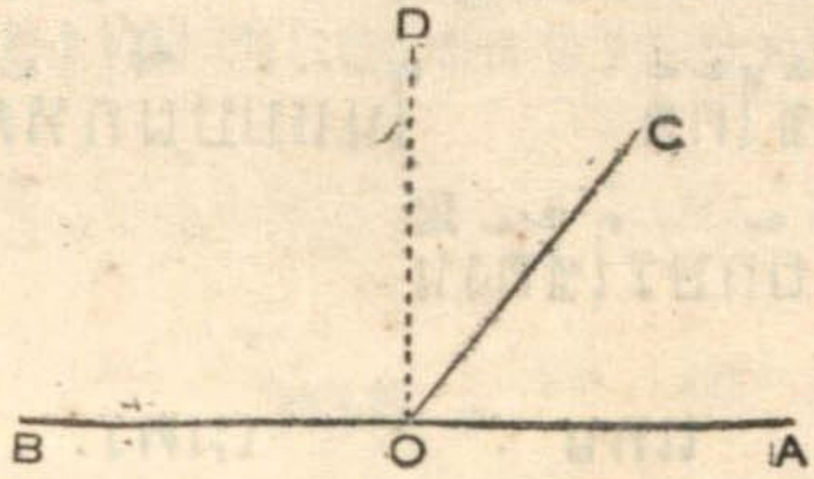
เครื่องหมาย ($''$) แทนคำว่านิ้ว.

เช่น ๕$''$ อ่านว่า ๕ นิ้ว

ว่าด้วยเส้นและมุม

ทฤษฎีบทที่ ๑ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๓)

โจทย์ เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิดรวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้เส้นตรง CO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AB

∠AOC กับ ∠COB เป็นมุมประชิด.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

∠AOC + ∠COB = สองมุมฉาก.

สมมติให้เส้นตรง OD ตั้งได้ฉากกับ AB

พิสูจน์ ∠AOC+∠COB=∠AOC+∠COD+∠DOB

และ ∠AOD+∠DOB=∠AOC+∠COD+∠DOB

$\therefore \angle AOC + \angle COB = \angle AOD + \angle DOB$

แต่ $\angle AOD + \angle DOB =$ สองมุมฉาก

$\therefore \angle AOC + \angle COB =$ สองมุมฉาก

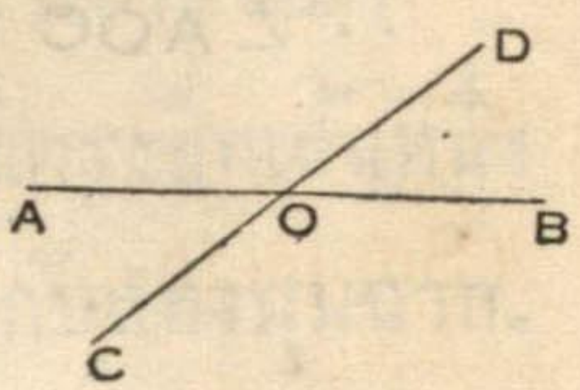
ซ. ต. พ.

พิสูจน์ด้วยวิธีหมุน

สมมติว่าเส้นตรง OC หมุนรอบจุด O ตั้งต้นแต่ OA เมื่อหมุนไปถึงเส้น OC ดังปรากฏในรูป เส้น OC จะหมุนไปได้มุม AOC ถ้าให้หมุนจาก OC ต่อไปอีกจนถึง OB แล้ว เส้น OC จะหมุนไปได้อีกมุมหนึ่ง คือมุม COB ฉะนั้นเส้น OC หมุนตั้งต้นแต่ OA ไปจนถึง OB ต้องหมุนผ่านมุมประชิดคือ AOC กับ COB ซึ่งเท่ากับมุมตรง AOB แต่มุมตรง AOB = สองมุมฉาก.

∴ ∠AOC กับ COB รวมกันเข้าจึงต้องเท่ากับสองมุมฉาก.

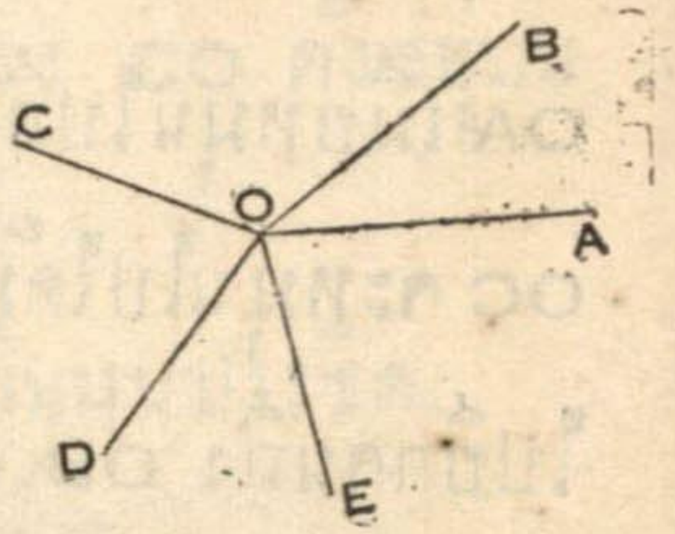
บทแทรกที่ ๑ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมทั้ง ๔ รวมกันเข้าต้องเท่ากับสี่มุมฉาก เช่น



∠BOD+∠DOA+∠AOC+∠COB=สี่มุมฉาก

บทแทรกที่ ๒ เมื่อเส้นตรงหลายเส้นมาพบกันที่จุดจุดหนึ่ง ผลบวกของมุมทั้งสิ้นต้องเท่ากับสี่มุมฉาก.

เพราะว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นใดในรูปนี้ถ้าหมุนรอบจุด



O ให้ผ่านมุม AOB, BOC, COD, DOE และ EOA แล้ว เส้นตรงเส้นนั้นจะหมนได้หนึ่งรอบพอดี ฉะนั้นจึงต้องเท่ากับสี่มุมฉาก (โดยสิ่งที่เห็นจริงแล้ว).

คำจำกัดความ

๑. ถ้ามุมสองมุมรวมกันเข้าได้เท่ากับสองมุมฉาก มุมหนึ่งเรียกว่ามุมประกอบสองมุมฉาก (Supplement) ของอีกมุมหนึ่ง.

เช่นในรูปของทฤษฎีบทที่ ๑ ∠AOC เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ ∠COB และ ∠COB ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ ∠AOC.

มุม 123° เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของมุม 57°.

๒. ถ้ามุมสองมุม รวมกันเข้าได้เท่ากับหนึ่งมุมฉาก มุมหนึ่งเรียกว่ามุมประกอบหนึ่งมุมฉาก (Complement) ของอีกมุมหนึ่ง.

เช่นในรูปของทฤษฎีบทที่ ๑ ∠COD เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ ∠AOC และ ∠AOC ก็เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ ∠COD.

มุม 34° เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุม 56°.

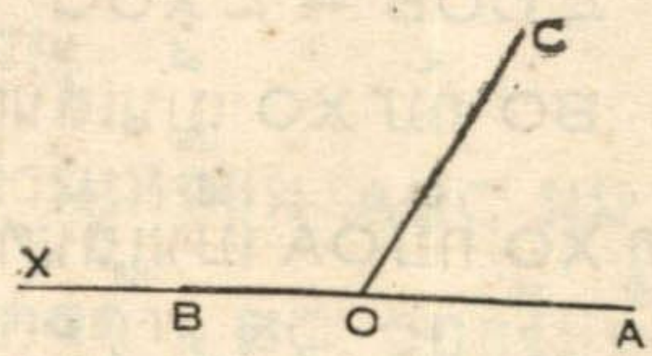
บทแทรกที่ ๓ (๑) มุมประกอบสองมุมฉากของมุมเดียวกันย่อมเท่ากัน.

(๒) มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมเดียวกันย่อมเท่ากัน.

หอสมุดแห่งชาติ

ทฤษฎีบทที่ ๒ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๔)

โจทย์ ถ้าเส้นตรงสองเส้นจดกันที่จุดหนึ่งจุดใด ซึ่งอยู่ในเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งข้างละเส้น ทำให้มุมประชิดรวมกันเข้าได้เท่ากับสองมุมฉาก เส้นตรงสองเส้นนี้จะเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ที่จุด O ในเส้นตรง CO สมมติให้เส้นตรง AO กับ BO อยู่คนละข้างของ CO ทำให้มุมประชิด AOC กับ COB รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า OB กับ OA เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.

ต่อเส้น AO ออกไปทางจุด O ถึงจุด X, เส้น XO กับ OA จะเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน.

พิสูจน์ ∵ AOX เป็นเส้นตรง (โดยสร้าง)

∴ XOC + ∠COA = สองมุมฉาก

(โดยทฤษฎีบทที่ ๑)

แต่ ∠COB + ∠COA = สองมุมฉาก

(โดยสิ่งที่กำหนดให้)

∵ ∠COB = ∠XOC

∴ BO กับ XO เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

แต่ XO กับ OA เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

อยู่แล้ว (โดยสร้าง)

∴ OB กับ OA จึงต้องเป็นเส้นตรง

เส้นเดียวกันด้วย.

ซ. ต. พ.

ไจทย์แบบฝึกหัด

๑. จงเขียนมุมประกอบสองมุมฉากของมุม

ครึ่งมุมฉาก, มุม $\frac{4}{3}$ ของมุมฉาก, มุม 46°, 149°,

มุม 83°, มุม $101^\circ 15'$.

๒. จงเขียนมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุม $\frac{2}{5}$ ของมุมฉาก ของมุม 27°, ของมุม $38^\circ\ 16'$, ของมุม $41^\circ\ 29'\ 30''$.

๓. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ให้เห็นว่า มุมอีกสามมุม ต่างก็เป็นมุมฉากด้วย.

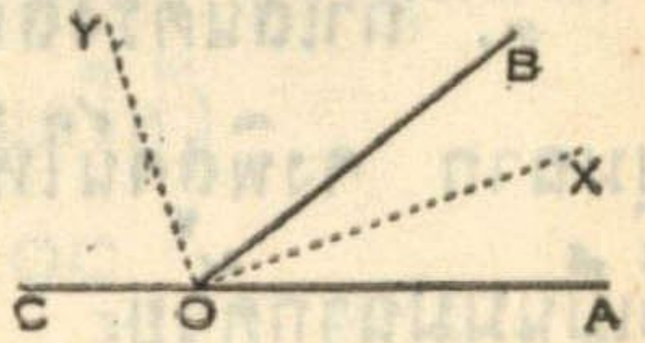
๔. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม ABC เท่ากับมุม ACB ถ้าต่อด้าน BC ออกไปทั้งสองข้างแล้ว มุมภายนอกทั้งคู่ที่เกิดขึ้นนั้นย่อมเท่ากัน.

๕. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม ABC เท่ากับมุม ACB ถ้าต่อด้าน AB กับ AC ให้เลยออกไปทางฐานแล้ว มุมภายนอกทั้งคู่ที่เกิดขึ้นนั้นย่อมเท่ากัน.

คำจำกัดความ

เส้นตรงเส้นหนึ่งแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน เส้นตรงเส้นนั้นเรียกว่า **เส้น**

แบ่งครึ่ง สำหรับมุมประชิดต้องมีเส้นแบ่งครึ่งสอง
เส้นเส้นหนึ่งเรียกว่า เส้นแบ่งครึ่งภายใน อีกเส้นหนึ่ง
เรียกว่า เส้นแบ่งครึ่งภายนอก เช่นในรูปนี้ เส้น
$\overline{OX}$ แบ่งครึ่งมุม AOB เรียก
ว่าเส้นแบ่งครึ่งภายในของมุม
AOB และเส้น $\overline{OY}$ เรียกว่า
เส้นแบ่งครึ่งภายนอกของมม AOB.



๖. จงพิสูจน์ให้เห็นว่า มุมในระหว่างเส้นแบ่ง
ครึ่งของมุมประชิดย่อมเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

๗. จงพิสูจน์รูปข้างบนนี้ให้เห็นว่า

$\angle AOX + \angle COY =$ หนึ่งมุมฉาก.

๘. จงแสดงให้เห็นจากรูปข้างบนว่า

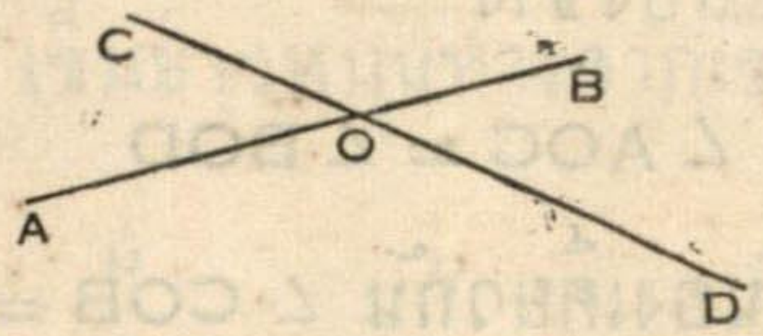
$\angle COX + \angle BOX =$ สองมุมฉาก.

และ $\angle AOY + \angle BOY =$ สองมุมฉาก.

๙. ถ้ามุม AOB เท่ากับ 35° จงหาจำนวน
องศาของมุม COY.

ทฤษฎีบทที่ ๓ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๕)

โจทย์ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามยอมเท่ากัน.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้เส้นตรง AB กับ CD ตัดกันที่จุด O

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า.

(๑) $\angle AOC = \angle BOD$

(๒) $\angle COB = \angle AOD$

พิสูจน์ $\because$ AO มาพบกับเส้นตรง CD

$\therefore$ มุมประชิด AOC + AOD = สองมุมฉาก

และ $\because$ DO มาพบกับเส้นตรง AB

$\therefore$ มุมประชิด BOD + AOD = สองมุมฉาก

$\therefore$ $\angle AOC + \angle AOD = \angle BOD + \angle AOD$

(สิ่งที่เห็นจริงแล้ว)

หัก $\angle AOD$ ซึ่งเป็นมุมร่วมออกเสียทั้งสองข้าง

$\therefore$ $\angle AOC = \angle BOD$

ในทำนองเดียวกัน $\angle COB = \angle AOD$.

ซ. ต. พ.

พิสูจน์ด้วยการหมุน

สมมติให้เส้น COD หมุนรอบจุด O จนกว่า OO จะหมุนมาถึง OA และในเวลาเดียวกัน OD ก็ต้องหมุนไปถึง OB (เพราะว่า AOB กับ COD ต่างก็เป็นเส้นตรง)

เพราะฉะนั้นจำนวนองศาที่เส้น CO หมุนมาถึงเส้น AO ก็ย่อมเท่ากับจำนวนองศาที่เส้น OD หมุนไปถึงเส้น OB

ด้วยเหตุฉะนี้ $\angle AOC$ จึงต้องเท่ากับ $\angle BOD$.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. เข็มยาวกับเข็มสั้นของนาฬิกา จะกางออกเป็นมุมเท่าไร ?

ถ้า (ก) เข็มยาวหมุนห่างจากเข็มสั้น 5 นาที

(ข) " " " 21 "

(ค) " " " $43\frac{1}{2}$ "

(ฆ) " " " 14 "

กับ 10 วินาที

(ง) จะเป็นเวลานานเท่าไร เข็มยาวจึงจะหมุนห่างจากเข็มสั้นได้มุม 66°. และ 222° ?

๒. เราตั้งนาฬิกาในเวลาเที่ยงตรง เมื่อถึงเวลา 15 นาฬิกา กับ 45 นาที เข็มสั้นจะหมุนจากที่เดิมไปเป็นมุมกี่องศา ?

และเมื่อเข็มสั้นหมุนจากที่เดิมได้มุม $172\frac{1}{2}^\circ$ จะเป็นเวลากี่นาฬิกา ?

๓. โลกหมุนรอบตัวเองรอบหนึ่งเป็นเวลา 24 ชั่วโมงพอดี ฉะนั้นถ้าโลกหมุนไปได้ 3 ชั่วโมง 20 นาที จะหมุนไปเป็นมุมกี่องศา และจะเป็นเวลานานเท่าไร โลกจึงจะหมุนไปได้มุม 130° ?

๔. จากรูปในทฤษฎีบทที่ ๓

(ก) ถ้ามุม AOC = 35° จงเขียนจำนวนองศาของมุม COB, BOD, และ DOA.

(ข) ถ้า ∠ COB + ∠ AOD = 250° จงหาจำนวนองศาของมุม COA และ BOD.

(ค) ถ้า ∠ AOC + ∠ COB + ∠ BOD = 274° จงหามุมทั้งสี่ว่าจะเป็นมุมละกี่องศา.

๕. O เป็นจุดจุดหนึ่งในเส้นตรง AB, จากจุด O ลากเส้นตรง OC กับ OD ให้อยู่คนละข้างของเส้นตรง AB ถ้ามุม AOD = มุม COB จงพิสูจน์ว่า OD กับ CO ต้องเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

๖. เส้นตรง AB กับ CD ตัดกันที่จุด O ถ้า OX

เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง
ที่ต่อออกไปทาง XO ก็ต้องเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม
AOC ด้วย.

๗. เส้นตรง AB กับ CD ตัดกันที่จุด O เส้นตรง OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD และเส้นตรง OY ก็เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม AOC จงพิสูจน์ว่า เส้นตรง OX กับ OY เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

๘. เส้นตรง OX แบ่งครึ่งมุม AOB ถ้าเราพับตามรอย OX จงแสดงให้เห็นว่า เส้น OA ต้องทับเส้น OB.

(ก) ถ้า ∠AOX ใหญ่กว่า ∠XOB

(ข) ถ้า ∠AOX เล็กกว่า ∠XOB

ในข้อ (ก) และ (ข) นี้ เส้นตรง OA จะทับเส้นตรง OB หรือไม่ ถ้าไม่ทับ เส้นตรงสองเส้นนี้จะเป็นอย่างไรกัน?

๙. AB กับ CD ตัดกันได้ฉากที่จุด O ถ้าเรา

พับตามรอยเส้น AB จงแสดงให้เห็นว่า เส้น OC ต้องทับเส้น OD.

๑๐. ถ้าเราเขียนเส้นตรง AOB ลงบนกระดาษแผ่นหนึ่ง แล้วพับที่จุด O ให้เส้น AO ทับเส้น OB จงแสดงให้เห็นว่า รอยพับนั้นต้องเป็นเส้นตรงตั้งได้ฉากกับเส้น AB.

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม

คำจำกัดความ

๑. ส่วนหนึ่งส่วนใดของพื้นที่ราบ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นหนึ่งหรือหลายเส้นก็ดี เราเรียกว่า รูปแบน.

ผลบวกของส่วนยาวของเส้นที่ล้อมรอบเรียกว่า เปอริมีเตอร์

จำนวนของพื้นที่ราบซึ่งอยู่ภายในเส้นล้อมรอบ เรียกว่า พื้นที่.

๒. รูปเหลี่ยม (Rectilineal figures) คือรูปที่มีเส้นตรงล้อมรอบ.

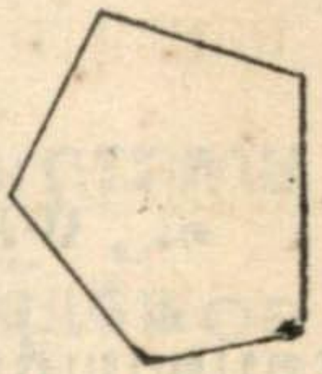
๓. รูปสามเหลี่ยม คือรูปแบน ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรงสามเส้น.

๔. รูปสี่เหลี่ยม คือรูปแบน ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรงสี่เส้น.

๕. รูปหลายเหลี่ยม (Polygon) คือรูปแบน

ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรงมากกว่าสี่เส้นขึ้นไป.

รูปนี้คือรูปห้าเหลี่ยม รูปหลายเหลี่ยม หมายความว่ารูปที่มากกว่าสี่เหลี่ยมขึ้นไป.



(ศัพท์ Gono โกโน แปลว่า ด้าน และ Poly ปอลิ แปลว่า มากหรือหลาย เมื่อสนธิกันเข้าเป็น Polygon ปอลิกอนตามศัพท์ต้องแปลว่ารูปหลายด้าน แต่ข้าพเจ้าเรียกว่า รูปหลายเหลี่ยม เพราะเหตุว่ารูป △ เราไม่เรียกว่ารูปสามด้าน เราเรียกว่ารูปสามเหลี่ยม เพราะฉะนั้นรูปข้างบนนี้ จึงเรียกรูปหลายเหลี่ยม ไม่ใช่รูปหลายด้าน จงสังเกตไว้ว่า จำนวนเหลี่ยมกับด้านต้องเท่ากันเสมอ เช่นรูปสามเหลี่ยมก็มีสามด้าน และรูปหกเหลี่ยมก็มีหกด้าน ฯลฯ)

๖. รูปเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันหมด เรียกว่า รูปด้านเท่า (Equilateral) equi =เท่ากัน lateral =ด้าน

ถ้ามุมเท่ากันหมดเรียกว่า **รูปมุมเท่า** (Equiangular)
ถ้าด้านเท่ากันหมด และมุมก็เท่ากันหมดด้วย
เรียกว่า **รูปเหลี่ยมด้านเท่า** (Regular)

๗. ถ้าถือเอาด้านเป็นเกณฑ์แล้ว รูปสามเหลี่ยมแบ่งออกได้สามชะนิด คือ

สามเหลี่ยมด้านเท่า สามเหลี่ยมหน้าจั่ว สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

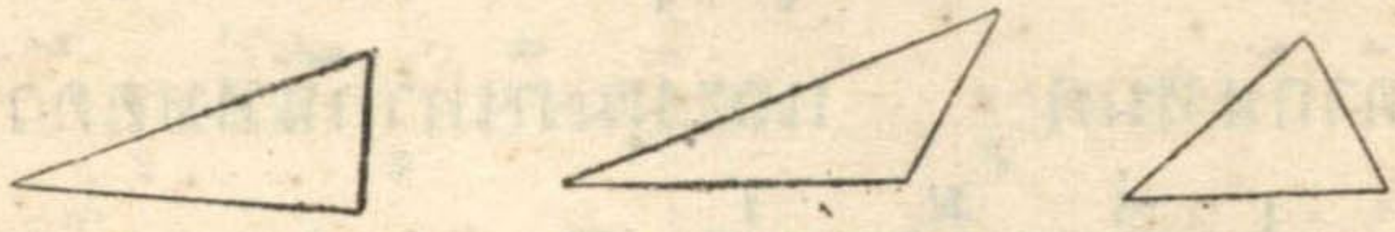


มุมหนึ่งมุมใดของรูปสามเหลี่ยม เราจะเรียกว่า **มุมยอด** ก็ได้ และด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมยอดนั้น ต้องเรียกว่า **ฐานของรูปสามเหลี่ยม.**

ฉะเพาะรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุมยอด คือมุมที่อยู่ในระหว่างด้านเท่า.

๘. ถ้าถือเอามุมเป็นเกณฑ์แล้ว รูปสามเหลี่ยมแบ่งออกได้อีกสามชะนิด คือ

สามเหลี่ยมมุมฉาก สามเหลี่ยมมุมป้าน สามเหลี่ยมมุมแหลม



(เมื่อถึงบทแทรกของทฤษฎีบทที่ ๘ แล้ว จะเห็นได้ว่ารูปสามเหลี่ยมทุก ๆ ชะนิด ต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยที่สุดสองมุม)

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากเรียกว่า **ด้านทะแยง** (Hypotenuse)

๙. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นตรงที่ลากมาจากมุมมุมหนึ่งถึงกึ่งกลางของด้านตรงข้ามของมุมนั้น เรียกว่า **เส้นมีเดียน** (Median)

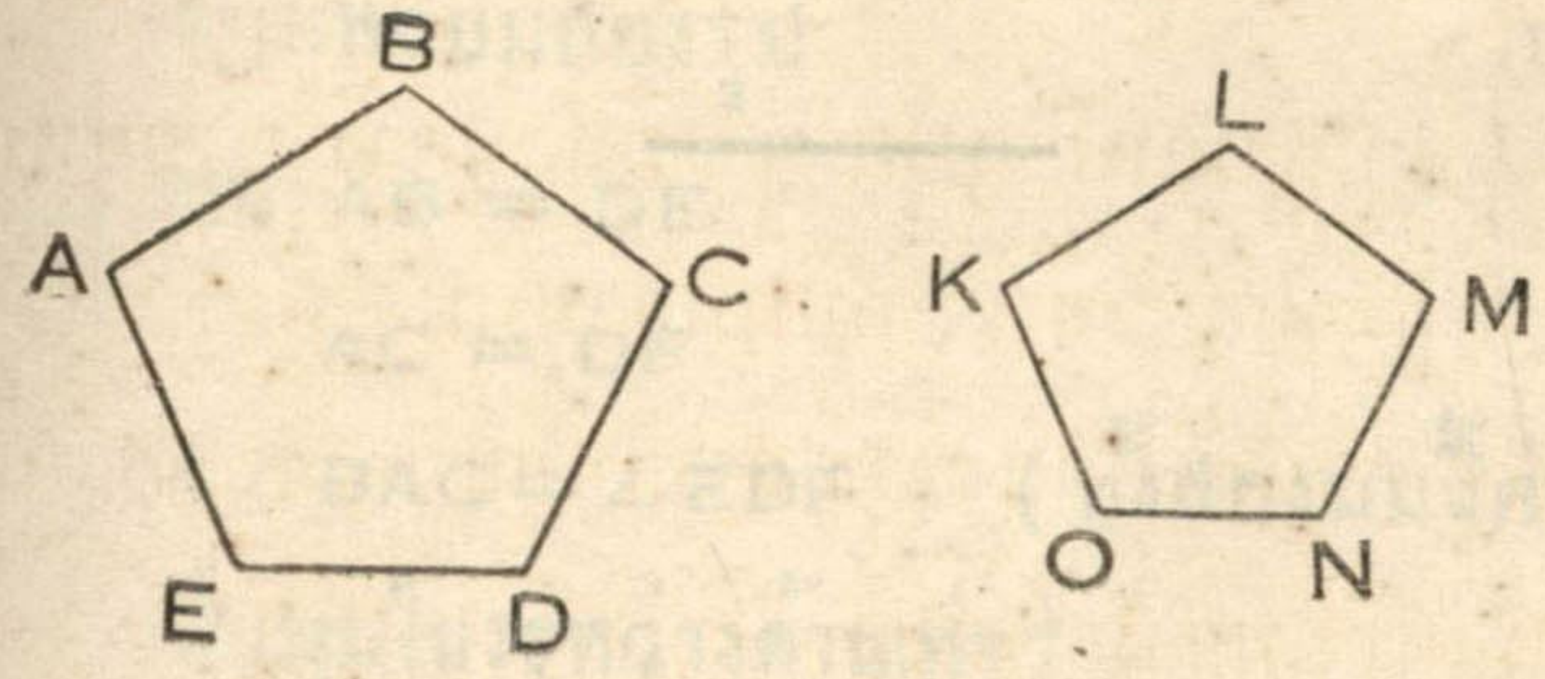
การเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยมสองรูป

๑. รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีส่วนต่าง ๆ อยู่หกส่วน คือด้านสามด้าน กับมุมสามมุม รวมกันเข้าเรียกว่า ส่วนทั้งหกของรูปสามเหลี่ยม นอกจากนี้รูปสามเหลี่ยมยังมี **พื้นที่**.

๒. สามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันได้ทุกประการ ต่อเมื่อเอาสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปซ้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ทับกันได้สนิทดี ถ้าส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมที่หนึ่งทับส่วนต่างๆของรูปสามเหลี่ยมที่สองได้สนิทดี ส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมที่หนึ่งก็ย่อมเท่ากับส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมที่สอง รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนี้ย่อมมีพื้นที่เท่ากันด้วย.

ในรูปเหลี่ยมต่าง ๆ ด้านที่อยู่ตรงกัน เรียกว่า **ด้านที่ได้ลำดับกัน** (Corresponding sides) และมุมที่อยู่ตรงกัน เรียกว่า **มุมที่ได้ลำดับกัน** (Corresponding angles).

เช่นตัวอย่าง



ด้าน AB กับ KL ได้ลำดับกัน

BC กับ LM ,, ,,

CD กับ MN ,, ,,

DE กับ NO ,, ,,

EA กับ OK ,, ,,

มุม A กับ K ,, ,,

B กับ L ,, ,,

C กับ M ,, ,,

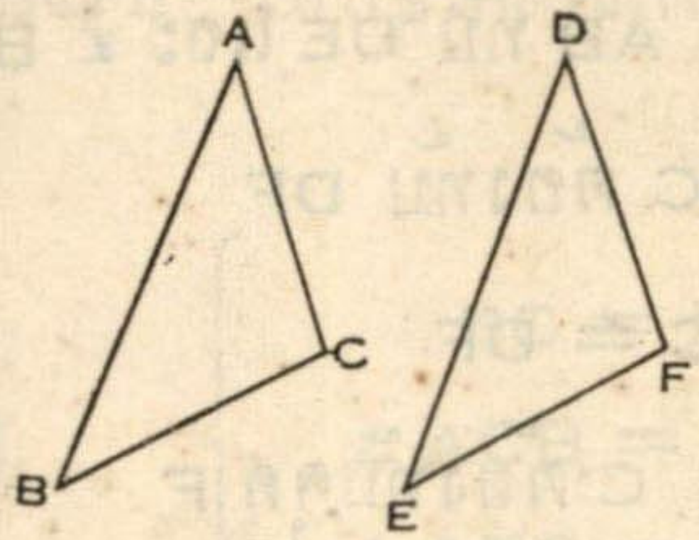
D กับ N ,, ,,

E กับ O ,, ,,

คู่อื่น ๆ นอกจากที่ได้กล่าวไว้แล้วนี้ไม่ใช่ด้าน หรือมุมที่ได้ลำดับกันเลย.

ทฤษฎีบทที่ ๔ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๔)

โจทย์ ถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เท่ากับด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้าน และมุมในระหว่างด้านเท่ากัน เท่ากัน รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้ย่อมเท่ากันทุกประการ.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็นสามเหลี่ยมสองรูป

มีด้าน AB = DE

AC = DF

และ ∠ BAC = ∠ EDF (ทั้งสองมุมนี้ต่างก็เป็นมุมในระหว่างด้านเท่า)

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC = \triangle DEF$ ทุกประการ.

พิสูจน์ ยก $\triangle ABC$ ซ้อนบน $\triangle DEF$ ให้จุด A ทับจุด D และด้าน AB ทับด้าน DE.

$\therefore$ AB = DE

$\therefore$ จุด B ต้องทับจุด E

และเมื่อ AB ทับ DE และ $\angle BAC = \angle EDF$.

$\therefore$ AC ต้องทับ DF

และ $\therefore$ AC = DF

$\therefore$ จุด C ต้องทับจุด F

เมื่อจุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F แล้ว

$\therefore$ BC ต้องทับ EF สนิท

$\therefore$ $\triangle ABC$ ต้องทับ $\triangle DEF$ สนิท

เมื่อทับกันสนิทดีแล้วก็ย่อมเท่ากันทุกประการ

ซ. ต. พ.

ในทฤษฎีบทนี้ เราต้องสังเกตไว้ให้ดีว่า เขา
กำหนดอะไรให้ และเราจะต้องพิสูจน์อะไร.

สิ่งที่เขากำหนดให้ $\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ \text{และ } \angle BAC = \angle EDF \end{cases}$

อาศัยสิ่งที่กำหนดให้เหล่านี้ เราจึงพิสูจน์ได้ว่า
สามเหลี่ยมสองรูป เมื่อซ้อนกันแล้ว ต้องทับกัน
สนิทดี.

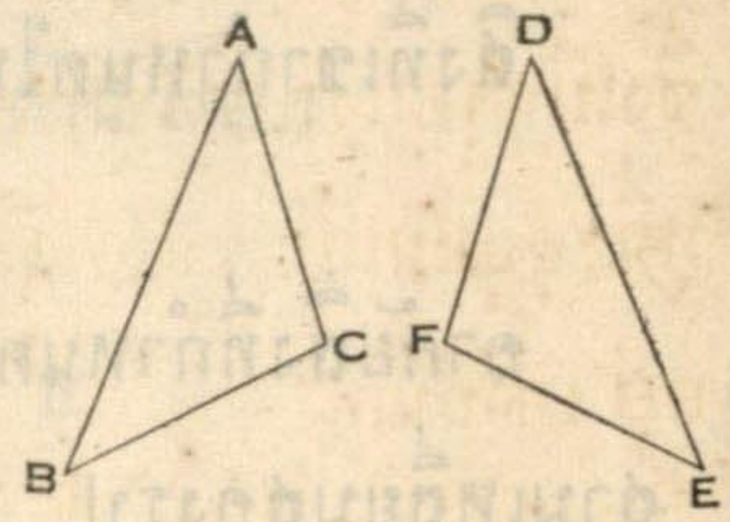
คือ $\begin{cases} BC = EF \\ \angle ACB = \angle DFE \\ \angle ABC = \angle DEF \end{cases}$

และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองก็เท่ากันด้วย.

เวลายกรูปซ้อนกัน ให้เอาจุดทับจุดไว้ก่อน
แล้วจึงเอาด้านทาบด้าน ห้ามไม่ให้ยกด้านทาบ
ด้านก่อนจุดทับจุด เพราะด้านจะเลื่อนไปเลื่อน
มาได้.

จงสังเกตด้วยว่ามุมที่เราพิสูจน์ว่าเท่ากันแล้ว
นั้น อยู่ตรงกันข้ามกับด้านที่เท่ากัน ซึ่งเขา
กำหนดให้.

ถ้ารูปเป็นเช่นนี้ และ
เรามีความประสงค์จะพิสูจน์
ให้เท่ากันทุกประการแล้ว
จงกลับรูปหนึ่งรูปใดให้ถูก



ที่เสียก่อน แล้วจึงซ้อนรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบน
สามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง.

ต่อไปนี้ให้นักเรียนจำไว้ว่า **เส้นแบ่งครึ่ง
ของมุม** หมายความว่าเส้นผ่ามุมออกเป็นสองส่วน
เท่า ๆ กัน.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูป
สามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อม

ค4
516
ก509ว

(ก) แบ่งฐานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

(ข) ตั้งได้ฉากกับฐาน.

๒. กำหนดให้ OC ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB และ P เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่บนเส้น OC จงพิสูจน์ว่า เส้นตรง PA กับ PB เท่ากัน.

๓. สมมติว่า ด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งยาวเท่ากันหมด และมุมทั้งสี่ต่างก็เท่ากับหนึ่งมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุม AC กับ BD ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD นี้เท่ากัน.

๔. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง L, M, และ N, ต่างก็เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CD ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(ก) LM = MN (ข) AM = DM

(ค) AN = AM (ง) BN = DM

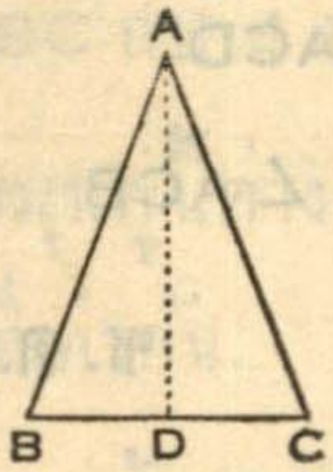
เขียนรูปกำกับการพิสูจน์ข้อละรูป.

(โจทย์ข้อ ๓ กับข้อ ๔ นั้น ครูต้องบอกชื่อลักษณะต่าง ๆ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรก่อนที่จะให้นักเรียนทำ)

๕. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว AB = AC ตัด AB และ AC เอาเพียง AX และ AY ให้ยาวเท่ากัน แล้วลากเส้น BY กับ CX จงพิสูจน์ว่า BY = CX.

ทฤษฎีบทที่ ๕ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๕)

โจทย์ มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็น△หน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AB = AC

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$\angle ABC = \angle ACB$$

สมมติให้ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่ง ∠ BAC และพบฐาน BC ที่จุด D ทำให้ ∠ BAD = ∠ CAD

พิสูจน์วิธีที่ ๑ ในรูป △ BAD กับ △ CAD

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ AD \text{ เป็นด้านร่วมของ } \triangle \text{ ทั้งสองรูป} \\ \text{มุมในระหว่างด้านเท่า } BAD = \text{มุมใน} \end{cases}$$

ระหว่างด้านเท่า CAD.

$\therefore \triangle$ ทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$

นี่ก็คือ $\angle ABC = \angle ACB$

ซ. ต. พ.

พิสูจน์วิธีที่ ๒ พับรูปสามเหลี่ยม ABC ตามรอย AD

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

$\therefore$ AB จึงต้องทับ AC

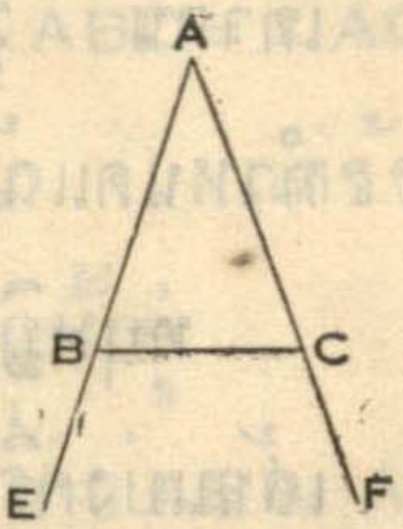
และ $\therefore$ AB = AC

$\therefore$ จุด B ต้องทับจุด C, และ BD ก็ทับ DC

$\therefore \angle ABD$ ทับ $\angle ACD$ สนิท เมื่อทับสนิทดีแล้วก็ย่อมเท่ากัน.

ซ. ต. พ.

บทแทรกที่ ๑ ในรูป △ หน้าจั่ว ABC ซึ่งมีด้าน AB = AC ถ้าเราต่อด้านคู่นี้ออกไปถึง E กับ F มุมภายนอกทั้งคู่ คือ ∠EBC กับ ∠FCB ต้องเท่ากัน เพราะว่ามุมคู่นี้ต่างก็เป็นมุมประกอบของมุมฉาก ของมุมที่เท่ากัน.



บทแทรกที่ ๒ ถ้ารูป △ มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน มุมทั้งสามย่อมเท่ากันหมด.

คำจำกัดความ

รูปหนึ่งรูปใดในวิชาเรขาคณิต ถ้าเราพับตามเส้นเส้นหนึ่งเข้าแล้ว ทำให้ส่วนที่พับเข้าหากันประกบหรือทับกันได้สนิทดี รูปนั้นเราเรียกว่ามี Symmetry และเส้นนั้นเรียกว่าเส้น Symmetry.

นี่ก็คือ ส่วนทั้งสองของรูปนั้นจำต้องมีขนาด

เท่ากัน รูปอย่างเดียวกัน และเมื่อพับตามเส้นที่กำหนดแล้ว รูปทั้งสองต้องหันไปทางเดียวกัน.

ทฤษฎีบทที่ ๕ ก็แสดงให้เห็นว่า △ หน้าจั่วมีเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดเป็นเส้น Symmetry ส่วนรูป △ ด้านเท่านั้น เส้นแบ่งครึ่งมุมใด ๆ ก็เป็นเส้น Symmetry ได้.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้านเท่ากันหมด และ BD เป็นเส้นทะแยงมุม จงพิสูจน์ว่า

(๑) $\angle ABD = \angle ADB$

(๒) $\angle CBD = \angle CDB$

(๓) $\angle ABC = \angle ADC$

๒. ABC กับ DBC เป็นรูป △ หน้าจั่วสองรูปซึ่งอยู่บนฐาน BC ด้วยกัน แต่อยู่ข้างละรูป จง

พิสูจน์ด้วยทฤษฎีบทที่ ๕ ให้เห็นว่า ∠ABD=∠ACD

๓. อย่างเดียวกันกับโจทย์ข้อ ๒ แต่ข้อนี้รูป △ หน้าจั่วอยู่บนฐานข้างเดียวกันทั้งคู่.

๔. ในรูป △ หน้าจั่ว ABC มีด้าน AB = AC. L, M, และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

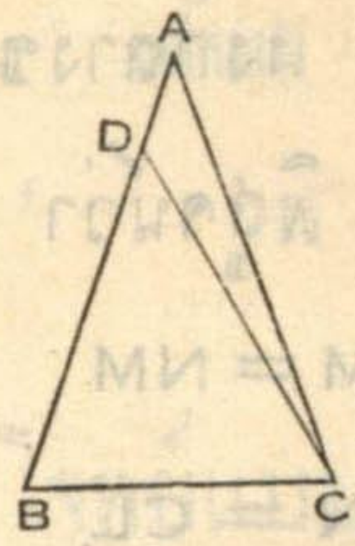
(๑) LM = NM

(๒) BN = CL

(๓) ∠ALM = ∠ANM

ทฤษฎีบทที่ ๖ (ยุคลิดเล่มที่ ๑ บทที่ ๖)

โจทย์ ถ้ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีมุมเท่ากันสองมุม ด้านซึ่งอยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองที่เท่ากันนั้นย่อมเท่ากันด้วย.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็นรูป △ รูปหนึ่ง ซึ่งมี ∠ ABC = ∠ ACB.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่าด้าน AB = AC.

ถ้าด้าน AB กับ AC ยาวไม่เท่ากัน ก็คงต้องยาวกว่ากันอยู่ด้านหนึ่ง สมมติให้ AB เป็นด้านยาว. ตัดด้าน AB เอาแต่ส่วน BD ให้ยาวเท่ากับ AC. ลากเส้น DC.

พิสูจน์ ในรูป △ ABC กับ DBC.

$$\therefore \begin{cases} DB = AC \\ BC \text{ เป็นด้านร่วมของ } \triangle \text{ ทั้งสองรูป} \\ \text{และมุมในระหว่างด้านเท่า } DBC = \text{มุม} \\ \text{ในระหว่างด้านเท่า } ACB. \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DBC$ กับ ABC จึงต้องมีพื้นที่เท่ากัน

(ทฤษฎีบทที่ ๔)

แต่ ส่วนหนึ่ง จะเท่ากับ จำนวนเต็ม ของมัน เองไม่ได้เป็นอันขาด.

$\therefore$ $\triangle DBC$ จะเท่ากับ ABC ไม่ได้.

$\therefore$ ที่สมมติไว้ว่าด้าน AB ยาวกว่าด้าน AC นั้นผิด และถ้าสมมติให้ AC ยาวกว่า AB เราก็จะพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกันว่าผิดอีก และเป็นไปไม่ได้เหมือนกัน.

$\therefore$ ด้าน AB กับ AC ไม่ยาวไม่สั้นกว่ากัน.

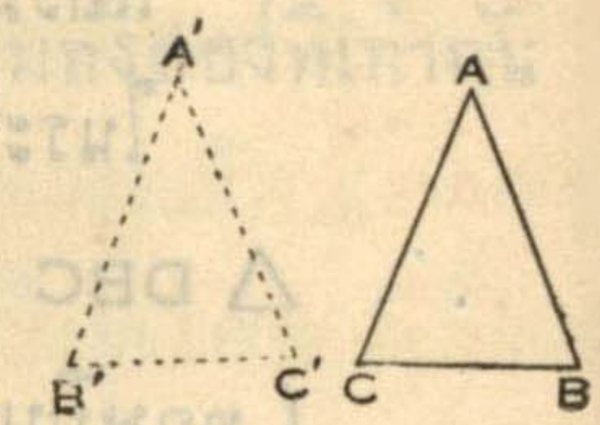
$\therefore$ ด้าน AB กับ AC จึงต้องเท่ากัน.

. ซ. ต. พ.

ทฤษฎีบทที่ ๕ กับทฤษฎีบทที่ ๖

เราอาจทดลองให้เห็นจริงได้ด้วยการตัดกระดาษ

แผ่นหนึ่งให้เท่ากับ △ ABC ที่กำหนดให้ แล้วพลิกรูปที่ตัดกลับเสีย และวางลงบิดช่องที่ตัดกระดาษออกนั้น เราก็จะเห็นได้ว่า △ ที่เรากลับไว้แล้วนั้น บิดช่องกระดาษนั้นพอดีดังเก่า.



สมมติให้ A′B′C′ เป็นรอยของ △ ที่ตัดออกจากกระดาษแผ่นหนึ่ง และ ABC เป็นรูป △ ที่ตัดเอาออกไว้ พลิก △ ABC กลับเสีย.

ตามทฤษฎีบทที่ ๕ ถ้าให้จุด A ทับจุด A′ และจุด C ทับจุด B′ แล้วจุด B ก็จะทับจุด C′.

ตามทฤษฎีบทที่ ๖ ถ้าให้จุด C ทับจุด B′ และจุด B ทับจุด C′ แล้วจุด A ก็จะทับจุด A′.

△ ทั้งสอง แม้ว่ากลับรูปหนึ่งเสีย ก็ยังคงทับ

รอยเดิมได้สนิทดี เพราะฉะนั้นทั้งด้านและมุมทาง
ซ้ายมือ ต่างก็จะเท่ากับด้านและมุมทางขวามือ.

ทฤษฎีบทที่ ๕ กล่าวว่า ใน △ ABC มีด้าน AB =ด้าน AC นี่เราเรียกว่า"โจทย์" (hypothesis) หรือจะเรียกว่า สิ่งที่กำหนดให้ ก็ได้ สิ่งที่เราต้องพิสูจน์ ก็คือ ∠ ABC = ∠ ACB.

ถ้าเรากลับเอาสิ่งที่กำหนดให้ เป็นสิ่งที่เราต้องพิสูจน์ และเอาสิ่งที่ต้องพิสูจน์ มาเป็นสิ่งที่กำหนดให้เราเรียกว่า บทกลับ ของทฤษฎีบทนั้น เช่น

ทฤษฎีบทที่ ๕ สิ่งที่กำหนดให้คือด้าน AB=ด้าน AC
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ∠ ABC = ∠ ACB

ทฤษฎีบทที่ ๖ สิ่งที่กำหนดให้ ∠ ABC = ∠ ACB
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ด้าน AB = ด้าน AC

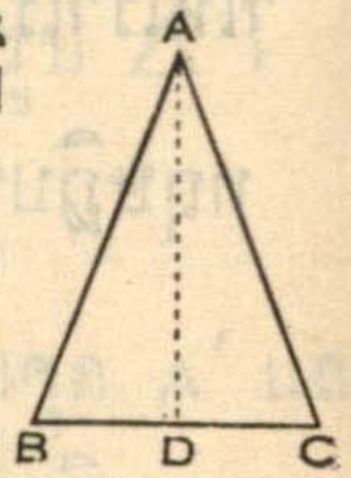
เพราะฉะนั้นทฤษฎีบทที่ ๖ จึงเป็น บทกลับ ของทฤษฎีบทที่ ๕.

ในทฤษฎีบทที่ ๖ เราพิสูจน์ด้วยวิธีอ้อม ซึ่งเป็นวิธีใช้พิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทโดยมาก คือ ถ้าเป็นอย่างนี้ไม่ได้ ก็จำเป็นต้องเป็นอย่างนั้น.

ขอให้เข้าใจว่า ถ้าทฤษฎีบททุก ๆ บท เป็นไปได้จริงตามที่พิสูจน์แล้ว บทกลับของทฤษฎีบทนั้นไม่จำเป็นต้องจริงเสมอไป.

สำหรับทฤษฎีบทที่๖นี้ เมื่อครูสอนนักเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๗ แล้ว จะใช้พิสูจน์ดังต่อไปนี้ก็ได้.

สมมติให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง ซึ่งมี



∠ ABC = ∠ ACB จะต้องพิสูจน์ว่า

AB = AC (อีกนัยหนึ่ง ABC เป็น △ หน้าจั่ว)

พิสูจน์ แบ่งมุม BAC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ด้วยเส้น AD.

ใน △ ABD กับ △ ACD. △

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ (สร้าง)

$\angle ABD = \angle ACD$ (โจทย์บอก)

AD เป็นด้านร่วม.

$\therefore$ $\triangle$ สองรูปนี้เท่ากันทุกประการ

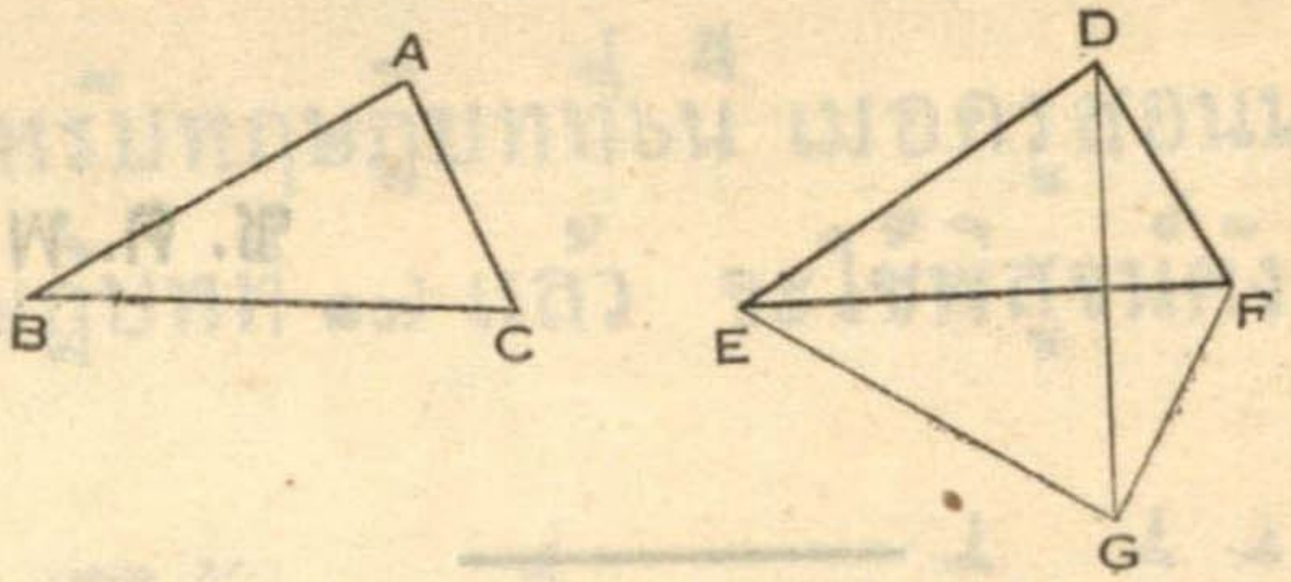
(ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ AB = AC.

ซ. ต. พ.

ทฤษฎีบทที่ ๗ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๔)

โจทย์ ถ้าด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้าน รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นย่อมเท่ากันทุกประการ.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็นรูป △ สองรูป ซึ่งมี AB = DE

AC = DF

BC = EF

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า △ ทั้งสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ.

พิสูจน์ ยก △ ABC ซ้อนบน △ DEF ให้จุด B

ทับจุด E และด้าน BC ทับด้าน EF แต่ให้จุด A อยู่ตรงข้ามกับจุด D (ให้จุด G แทนจุด A)

$\because$ BC = EF ฉะนั้นจุด C จึงต้องทับจุด F

EGF ก็คือ $\triangle$ ABC นั่นเอง.

ลากเส้น DG

$\because$ DE = EG

$\therefore \angle EDG = \angle EGD$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และ $\because$ DF = FG

$\therefore \angle FDG = \angle FGD$

$\therefore \angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD$

นั่นคือ $\angle EDF = \angle EGF \ (= \angle BAC)$

ใน $\triangle$ ABC กับ DEF

$\because$ { AB = DE
AC = DF
มุมในระหว่างด้านเท่า BAC = มุมในระหว่างด้านเท่า EDF (พิสูจน์มาแล้ว) }

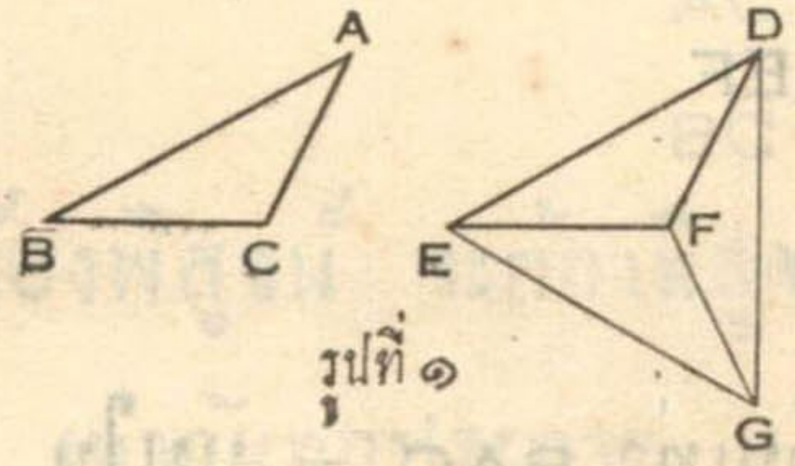
$\therefore \triangle$ ทั้งสองรูปจึงต้องเท่ากันทุกประการ

(ทฤษฎีบทที่ ๔)

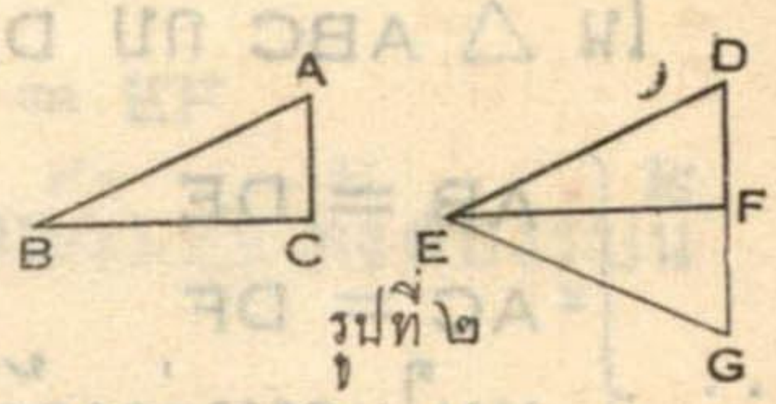
ซ. ต. พ.

ในทฤษฎีบทนี้ เราควรสังเกตไว้ว่า เขากำหนดว่า ด้าน AB = ด้าน ED ด้าน AC = ด้าน DF และ ด้าน BC = EF เราต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$ และพื้นที่ของ $\triangle$ ทั้งสองต้องเท่ากันด้วย.

อนึ่งจงสังเกตด้วยว่า มุมที่เราพิสูจน์ให้เท่ากันนั้น ต่างก็อยู่ตรงข้ามกับด้านที่เท่ากันตามที่กำหนดให้.



รูปที่ ๑



รูปที่ ๒

รูปที่เราพิสูจน์มาแล้ว ด้าน DG อยู่ภายในรูป

△DEF และ GEF ถ้าด้าน DG อยู่ภายนอก
ดังรูปที่ ๑ และด้าน DG ทับด้าน DF กับ FG
ดังรูปที่ ๒ △ ทั้งสองรูปนี้ก็จะเป็นจริงดังได้พิสูจน์
มาแล้ว คือเท่ากันทุกประการเหมือนกัน แต่ที่
รูปจะเป็นเช่นนี้ได้ก็ในเมื่อ △ ทั้งสองเป็น △ มุมป้าน
หรือ △ มุมฉากเท่านั้น เพราะฉะนั้นจึงไม่เป็นการ
จำเป็นที่จะต้องเลือกเอาด้านยาวทับด้านยาวเสมอ
ไป เราจะเอาด้านสั้นทับด้านสั้นบ้างก็คงได้ผลอย่าง
เดียวกัน.

△ สองรูปจะมีมุมเท่ากัน Equiangular (Equi= เท่ากัน, Angular = มุม) มุมต่อมุมได้ ก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสามของรูป △ รูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของ △ อีกรูปหนึ่ง **มุมต่อมุม.**

ถ้าด้านสามด้านของ △ รูปหนึ่งเท่ากับด้านสาม ด้านของ △ อีกรูปหนึ่งด้านต่อด้าน △ ทั้งสองรูปนี้

ก็ต้องมีมุมทั้งสามเท่ากันมุมต่อมุม (Equiangular)

ควรให้นักเรียนตั้งโจทย์เป็นบทกลับของข้อนี้ แสดงให้เห็นว่าบทกลับไม่จำเป็นต้องเป็นจริงด้วย.

(เมื่อนักเรียนได้เรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๗ นี้แล้ว ครูควรจะตั้งต้นสอนบทสร้างที่ ๑ ถึงที่ ๕ กับที่ ๘ บ้าง เพราะว่าบทสร้างเหล่านี้จะช่วยในการพิสูจน์ △ สองรูปว่าเท่ากันทุกประการ)

โจทย์แบบผีกหัด (ทฤษฎีบท)

๑. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากมาจากมุมยอดของ △ หน้าจั่ว ถึงจุดกึ่งกลางของด้านฐาน

(๑) แบ่งมุมยอดออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน และ (๒) ตั้งได้ฉากกับด้านฐาน.

๒. ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าลากเส้นทะแยงมุม AC จงพิสูจน์ว่า (๑) ∠ ABC = ∠ ADC และ (๒) เส้น AC จะแบ่งครึ่ง ∠ BAD และ ∠ BCD.

๓. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน AB = ด้าน CD และด้าน BC = ด้าน AD จง พิสูจน์ว่า ∠ ABC = ∠ ADC.

๔. ABC กับ DBC เป็น △ หน้าจั่วสองรูป ซึ่งตั้งอยู่บนฐาน BC และอยู่ข้างเดียวกัน จงพิสูจน์ ด้วยทฤษฎีบทที่ ๗ ว่า ∠ ABD = ∠ ACD

และถ้า △ สองรูปนี้ อยู่คนละข้างของฐาน BC จงพิสจน์ว่า ∠ ABD = ∠ ACD.

๕. ABC กับ DBC เป็น △ หน้าจั่ว ซึ่งตั้งอยู่บนฐาน BC ข้างละรูป ถ้าลากเส้น AD จงพิสูจน์ ว่าเส้น AD นี้จะแบ่งครึ่ง ∠ BAC และ ∠ BDC.

๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากจากจุดปลาย ของด้านฐานทั้งสองข้างของรูป △ หน้าจั่ว ไปยัง จุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้าม เส้นตรงคู่นี้ ย่อมเท่ากัน.

๗, ในด้านฐานของ △ หน้าจั่วมีจุดสองจุด ซึ่ง

ต่างก็อยู่ห่างจากจุดปลายฐานเป็นระยะทางเท่ากัน จงพิสูจน์ให้เห็นว่า จุดทั้งสองนี้ต่างก็อยู่ห่างจากมุมยอดเป็นระยะทางเท่ากันด้วย.

๘. ถ้าลากเส้นจากจุดกึ่งกลาง ของด้านทั้งสามของ△ด้านเท่าไปถึงกัน △ที่เกิดขึ้นใหม่ต้องเป็น△ด้านเท่าด้วย.

๙. ABC เป็น△หน้าจั่ว ซึ่งมีด้าน AB = ด้าน AC ถ้าแบ่งครึ่ง ∠ABC กับ ∠ACB ด้วยเส้นตรง OB กับ OC. จงพิสูจน์ว่า (๑) BO = CO; (๒) AO ต้องแบ่งมุม BAC ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน.

๑๐. เส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเบี่ยกปูน(Rhombus)ต่างตัดกันเองออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และตั้งได้ฉากกันด้วย (รูปสี่เหลี่ยมขนมเบี่ยกปูน คือสี่เหลี่ยมด้านเท่า ที่ไม่มีมุมฉากเลย)

๑๑. BAC เป็น △ หน้าจั่ว ซึ่งมีด้าน BA = ด้าน CA ต่อด้าน BA ไปถึงจุด E และ CA ไปถึงจุด F ทำให้ด้าน AE = ด้าน AF ถ้าลากเส้น FB กับ EC แล้ว เส้นตรงคู่นี้ต้องยาวเท่ากัน.

โจทย์แบบฝึกหัด (วัดและคำนวณ)

๑. จงสร้างรูป△ABC ให้ด้าน AB ยาว 1·3″ ด้าน BC ยาว 2·0″ และด้าน AC ยาว 2.1″ วัดมุมทั้งสามแล้วหาผลบวกว่าได้กี่องศา.

๒. ในรูป△ABC ด้าน BC ยาว 7.5 ซม. AC ยาว 7.0 ซม. และ AB ยาว 6·5 ซม. จงลากเส้นจากจุด B ไปตั้งได้ฉากกับด้าน AC แล้ววัดดูว่ายาวกี่ซม.

๓. จงสร้าง △ABC ให้ด้าน BC ยาว 7 ซม. ด้าน AC ยาว 6 ซม. และมุม ACB = 65°. จะพิสูจน์ได้อย่างไรว่า△สองรูป ซึ่งมีส่วนต่าง ๆ ดัง

กำหนดให้มีเดียวกันสักวิธีหนึ่ง. ต้องมีขนาดเท่ากัน และรูปอย่างจงคิดหาวิธีทดลองว่าเป็นจริงมาให้ดู

๔. จงสร้าง △ ให้มีด้าน CA ยาว 2″ ด้าน AB ยาว 2.5″ มุม BAC=57° จงวัดด้าน BC มุม ABC และ ACB แล้วสร้าง △ อีกรูปหนึ่ง ให้มีลักษณะตามที่วัดไว้ คือด้าน BC, ∠ ABC และ ∠ ACB ที่วัดด้าน AC, ด้าน AB และมุม BAC. △ สองรูปนี้จะเป็นอย่างไรกัน.

๕. บันไดอันหนึ่งพาดไว้กับหน้าต่างบ้านแห่งหนึ่ง หน้าต่างอยู่สูงจากพื้นดิน 35 ฟุต โคนบันไดอยู่ห่างจากฝาบ้าน 12 ฟุต จงเขียนรูปบันได หน้าต่าง ฝาบ้าน และพื้นดิน สมมติให้ 1 นิ้วแทน 10 ฟุต แล้วจงวัดดูว่า บันไดอันนั้นยาวกี่ฟุต.

๖. ข้าพเจ้าเดินไปทางทิศเหนือได้ 99 ม. แล้วเลี้ยวไปทางทิศตะวันออกอีก 20 ม. จงเขียน

รูปทางเดินของข้าพเจ้า แล้ววัดดูว่า เวลานี้ข้าพเจ้าอยู่ห่างจากที่เดิมเท่าไร (สมมติให้ 1 ซม. แทน 10 ม.)

๗. เมื่อดวงอาทิตย์ขึ้นสูง 42° เงาของเสาธงแห่งหนึ่งยาว 30 ฟุต จงเขียนรูปมาให้ดู สมมติให้ 1 นิ้วแทน 10 ฟุต แล้ววัดดูว่าเสาธงนี้ยาวกี่ฟุต.

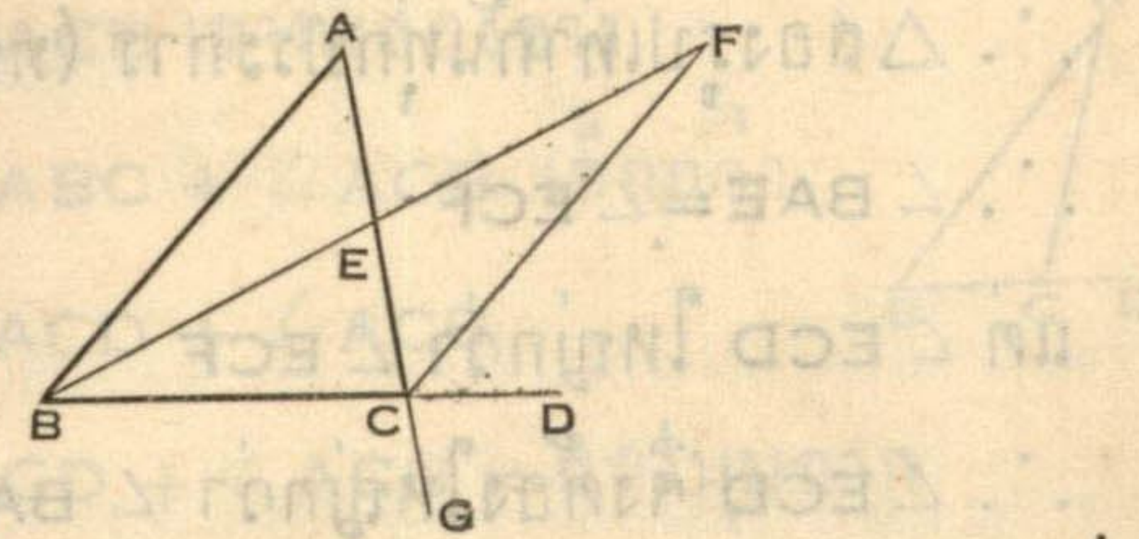
๘. ชายสำรวจทางผู้หนึ่ง เดินจากจุด A ไปทางทิศตะวันออกถึงจุด B สิ้นทาง 150 หลา แล้วเลี้ยวขึ้นไปทางทิศเหนือ ถึงจุด C ได้ทางอีก 300 หลา จากจุด C เขาเดินเลี้ยวไปทางทิศตะวันตกถึงจุด D ได้ทางอีก 450 หลา จงเขียนรูปทางเดินของชายผู้นี้ สมมติให้ 1 นิ้วแทน 100 หลา จุด D จะอยู่ห่างจากจุด A กี่หลา ? วัดมุม DAB ดูว่าได้กี่องศา แล้วบอกว่าจุด D อยู่ทางทิศอะไรของจุด A.

๙. B กับ C เป็นจุดสองจุด อยู่บนฝั่งทะเลห่างกัน 260 หลา A เป็นเรือลำหนึ่ง ซึ่งทอดสมออยู่กับที่ ถ้า $\angle CBA = 33^\circ$, $\angle BCA = 81^\circ$ จงเขียนรูปมาให้ดู แล้วหาระยะทางระหว่างเรือลำนั้นกับจุด B และ C ถ้า BC อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกัน จงหาระยะทางที่ใกล้ที่สุดจากเรือ A มาชั้นบก.

๑๐. ในการสำรวจพื้นที่แห่งหนึ่ง จำเป็นต้องทราบระยะทางว่าจุด A ถึงจุด B ยาวเท่าไร เผอิญในที่นั้นมีบึงใหญ่ขวางหน้าเสีย ฉะนั้นจึงวัดตรงไปที่เดียวไม่ได้ ชายผู้สำรวจจึงต้องเลือกจุด C อีกจุดหนึ่ง ซึ่งเขาวัดระยะทางจากจุด A และ B ถึงจุด C ได้สะดวก เมื่อวัดแล้วจึงทราบว่า ด้าน AC ยาว 245 หลา และ BC ยาว 320 หลา มุม $ACB = 42^\circ$ จงเขียนรูป แล้ววัดดูว่า ระยะจาก A ถึง B ยาวกี่หลา?

ทฤษฎีบทที่ ๙ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๖)

โจทย์ ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกย่อมใหญ่กว่ามุมภายในมุมหนึ่งซึ่งอยู่ตรงข้าม.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็นรูป△ซึ่งมีด้าน BC ต่อออกไปถึงจุด D.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า ∠ACD ซึ่งเป็นมุมภายนอกย่อมใหญ่กว่ามุมภายในคือ ∠ABC หรือ ∠BAC ที่อยู่ตรงข้าม.

สมมติให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC ลาก เส้น BE แล้วต่อออกไปถึงจุด F ทำให้ EF = BE ลากเส้น FC.

พิสูจน์ ในรูป △ AEB กับ CEF

$$\left.\begin{array}{l} AE = EC \\ BE = EF \\ \angle AEB = \angle CEF \end{array}\right\} \therefore$$

(ทฤษฎีบทที่ ๓)

$\therefore$ △สองรูปเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่๔)

$\therefore \angle BAE = \angle ECF$

แต่ $\angle ECD$ ใหญ่กว่า $\angle ECF$

$\therefore \angle ECD$ จึงต้องใหญ่กว่า $\angle BAE$

นี่ก็คือ $\angle ACD$ ใหญ่กว่า $\angle BAC$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราต่อด้าน AC ถึงจุด G และลากเส้นจากจุด A ถึงจุดกึ่งกลางของด้าน BC เราก็อาจจะพิสูจน์ได้ว่า $\angle BCG$ ใหญ่กว่า $\angle ABC$.

แต่ $\angle BCG$ = มุมตรงข้าม ACD (ทฤษฎีบทที่ ๓)

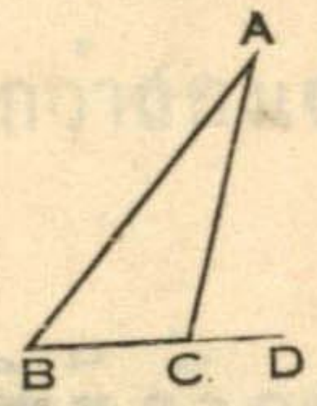
$\therefore \angle ACD$ จึงต้องใหญ่กว่า $\angle ABC$ ด้วย

ช. ต. พ.

บทแทรกที่ ๑ มุมสองมุมของ△ใด ๆ รวมกันเข้าย่อมเล็กกว่าสองมุมฉาก.

∴ ∠ ABC เล็กกว่า ∠ ACD (ตามที่ได้พิสูจน์มาแล้ว)

บวก ∠ ACB เข้าทั้งสองข้าง



∴ ∠ ABC + ∠ ACB เล็กกว่า

∠ ACD + ∠ ACB

แต่ ∠ ACD + ∠ ACB = สองมุมฉาก

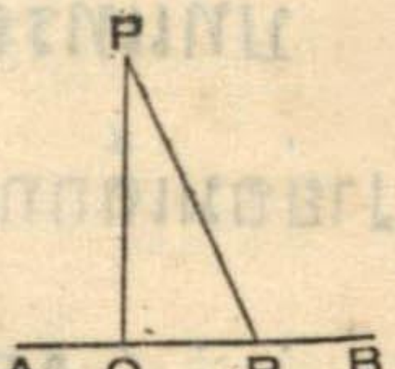
(ทฤษฎีบทที่ ๑)

∴ ∠ ABC + ∠ ACB จึงเล็กกว่าสองมุมฉาก

บทแทรกที่ ๒ △ ใด ๆ ต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยที่สุดสองมุม เพราะว่าถ้ามุมหนึ่ง เป็นมุมป้านหรือมุมฉากตามบทแทรกที่ ๑ แล้วอีกมุมหนึ่งก็ต้องเล็กกว่าหนึ่งมุมฉาก.

บทแทรกที่ ๓ ลากเส้นจากจุดภายนอกให้ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้เส้นเดียวเท่านั้น.

สมมติว่าเราลากเส้น PQ กับ PR จากจุด P ให้ตั้งได้ฉากกับ AB ฉะนั้น ∠PQR กับ ∠PRQ ของ△PQR ต่างก็เท่ากับหนึ่งมุมฉาก ซึ่งเป็นจริงไม่ได้.



โจทย์แบบฝึกหัด

๑. จงพิสูจน์บทแทรกที่ ๑ ของทฤษฎีบทที่ ๘ โดยลากเส้นจากจุด A ไปยังจุดอีกจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ในฐาน BC (ถ้าจำเป็นก็ต่อด้าน BC ออกไป)

๒. ABC เป็น△รูปหนึ่ง D เป็นจุดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ภายใน△นั้น ถ้าลากเส้น BD กับ CD จงพิสูจน์ว่ามุม BDC ย่อมใหญ่กว่ามุม BAC

(๑) อนุญาตให้ต่อด้าน BD ไปพบด้าน AC หรือ

(๒) อนุญาตให้ลากเส้น AD และต่อออกไปให้พบฐาน BC.

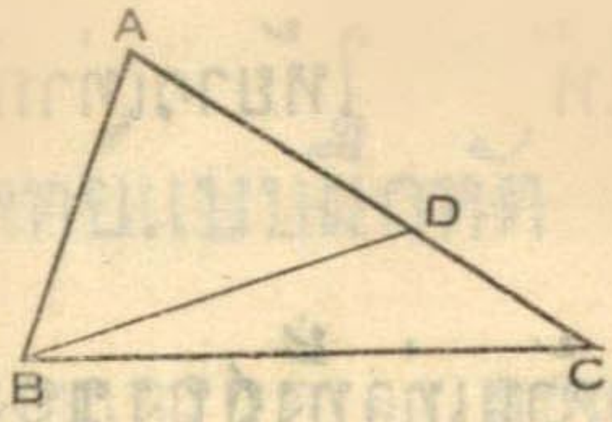
๓. ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของ △ ออกไปทั้งสองข้าง มุมภายนอกทั้งคู่ที่เกิดใหม่รวมกันย่อมใหญ่กว่าสองมุมฉาก.

๔. จะลากเส้นตรงจากจุดภายนอกไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้ยาวเท่ากันเกินกว่าสองเส้นไม่ได้.

๕. ถ้าต่อด้านเท่าทั้งสองของ △ หน้าจั่วออกไปทางฐาน มุมภายนอกที่เกิดขึ้นใหม่นั้นต่างก็เป็นมุมบ้าน.

ทฤษฎีบทที่ ๙ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๙)

โจทย์ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาวของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมใหญ่กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านสั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็น△ซึ่งมีด้าน AC ยาวกว่าด้าน AB.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า ∠ ABC ใหญ่กว่า ∠ ACB.

ตัดด้าน AC เอาแต่ส่วน AD ให้ยาวเท่ากับ AB ลากเส้น BD.

พิสูจน์ ∵ AB = AD

∴ ∠ ABD=∠ ADB (ทฤษฎีบทที่ ๕)

แต่มุมภายนอก ADB ของ△ BDC ใหญ่กว่ามุม

ภายในที่อยู่ตรงข้าม คือ ∠ DCB

นี่ก็คือ ∠ ACB นั่นเอง

∴ ∠ ABD ใหญ่กว่า ∠ ACB

∴ ∠ ABC ยิ่งใหญ่กว่า ∠ ACB

ซ. ต พ.

ครูควรจะอธิบายหัวข้อข้างล่างนี้ให้นักเรียนเห็น จริงเสียก่อนแล้วจึงสอนทฤษฎีบทที่ ๑๐ คือเมื่อเราจะเปรียบของสองสิ่ง สิ่งหนึ่งจะต้องใหญ่หรือยาวกว่าอีกสิ่งหนึ่ง หรือมิฉะนั้นก็ต้องเล็กหรือสั้นกว่าอีกสิ่งหนึ่ง ถ้าแม้ว่าไม่ใหญ่กว่ากันและไม่เล็กกว่ากัน ของสองสิ่งนั้นย่อมเท่ากัน จงใช้คำถามเหล่านี้ทวนไปทวนมา จนกว่านักเรียนจะเข้าใจดี.

๑. นำของสิ่งหนึ่งไปเปรียบกับสิ่งอื่น ถ้าไม่ใหญ่กว่าและไม่เท่ากัน ของสิ่งนั้นจะเป็นอย่างไรกับอีกสิ่งหนึ่ง ?

ตอบ ของสิ่งนั้นต้องเล็กกว่า.

๒. ถ้าไม่เล็กกว่า และไม่เท่ากัน ของสิ่งนั้นจะเป็นอย่างไรกับอีกสิ่งหนึ่ง?

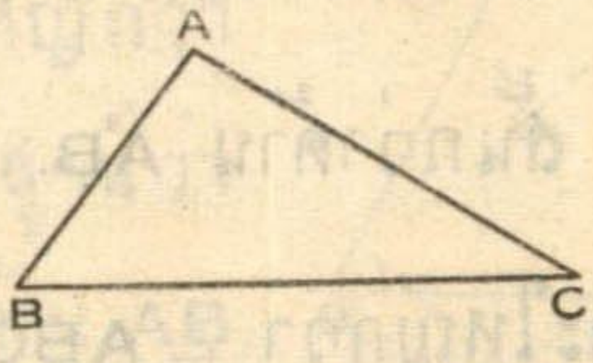
ตอบ ของสิ่งนั้นต้องใหญ่กว่า.

๓. ถ้าไม่ใหญ่กว่า และไม่เล็กกว่า ของสองสิ่งนั้นจะเป็นอย่างไรกัน ?

ตอบ ของสองสิ่งนั้นต้องเท่ากัน.

ทฤษฎีบทที่ ๑๐ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๑๙)

โจทย์ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมยาวกว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็น △ ซึ่งมี ∠ ABC ใหญ่กว่า ∠ ACB.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า ด้าน AC ยาวกว่าด้าน AB.

พิสูจน์ ถ้าแม้ว่าด้าน AC ไม่ยาวกว่าด้าน AB ด้าน AC ก็ต้องเท่ากับด้าน AB หรือมิฉะนั้นก็ต้องสั้นกว่า.

ถ้าด้าน AC = ด้าน AB.

∠ ACB จะเท่ากับ ∠ ABC (ทฤษฎีบทที่ ๕)

นี่แย้งกันกับสิ่งที่กำหนดให้ไว้แต่เดิมจึงเป็นไป

ไม่ได้.

∴ ด้าน AC ไม่เท่ากับด้าน AB.

ถ้าด้าน AC สั้นกว่าด้าน AB.

∠ ACB ก็จะใหญ่กว่า ∠ ABC (ทฤษฎีบทที่ ๘)

นี่ก็แย้งกันกับสิ่งที่กำหนดให้ไว้แต่เดิมจึงเป็นไป

ไม่ได้อีก.

∴ ด้าน AC ไม่สั้นกว่าด้าน AB.

เมื่อด้าน AC ไม่เท่ากับด้าน AB และไม่สั้น

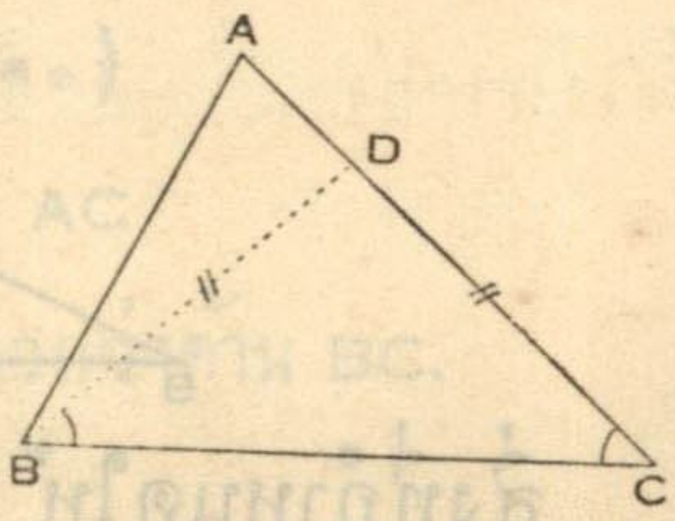
กว่าแล้ว,

ด้าน AC ก็ต้องยาวกว่าด้าน AB,

ช. ต. พ.

สำหรับทฤษฎีบทที่๑๐นี้เมื่อครูสอนนักเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๑ แล้ว จะใช้พิสูจน์ดังต่อไปนี้ก็ได้.

สมมติให้ ABC เป็น △ ซึ่งมี ∠ABC ใหญ่กว่า ∠ACB จะต้องพิสูจน์ว่าด้าน AC ยาวกว่าด้าน AB



พิสูจน์ ที่จุด B ทำมุม DBC = มุม DCB.

∴ ด้าน BD = ด้าน DC (ทฤษฎีบทที่ ๖)

ในรูป △ ABD.

AD + BD ยาวกว่า AB (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

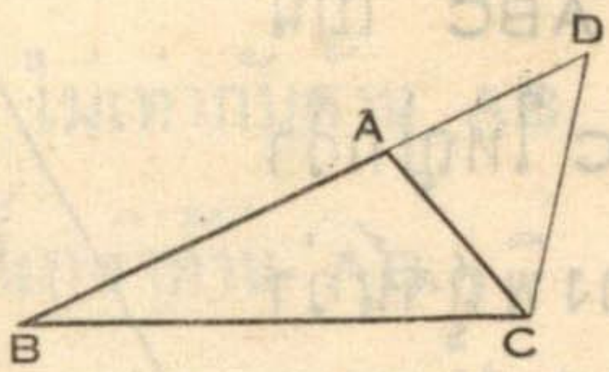
แต่ AD + BD = AD + DC = AC

∴ AC ต้องยาวกว่า AB

ซ. ศ. พ.

ทฤษฎีบทที่ ๑๑ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๒๐)

โจทย์ ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าย่อมยาวกว่าด้านที่สาม.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็น △.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า ด้านคู่หนึ่งคู่ใดของ △ นี้บวกกันเข้าต้องยาวกว่าด้านที่สาม.

ใน △ ABC ด้าน BC เป็นด้านยาวที่สุด จึงควรพิสูจน์ว่า ด้าน AB บวกด้าน AC ยาวกว่าด้าน BC.

ต่อด้าน BA ถึงจุด D ทำให้ AD = AC.

ลากเส้น CD

พิสูจน์ ∵ AD = AC.

∴ ∠ ACD = ∠ ADC (ทฤษฎีบทที่ ๕)

แต่ ∠ BCD ใหญ่กว่า ∠ ACD.

$\therefore$ $\angle$ BCD จึงใหญ่กว่า $\angle$ ADC.

นี่ก็คือ $\angle$ BDC นั่นเอง.

$\therefore$ ด้าน BD จึงต้องยาวกว่าด้าน BC

(ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

แต่ด้าน BD = AB + AC

$\therefore$ ด้าน AB + AC จึงยาวกว่าด้าน BC.

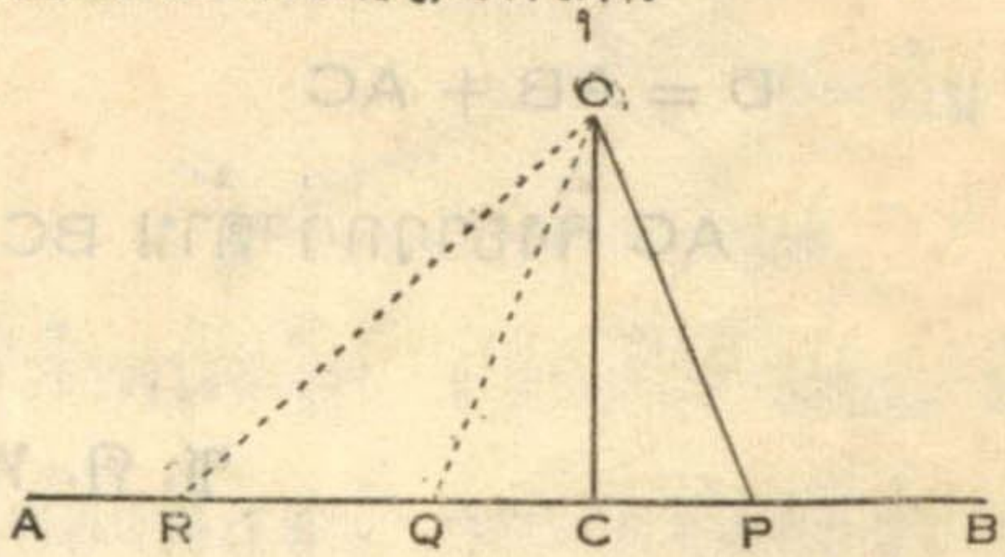
ซ. ต. พ.

นักเรียนควรสังเกตไว้ว่า โจทย์พิสูจน์ข้อนี้เราใช้เป็นโจทย์แบบฝึกหัดก็ได้ ความจริงก็เห็นแจ้งประจักษ์ในตัวเองอยู่แล้ว เช่น เราเดินจากจุด B ไปถึงจุด C ตามเส้นตรง BC ทางเดินของเราก็จะสั้นกว่าเราเดินจากจุด B ไปจุด A แล้วเลี้ยวลงมาจุด C เหตุฉะนี้เราจึงกล่าวได้ว่า

ระยะทางที่สั้นที่สุดในระหว่างจุดสองจุด ก็คือเส้นตรงที่ลากไปจากจุดหนึ่งถึงจุดอีกจุดหนึ่ง.

ทฤษฎีบทที่ ๑๒

โจทย์ เส้นตรงทั้งหลายที่ลากไปจากจุดที่กำหนดให้ ถึงเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ เส้นตั้งได้ฉากย่อมเป็นเส้นสั้นที่สุด.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ O เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ภายนอก AB ลากเส้น OC กับ OP ให้เส้น OC ตั้งได้ฉากกับ AB.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า OC สั้นกว่า OP

พิสูจน์ ใน $\triangle$ OCP เพราะว่า $\angle$ OCP = $\llcorner$ฉ

$\therefore$ $\angle$ OPC ต้องเล็กกว่า $\llcorner$ฉ (บทแทรกของทฤษฎีบทที่ ๙)

คือ $\angle$ OPC เล็กกว่า $\angle$ OCP.

$\therefore$ OC จึงต้องสั้นกว่า OP (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)
ในทำนองเดียวกัน OC ต้องสั้นกว่า OQ หรือ OR
$\therefore$ OC จึงเป็นเส้นสั้นที่สุดในจำพวกเส้นตรงที่
ลากจากจุด O ถึงจุด AB.

ซ. ต พ.

บทแทรกที่ ๑ เป็นบทกลับ โดยที่เส้น OC เป็นเส้นที่สั้นที่สุด เพราะฉะนั้น เส้น OC จึงต้องตั้งได้ฉากกับเส้น AB.

บทแทรกที่ ๒ ถ้าเส้น OQ กับ OP ที่ลากมายัง AB ต่างก็อยู่ห่างจากจุด C เป็นระยะทางเท่ากัน เส้น OQ ย่อมเท่ากับเส้น OP.

$\therefore$ $\triangle OQC = \triangle OPC$ ทุกประการ
(ทฤษฎีบทที่ ๔)
$\therefore$ OQ = OP

บทแทรกที่ ๓ ในระหว่างเส้นเอน OR กับ OQ

ถ้า OR ตัดเส้น AB ห่างจากจุด C เป็นระยะทาง
มากกว่า OQ. OR ต้องยาวกว่า OQ.

∴ ∠ OQC เป็นมุมแหลม

∴ ∠ OQR จึงต้องเป็นมุมป้าน.

∴ ∠ OQR ย่อมใหญ่กว่า ∠ ORQ

∴ OR ก็ต้องยาวกว่า OQ

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. ด้านทะแยงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะต้องเป็นด้านยาวที่สุด.

๒. มุมในระหว่างด้านยาวที่สุดกับด้านอีกด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมต้องเป็นมุมแหลมเสมอ.

๓. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมไปถึงจุดปลายทั้งสองของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมนั้น เส้นตรงสองเส้น

๕. นิรวมกันเข้า ย่อมสั้นกว่าด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นรวมกัน.

๔. ถ้าต่อฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ออกไปจนถึงจุด D จงพิสูจน์ว่า AD ต้องยาวกว่า AB หรือ AC.

๕. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้าน AB เป็นด้านสั้นที่สุดและ CD เป็นด้านยาวที่สุด จงพิสูจน์ว่า

(๑) ∠DAB ต้องใหญ่กว่า ∠DCB

(๒) ∠ABC ต้องใหญ่กว่า ∠ADC

๖. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้าด้าน AC สั้นกว่าด้าน AB เส้นตรงใดๆที่ลากมาจากจุด A ถึงฐาน BC ต้องสั้นกว่าด้าน AB เสมอ.

๗. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง OB เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC และ OC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB ถ้าด้าน AB ยาวกว่าด้าน AC, เส้น OB จะยาวกว่าเส้น OC ด้วย.

๘. ผลต่างของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ย่อมสั้นกว่าด้านที่สาม.

๙. ระยะทางจากจุดจุดหนึ่งมาถึงมุมทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าต้องยาวกว่าครึ่งหนึ่ง ของผลบวกของด้านทั้งสาม.

๑๐. ผลบวกของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ต้องยาวกว่าผลบวกของเส้นทะแยงมุม.

๑๑. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีเส้น AX แบ่งครึ่งมุม BAC มาพบฐาน BC ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า ด้าน AB ยาวกว่า BX และ CA ยาวกว่า CX เมื่อพิสูจน์เสร็จแล้ว จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๑๑ โดยอาศัยทฤษฎีบทนี้.

๑๒. ระยะทางจากจุดหนึ่ง ภายในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ไปถึงมุมทั้งสาม รวมกันเข้า ย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสาม.

๑๓. ระยะทางจากจุดจุดหนึ่งมาถึงมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันเข้า ต้องยาวกว่าผลบวกของเส้นทะแยงมุม โจทย์ข้อนี้จะเป็นจริงเสมอไปหรือไม่ ถ้าไม่จริงจงชี้ตัวอย่างมาให้ดู.

๑๔. ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าต้องยาวกว่าสองเท่าของเส้นมีเดียน (Median) ซึ่งแบ่งด้านที่เหลืออยู่ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

(ให้ต่อเส้นมีเดียนแล้วดำเนินวิธีสร้างอย่างทฤษฎีบทที่ ๘)

๑๕. ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลบวกของเส้นมีเดียนย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสาม.

เส้นขนาน

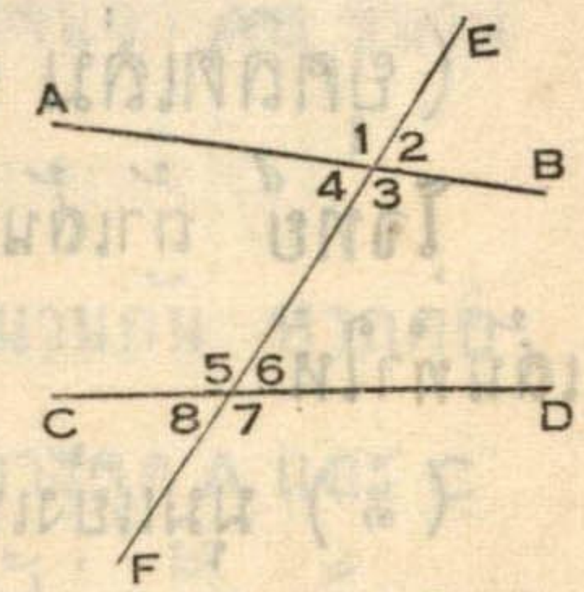
คำจำกัดความ

เส้นตรงขนานคือเส้นตรงสองเส้นหรือหลายเส้นซึ่งอยู่บนที่ราบอันเดียวกัน แม้จะลากเส้นต่อออกไปทางปลายข้างหนึ่งข้างใด เส้นตรงเหล่านี้ก็จะไม่รู้จักบรรจบกันเลย. ขอให้จำไว้ว่า เส้นตรงขนานต้องอยู่บน พื้นที่ราบอันเดียวกัน เช่นเส้นตรงเส้นหนึ่งอยู่บนโต๊ะ อีกเส้นหนึ่งอยู่บนพื้น ถ้าลากเส้นต่อออกไปทางปลายข้างหนึ่งข้างใด ก็อาจจะไม่รู้จักบรรจบกัน แต่ว่าไม่จำเป็นต้องขนานกัน เพราะว่าทั้งสองเส้นไม่ได้อยู่บนที่ราบอันเดียวกัน.

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันจะขนานกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งด้วยกันไม่ได้.

หรืออีกนัยหนึ่ง จากจุดจุดหนึ่ง เราลากเส้นตรงให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น (ของท่านเพฺลแฟร์ Playfair)

คำจำกัดความ ถ้าเส้นตรง EF ตัดเส้นตรง AB กับ CD จะทำให้เกิดมุมขึ้นแปดมุม เพื่อให้สะดวกแก่การจำชื่อมุมเหล่านี้ 1, 2, 7, 8 เรียกว่า มุมภายนอก มุม 3,4,5,6 เรียกว่ามุมภายใน มุม 4 กับมุม 6 ต่างก็เป็นมุมแย้งกัน มุม 3 กับมุม 5 ต่างกเป็นมุมแย้งกัน มุม 2เป็นมุมภายนอก มุม 6 เป็นมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัด EF. มุม 7 เป็นมุมภายนอกมุม 3 เป็นมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ข้างเดียวกันของเส้นตัด EF. มุม 8 เป็นมุมภายนอก มุม 4 เป็นมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ข้างเดียวกันของเส้นตัด EF. มุม 1 เป็นมุมภายนอก มุม 5 เป็นมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ข้างเดียวกันของเส้นตัด EF.



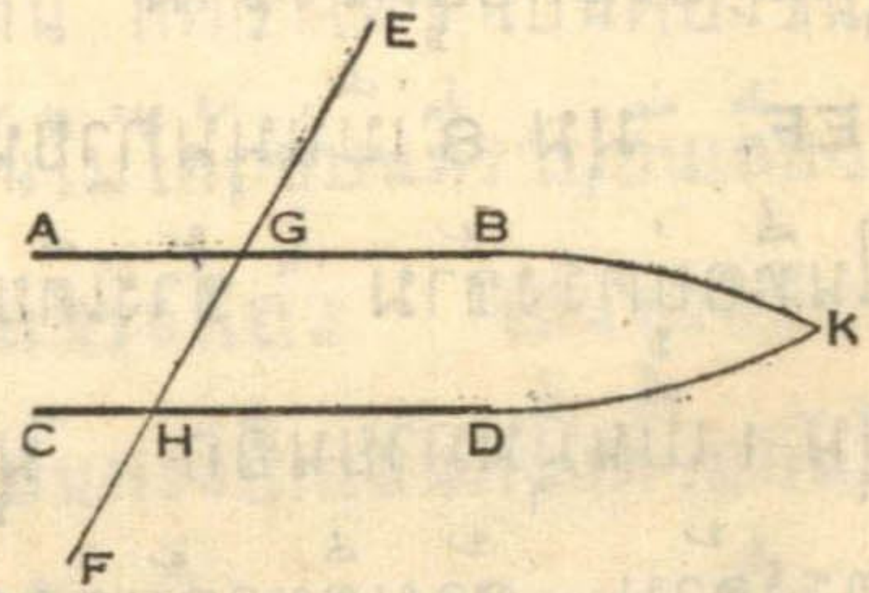
ทฤษฎีบทที่ ๑๓

(ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๒๗ กับ ๒๙)

โจทย์ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีกสองเส้นทำให้

(๑) มุมแย้งเท่ากัน หรือ (๒) มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัด หรือ (๓) มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก.

ข้อหนึ่งข้อใดในสามข้อนี้ เส้นตรงคู่นั้นต้องขนานกัน.



สิ่งที่กำหนดให้ (๑) สมมติให้เส้น EGHF ตัดเส้นตรง AB ที่จุด G และ CD ที่จุด H ทำให้มุม

แย้ง AGH = มุมแย้ง GHD.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AB ขนาน กับ CD.

พิสูจน์ ถ้า AB กับ CD ไม่ขนานกัน หากต่อ ตรงออกไปทางจุด B และ D หรือทางจุด A และ C ก็คงจะบรรจบกัน ถ้าอาจเป็นไปได้เช่นนั้น ก็ลอง ต่อออกไปทางจุด B และ D บรรจบกันที่จุด K.

GKH ก็จะเป็น△ ซึ่งมีด้าน KG ต่อออกไป ถึง A.

∴ มุมภายนอก AGH ก็ต้องใหญ่กว่ามุมภาย ในที่อยู่ตรงข้าม คือ ∠GHK.

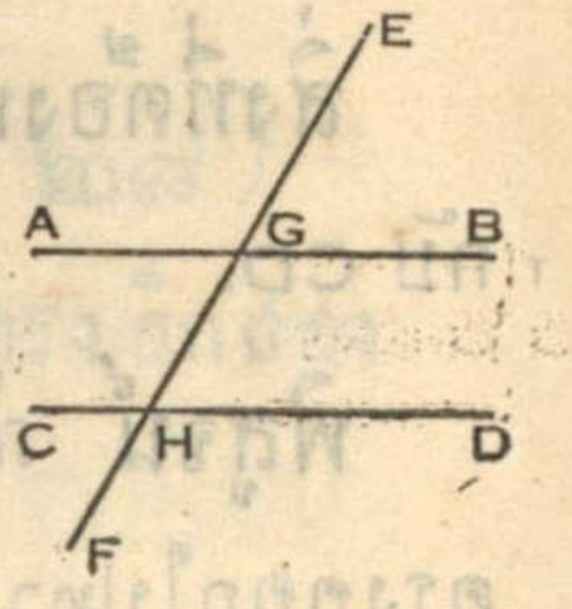
แต่ตามโจทย์บอกว่ามุมทั้งสองนี้เท่ากัน เพราะ ฉะนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ตามที่สมมติไว้.

∴ AB กับ CD ถ้าต่อออกไปทางจุด B และ D จะบรรจบกันไม่ได้.

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจะต่อเส้นตรงทั้งคู่นี้ออก

ไปทางจุด A และ C ก็จะบรรจบกันไม่ได้.

∴ AB จึงต้องขนานกับ CD



สิ่งที่กำหนดให้ (๒) สมมติให้มุมภายนอก EGB = มุมภายในที่ตรงข้ามข้างเดียวกัน คือ GHD.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AB ขนานกับ CD.

พิสูจน์ ∵ ∠EGB = ∠GHD

และ ∠EGB = ∠ตรงข้าม AGH

(ทฤษฎีบทที่ ๓)

∴ ∠GHD = ∠AGH

และมุมทั้งสองนี้ต่างก็เป็นมุมแย้ง

∴ AB จึงต้องขนานกับ CD

สิ่งที่กำหนดให้ (๓) สมมติให้

∠BGH + GHD = สองมุมฉาก.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AB ขนาน
กับ CD.

พิสูจน์ $\therefore \angle BGH + \angle GHD = 2$ ฉ

และ $\angle BGH + \angle AGH = 2$ ฉ

(ทฤษฎีบทที่ ๑)

$\therefore \angle BGH + \angle GHD = \angle AGH + \angle BGH$

หักมุม $\angle$ BGH ออกเสียทั้งสองข้าง

$\therefore \angle GHD = \angle AGH$

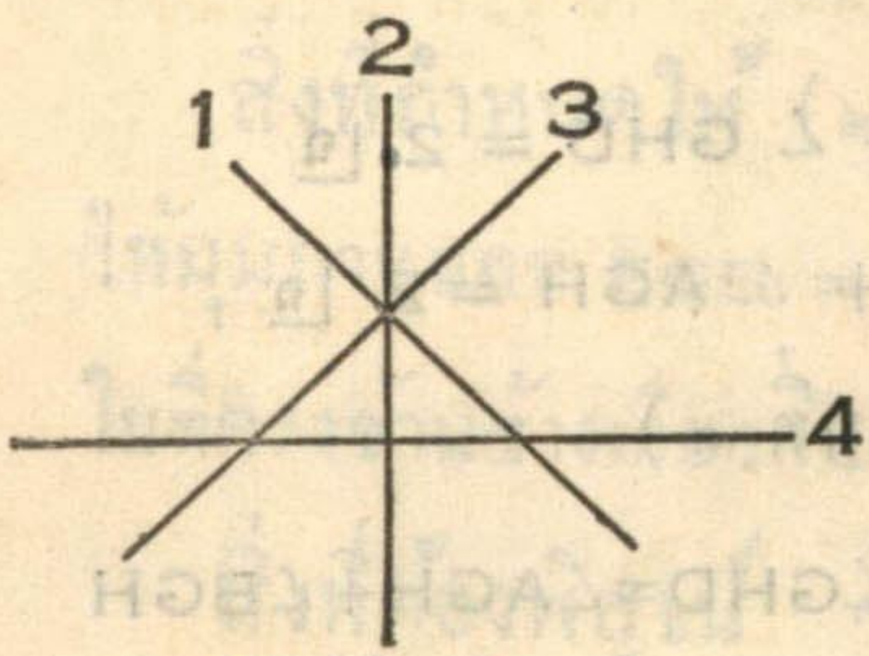
และมุมทั้งสองนี้ต่างก็เป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ AB จึงต้องขนานกับ CD.

ซ. ต. พ.

คำไข เส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้าลากไปตัดเส้นตรง
ชุดหนึ่งที่กำหนดให้ เส้นตรงเส้นนั้นเรียกว่า **เส้นตัด**
(Transversal)

ตามรูปหน้า ๖๗ เส้น EGHF ซึ่งเราลากไปตัดเส้นตรง AB กับ CD ที่กำหนดให้ เส้น EGHF คือเส้นตัด เส้นตรง 1, 2, 3, ไม่ใช่เส้นตัดเส้น 4 เป็นเส้นตัดเส้นเดียวเท่านั้น.



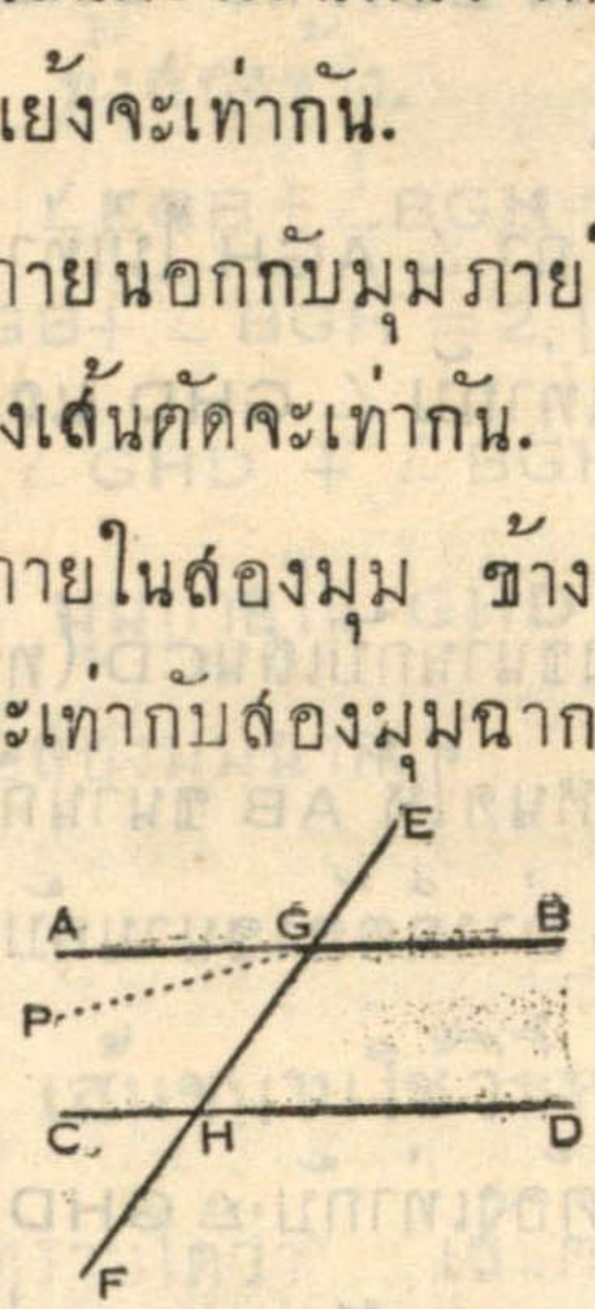
ทฤษฎีบทที่ ๑๔ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๒๙)

โจทย์ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง

(๑) มุมแย้งจะเท่ากัน.

(๒) มุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัดจะเท่ากัน.

(๓) มุมภายในสองมุม ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเข้าจะเท่ากับสองมุมฉาก.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้เส้น EGHF ตัดเส้นขนาน AB กับ CD

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

(๑) มุมแย้ง AGH กับ GHD เท่ากัน.

(๒) มุมภายนอก EGB เท่ากับมุมภายใน

GHD ที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัด.

(๓) มุมภายใน BGH กับ GHD รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก.

พิสูจน์ (๑) ถ้า ∠ AGH ไม่เท่ากับ ∠ GHD สมมติให้ ∠ PGH เท่ากับ ∠ GHD และเป็นมุมแย้งกันด้วย.

∴ เส้น PG ต้องขนานกับเส้น CD (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

แต่โจทย์กำหนดให้ AB ขนานกับ CD.

∴ AG กับ PG ต่างก็ต้องขนานกับ CD ซึ่งเป็นจริงไม่ได้.

∴ ∠ AGH จึงต้องเท่ากับ ∠ GHD

คือมุมแย้ง AGH กับ GHD เท่ากัน.

(๒) ∴ ∠ EGB = ∠ ตรงข้าม AGH (ทฤษฎีบทที่ ๓)

และ ∠ AGH = ∠ แย้ง GHD (ตามที่พิสูจน์มาแล้ว)

∴ ∠ ภายนอก EGB = ∠ ภายใน GHD ที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกัน.

∠ (๓) ∵ ∠EGB = ∠GHD (ตามที่พิสูจน์มาแล้ว) เอา ∠BGH บวกเข้าทั้งสองข้าง.

∴ ∠EGB + ∠BGH = ∠GHD + ∠BGH

แต่ ∠EGB + ∠BGH = 2 ∟ฉ (ทฤษฎีบทที่๑)

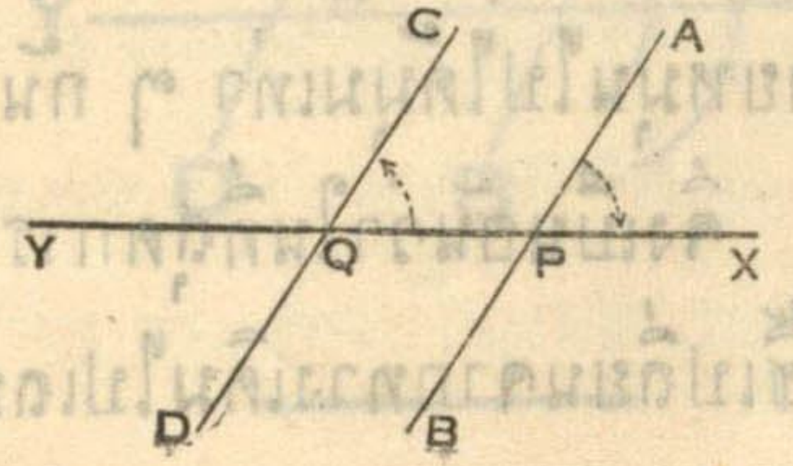
∴ ∠GHD + ∠BGH = 2 ∟ฉ ด้วย.

คือ มุมภายใน GHD กับ BGH รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก.

ซ. ต. พ.

เส้นขนานใช้วิธีหมุน

การที่จะทราบได้ว่า เส้นตรงชี้ไปทางไหนนั้น ต้องอาศัยมุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นตรงเส้นนั้น กับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้.



เช่นเส้นตรง AB ถ้าไปเกี่ยวข้องกับเส้นตรง YX ที่กำหนดให้ เราก็จะทราบได้ว่า เส้นตรง AB ชี้ไปทางไหน ด้วยอาศัยรู้มุม APX.

สมมติให้ AB กับ CD ขนานกัน และตามที่เราได้เรียนมาแล้วว่า มุมภายนอก APX = มุมภายใน CQX ที่อยู่ตรงข้าม.

คือ AB กับ CD ต่างก็ทำให้เกิดมุมกับเส้น YX เท่ากัน นี่ก็ทำให้เราเห็นว่า เส้นขนานตรงย่อมชี้ไปทางเดียวกัน จะต่างกันก็แต่ ที่ตั้ง.

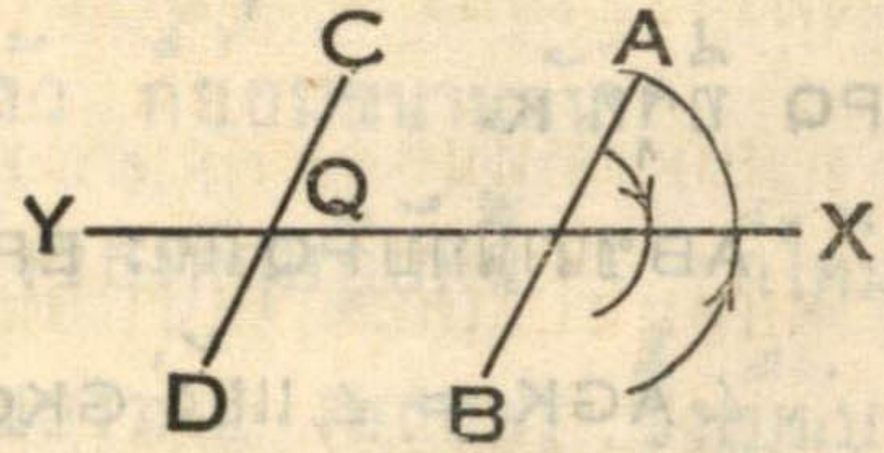
เช่นสมมติให้ AB หมุนรอบจุด P ผ่านมุม APX ไปทับเส้น XY แล้วให้เส้น AB หมุนรอบจุด Q ไปในทางตรงข้ามกับที่ได้หมุนไปแล้ว จนทับเส้น CD ด้วยการหมุนสองครั้งนี้จะทำให้ AB ทับเส้น CD โดยหมุนไปได้มุมเท่า ๆ กัน แต่หมุนไปคนละทาง จึงเป็นอันว่าในที่สุดการหมุนไม่ได้ทำให้เส้น AB ชี้เปลี่ยนจากทางเดิมไปเลย.

สมมติให้เส้น AB ในรูปข้างต้นหมุนไม่ได้ และ Q ก็เป็นจุดเคลื่อนที่ไม่ได้ CD เป็นเส้นที่หมุนได้รอบจุด Q และเส้น YQPX เป็นเส้นผ่านจุด Q.

เมื่อหมุนเส้น CD ไป จะต้องมีที่ตั้งเพียงแห่งเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $\angle CQX = \angle APX$.

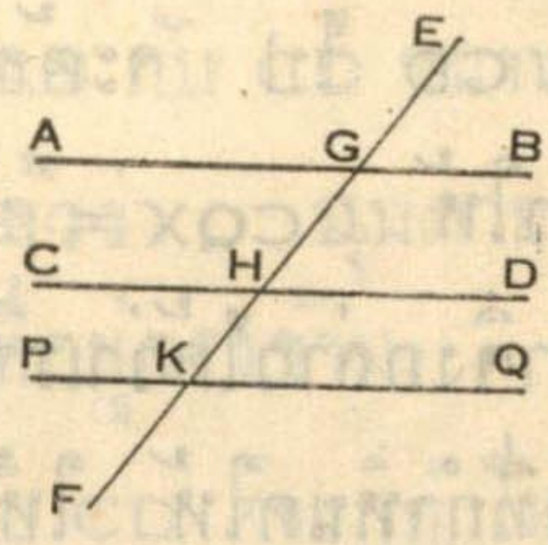
เหตุฉะนี้ เราจึงกล่าวได้ว่าเราอาจลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งจุดใดที่กำหนดให้ ให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่งเส้นใดก็ได้.

ถ้า AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง การหมุนจาก A ไปถึง B และจาก B ไปถึง A เรียกว่าหมุนคนละทาง (จงดูหัวลูกศร)



ทฤษฎีบทที่ ๑๕ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๓๐)

โจทย์ เส้นตรงทั้งหลาย ที่ตัดกับเส้นตรงเส้นเดียวกัน ย่อมขนานซึ่งกันและกันด้วย.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้เส้นตรง AB กับ CD ตัดกับ PQ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AB ขนานกับ CD.

ลากเส้น EF ให้ตัด AB ที่จุด G ตัด CD ที่จุด H และตัด PQ ที่จุด K.

พิสูจน์ ∵ AB ขนานกับ PQ และ EF เป็นเส้นตัด

∴ ∠AGK = ∠แย้ง GKQ.

และ ∵ CD ขนานกับ PQ และ EF เป็นเส้นตัด

$\therefore$ ∠ ภายนอก GHD = ∠ ภายใน GKQ
ที่อยู่ตรงข้าม.
$\therefore$ ∠AGK = ∠GHD และเป็นมุมแย้งกัน
$\therefore$ AB กับ CD จึงต้องขนานกัน.

ซ. ต. พ.

นักเรียนจงสังเกตไว้ว่า ถ้า PQ อยู่ในระหว่าง AB กับ CD ทฤษฎีบทนี้ไม่จำเป็นต้องพิสูจน์เลย เพราะว่าเมื่อ AB ไม่บรรจบกับ PQ, CD ก็ไม่บรรจบกับ PQ ด้วย และเพราะว่า AB กับ CD ต่างก็ขนานกับ PQ ซึ่งอยู่ระหว่างกลาง ฉะนั้น AB กับ CD จะบรรจบกันอย่างไรได้ เมื่อเส้นทั้งสองไม่บรรจบกันแล้ว ก็ย่อมขนานกัน.

ความจริงของทฤษฎีบทนี้ ก็ได้มาจากสิ่งที่เห็นจริงแล้วของท่าน เพลแฟร์ ซึ่งเป็นบทกลับของทฤษฎีบทนี้.

เพราะว่าถ้า AB กับ CD ไม่ขนานกัน เมื่อต่อออกไปก็ย่อมจะต้องบรรจบกัน เมื่อเป็นเช่นนี้ จะเกิดเป็นเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันเอง และต่างก็จะขนานกับเส้นที่สามด้วยซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น AB กับ CD จึงไม่บรรจบกัน AB กับ CD ก็ต้องขนานกัน.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. ในรูปของทฤษฎีบทที่ ๑๕ ถ้า $\angle EGB = 55^\circ$, $\angle GHC$, $\angle HKQ$, $\angle QKF$ จะมีมุมละกี่องศา ?

๒. เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างก็ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงเส้นเดียวกัน ย่อมขนานกันหมด.

๓. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานสองเส้นหรือหลาย ๆ เส้น และตั้งได้ฉากกับเส้นหนึ่งเส้นใดแล้ว เส้นตรงเส้นนั้นย่อมตั้งได้ฉากกับเส้นอื่น ๆ ด้วย.

๔. ถ้าแขนของมุมหนึ่งขนานกับแขนของอีกมุมหนึ่ง แขนต่อแขน มุมคู่นี้ย่อมเท่ากัน หรือมิฉะนั้นรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก.

๕. เส้นตรง AB กับ CD ต่างก็แบ่งครึ่งกันที่จุด O ถ้าลากเส้น AC กับ BD เส้นตรงคู่นี้ย่อมขนานกัน.

๖. ถ้าเราลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง ให้ขนานกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นตรงเส้นนี้กับด้านข้างทั้งสองของรูปสามเหลี่ยมย่อมเท่ากัน.

๗. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ในเส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่ง ให้ขนานกับแขนข้างใดข้างหนึ่งของมุมนั้น รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

๘. X เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่บนฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ลากเส้นตรงจากจุด X ให้

ตั้งได้ฉากกับฐาน BC แล้วให้เลยไปตัดด้าน AB ที่ Y และบรรจบกับด้าน CA ซึ่งต่อออกไปถึงจุด Z จงพิสูจน์ว่า AYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

๙. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งแบ่งมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสองมุมเท่าๆกัน และขนานกับด้านที่อยู่ตรงข้าม จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมรูปนี้คือรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

๑๐. เส้นตรงที่ลากมาจากจุดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ในเส้นแบ่งครึ่งมุม ให้ขนานกับแขนทั้งสอง และไปบรรจบที่แขนของมุมนั้น เส้นตรงเหล่านี้ต้องเท่ากัน และรูปนี้ต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า (ครูยังไม่ควรให้นักเรียนทำจนกว่าจะเรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๒๐ เสียก่อน.

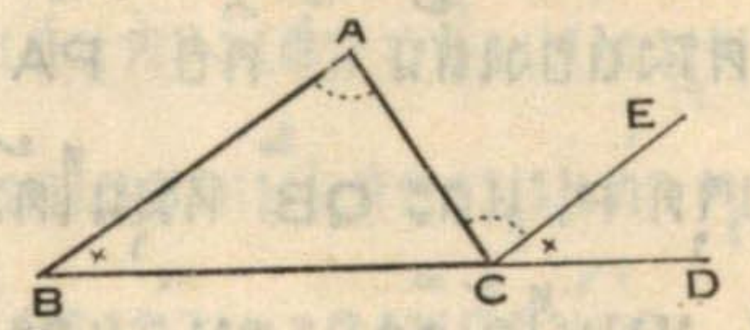
๑๑. เส้นตรง AB บรรจบกับเส้นตรง CD ที่จุด D ถ้าเราแบ่งครึ่งมุมประชิดทั้งคู่ออกด้วยเส้นตรงอีกสองเส้น แล้วลากเส้น YXZ จากจุด X ซึ่งอยู่

บนเส้น CD ให้ขนานกันกับเส้น AB ไปจนบรรจบเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองนั้นที่จุด Y กับ Z, จงพิสูจน์ว่า XY ต้องเท่ากับ XZ.

๑๒. มีเส้นตรงสองเส้น คือ PA กับ QB. PA หมุนได้รอบจุด P, และ QB หมุนได้รอบจุด Q ในหนึ่งนาที PA หมุนได้ 12 รอบ และ QB หมุนได้ 10 รอบ ถ้าเส้นคู่นี้ขนานกันอยู่ และปลายเส้นชี้ไปทางเดียวกัน เราหมุนพร้อมกัน เป็นเวลานานเท่าไร เส้นตรงคู่นี้จะขนานกันอีก (๑) ให้ปลายเส้นอยู่ตรงกันข้าม (๒) ให้ปลายเส้นอยู่ข้างเดียวกัน.

ทฤษฎีบทที่ ๑๖ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๓๒)

โจทย์ มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าต้องเท่ากับสองมุมฉาก.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$\angle ABC + \angle BCA + CAB = 2 \text{ ฉ}$$

ต่อฐาน BC ไปถึงจุด D และลากเส้น CE ให้ขนานกับ AB.

พิสูจน์ $\because$ AB กับ CE ขนานกัน และ AC เป็นเส้นตัด.

$\therefore$ มุมแย้ง ACE = มุมแย้ง CAB

และ $\because$ AB กับ CE ขนานกัน, BD เป็นเส้นตัด

∴ มุมภายนอก ECD = มุมภายใน ABC
ที่อยู่ตรงข้าม.

∴ มุมภายนอกทั้งหมดคือ ACD = มุมภาย
ในที่อยู่ตรงข้ามทั้งสองมุม คือ

∠ CAB กับ ∠ ABC

เอามุม BCA บวกเข้าทั้งสองข้าง

∴ ∠ ACD + ∠ BCA = ∠ CAB + ∠ ABC + ∠ BCA

แต่มุมประชิด ACD กับ BCA รวมกัน = 2 ∟ฉ

∴ ∠ CAB, ∠ ABC, ∠ BCA รวมกันจึง = 2 ∟ฉ

ซ. ต. พ.

เนื่องในการพิสูจน์ของทฤษฎีบทข้อนี้ เราควร
จะบัญญัติความจริงไว้อีกข้อหนึ่ง คือ

ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมออกไป
มุมภายนอกที่เกิดขึ้นย่อมเท่ากับผลบวกของมุมภาย
ในที่อยู่ตรงข้าม.

คือ ∠ ภายนอก ACD = ∠ CAB + ∠ ABC.

ความจริงที่ได้มาจากทฤษฎีบทที่ ๑๖

๑. ถ้า A, B และ C แทนจำนวนองศาของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง.

$$A + B + C = 180^\circ$$

๒. ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง มุมต่อมุม มุมที่เหลืออยู่ของรูปหนึ่งจะเท่ากับมุมที่เหลืออยู่ของอีกรูปหนึ่ง.

๓. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุมแหลมสองมุมรวมกันเข้าย่อมเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

๔. ถ้ามุมมุมหนึ่ง ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของมุมอีกสองมุม รูปสามเหลี่ยมรูปนี้ต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

๕. ผลบวกของมุมของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ย่อมเท่ากับสี่มุมฉาก.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. จงพิสูจน์ว่ามุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต่างก็เท่ากับ $\frac{2}{3}$ ของมุมฉากหรือ 60°.

๒. มุมเท่าของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ต่างก็เท่ากับ 45°.

๓. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมหนึ่ง 36° อีกมุมหนึ่ง 123° จงหาจำนวนองศาของมุมที่เหลืออยู่ และวัดดูว่าจะเป็นจริงหรือไม่.

๔. ในรูปสามเหลี่ยม ABC, $\angle B = 111^\circ$, $\angle C = 42^\circ$ จงหา $\angle A$ แล้ววัดสอบดู.

๕. รูปสามเหลี่ยม ABC มีฐาน BC ต่อออกไปถึงจุด D ถ้ามุมภายนอก $ACD = 134^\circ$ และมุม $BAC = 42^\circ$ มุมภายในที่เหลืออยู่นั้นจะเป็นมุมละกองศา?

๖. รูปในทฤษฎีบทที่ ๑๖ ถ้า $\angle ACD = 118^\circ$

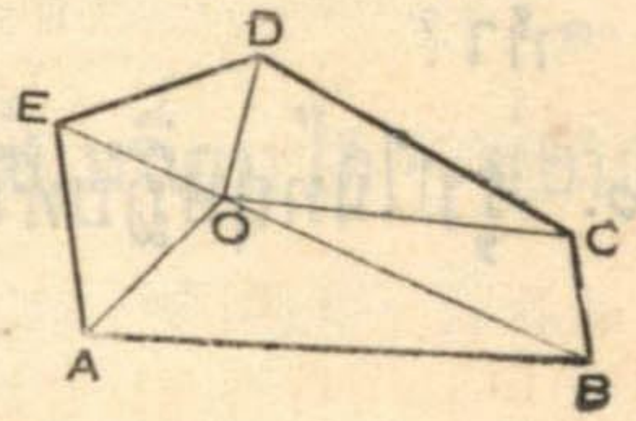
และ $\angle B = 51^\circ$ จงหา $\angle A$ และ $\angle C$ แล้ววัดดูว่าจะเป็นจริงหรือไม่.

๗. จงพิสูจน์ว่ามุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้า ย่อมเท่ากับสองมุมฉาก ด้วยวิธีลากเส้นตรงจากจุดมุมยอด ให้ขนานกับฐานของรูปสามเหลี่ยม.

๘. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งได้ฉากกับเส้นตรงอีกสองเส้น เส้นต่อเส้น มุมแหลมในระหว่างเส้นตรงคู่แรกจะเท่ากับมุมแหลมในระหว่างคู่ที่ ๒.

บทแทรกที่ ๑ มุมภายในทั้งสิ้นของรูปเหลี่ยมที่มีด้านเป็นเส้นตรงบวกเข้ากับสี่มุมฉาก จะได้จำนวนมุมฉากทั้งสิ้นเป็นสองเท่าของจำนวนด้านของรูปนั้น.

สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABCDE เป็นรูปเหลี่ยมที่ด้านเป็นเส้นตรง มี n ด้าน



จะต้องพิสูจน์ว่ามุมภายในทั้งสิ้น รวมกับสี่มุมฉาก
$= 2n$ มุมฉาก.

ให้ O เป็นจุดภายในจุดหนึ่ง ลากเส้น OA, OB, OC, OD, OE. รูปเหลี่ยมเดิมก็จะแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม n รูป และมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $= 2$ ∟ฉ

∴ มุมทั้งสิ้นของ △ ทั้งหมดรวมกัน $= 2n$ ∟ฉ
แต่มุมทั้งสิ้นที่อยู่รอบจุด O $= 4$ ∟ฉ
∴ มุมภายในทั้งสิ้นของรูปเหลี่ยมรวมเข้ากับ
4 ∟ฉ $= 2n$ ∟ฉ

ซ. ต. พ.

คำจำกัดความ รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า (Regular polygon) คือ รูปที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน และมุมก็เท่ากันหมดทุกมุม.

ถ้า D เป็นจำนวนองศาของมุมหนึ่ง ๆ ของรูป

หลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมี n ด้าน ผลที่ได้จากการพิสูจน์ก็จะเป็นดังนี้

$$n \times D + 360^\circ = n \times 180^\circ$$

โจทย์ตัวอย่าง

๑. รูปต่อไปนี้มีมุมมุมละกี่องศา?

(๑) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า (Regular hexagon)

(๒) รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า (Regular octagon)

(๓) รูปสิบเหลี่ยมด้านเท่า (Regular decagon)

(n หมายความว่า จำนวนด้าน จะมีค่าเท่าไร ๆ ก็ได้)

โจทย์แบบฝึกหัดทฤษฎีบทที่ ๑๖

(ใช้วิธีคำนวณและวิธีวัด)

๑. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นสองเท่ามุม A และมุม C เป็นสามเท่ามุม A มุมของสามเหลี่ยมรูปนี้มีมุมละกี่องศา?

๒. สามเหลี่ยมหน้าจั่วข้างต่างนี้มีมุมกางมุมละกี่องศา?

(ก) มุมที่ฐานมุมหนึ่งมุมใดเป็นสองเท่ามุมยอด.

(ข) มุมที่ฐานมุมหนึ่งมุมใดเป็นสี่เท่ามุมยอด.

๓. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าต่อฐานออกไปทั้งสองข้าง มุมภายนอกวัดได้ 94° กับ 126° จงหามุมยอดว่ามีกี่องศา? สร้างรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ แล้ววัดว่ามุมยอดจะได้เท่านั้นจริงหรือไม่?

๔. ผลบวกของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม $= 162°$ และผลลบ $= 60°$ จงหาจำนวนองศาของมุมทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปนี้.

๕. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมหนึ่ง $= 84°$ และอีกมุมหนึ่ง $= 62°$.

(๑) จงหาจำนวนองศาของมุมยอด.

(๒) จงหาจำนวนองศาของมุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองที่ฐานไปบรรจบกัน ให้

สร้างรูปและวัดดูว่า จะได้เท่านั้นจริงหรือไม่?

๖. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B = 74° และมุม C = 62° ถ้าต่อด้าน AB และ AC ออกไป จงหาจำนวนองศาของมุมที่เกิดขึ้นด้วยเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกทั้งสองบรรจบกัน ให้สร้างรูปและวัดดูว่าจะได้เท่านั้นจริงหรือไม่?

๗. รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุม $114\frac{1}{2}^\circ$, 50° และ $75\frac{1}{2}^\circ$ จงหามุมที่สี่.

๘. PQRS คือรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง $\angle Q$ = สองเท่าของ $\angle P$, $\angle R$ = สามเท่าของ $\angle P$ และ $\angle S$ = สี่เท่าของ $\angle P$ รูปสี่เหลี่ยมรูปนี้มีมุมละกี่องศา?

๙. รูปห้าเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุม 40°, 78°, 122° และ 135° จงหามุมที่ห้า.

๑๐. มุมหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีจำนวน n ด้าน ย่อมมี $\frac{2(n-2)}{n}$ มุมฉาก.

(๑) จงพิสูจน์ด้วยบทแทรกที่ ๑.

(๒) จงพิสูจน์ด้วยการลากเส้นจากมุมหนึ่งมุมใดไปยังมุมอื่น (เว้นแต่มุมทั้งสองที่อยู่ถัดจากมุมที่เราลากเส้น) ซึ่งจะบังเกิดรูปสามเหลี่ยม $(n-2)$ รูป.

๑๑. รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าเหล่านี้ มีกี่ด้าน ? ถ้า

(ก) มุมหนึ่ง $= 108^\circ$

(ข) มุมหนึ่ง $= 156^\circ$

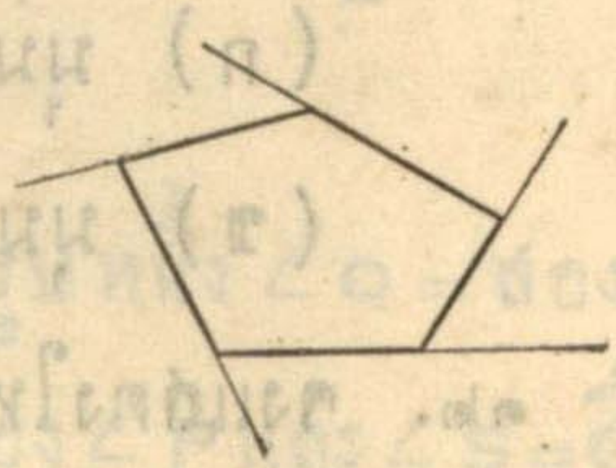
๑๒. จงแสดงให้เห็นว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่าที่มาเรียงติดต่อกันเข้าแล้ว จะทำให้เกิดเป็นพื้นที่ราบได้สนิทก็แต่ (๑) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (๒) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (๓) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่า (Regular hexagon) เท่านั้น.

คำแนะนำ ในจำพวกรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่าเหล่านี้ ต้องมีมุมที่หารสี่มุมฉากได้ลง

ตัว และอาศัยโจทย์ข้อ ๑๐ มุมเหล่านี้มุมหนึ่ง เท่ากับ $2\frac{(n-2)}{n}$ แล้วหาค่าของ n ให้นักเรียนเขียนรูปให้ดูด้วย.

บทแทรกที่ ๒ ถ้าด้านทุกๆด้านของรูปด้านเส้นตรง (Rectilneal figure) ไม่มีมุมยื่นเข้าข้างในเลย แม้ต่อด้านออกไปตามลำดับแล้ว มุมภายนอกทั้งหมดที่เกิดขึ้นย่อมเท่ากับสี่มุมฉาก.

พิสูจน์วิธีที่ ๑ สมมติว่า



รูปนี้มี n ด้าน เพราะฉะนั้น ย่อมมี n มุม ที่มุมหนึ่งๆของรูปนี้จะเกิดมุมประชิดมุมละสองมุม คือ มุมภายนอกและมุมภายในรวมกันเข้า = สองมุมฉาก.

∴ รูปนี้มี n มุม ผลบวกของมุมภายนอกรวมกันเข้ากับผลบวกของมุมภายในจึงต้อง $= 2n$ ∟ฉ

นี่คือ ผลบวกของมุมภายนอก + ผลบวกของมุมภายใน $= 2n$ ∟ฉ

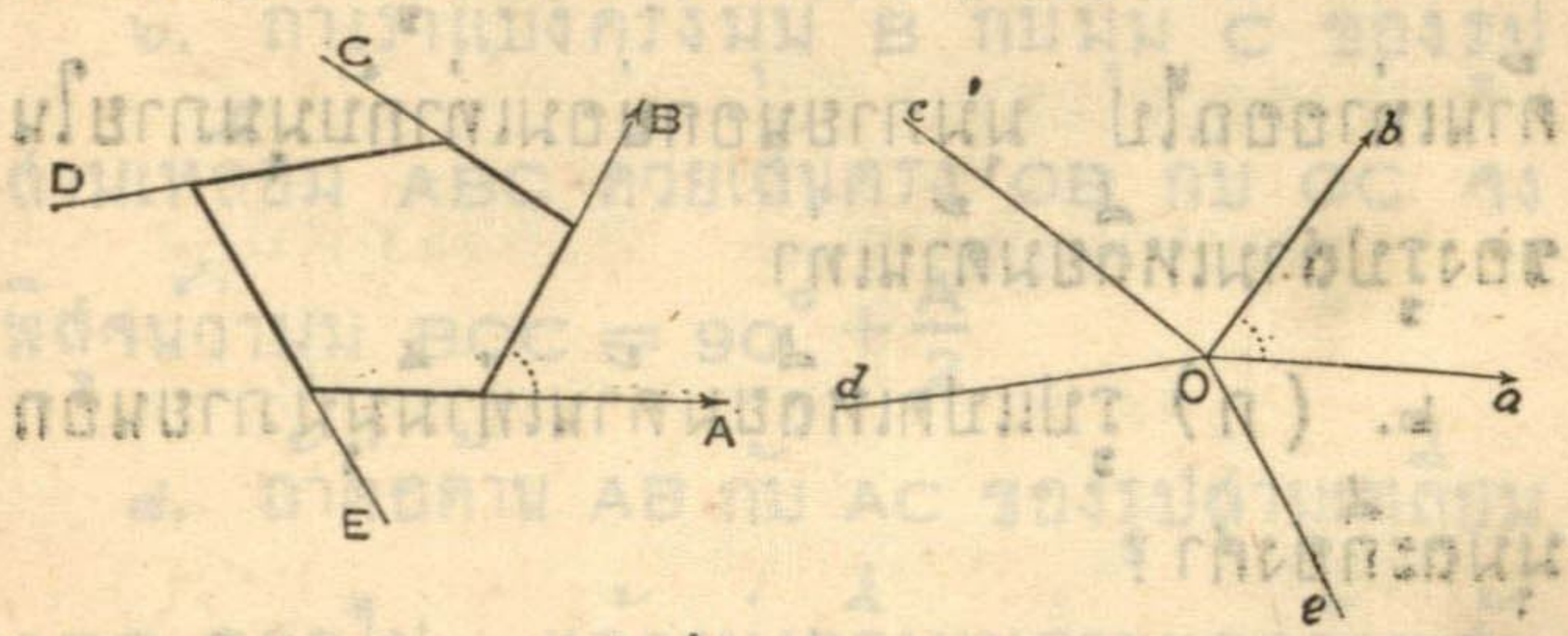
แต่ผลบวกของมุมภายใน + 4 ∟ฉ = 2 n ∟ฉ

(โดยบทแทรกที่ ๑)

∴ ผลบวกของมุมภายนอกจึงต้อง = 4 ∟ฉ

ซ. ต. พ.

พิสูจน์วิธีที่ ๒



ให้ O เป็นจุดจุดหนึ่ง ลากเส้น Oa ขนานกับเส้น A, Ob ขนานกับเส้น B, Oc ขนานกับเส้น C, Od ขนานกับเส้น D, และ Oe ขนานกับเส้น E.

มุมภายนอกในระหว่างด้าน A กับด้าน B = ∠aOb

และมุมภายนอกอื่น ๆ ต่างก็ = $\angle boc$, $\angle cod$, $\angle doe$, $\angle eoa$ ตามลำดับ.

∴ ผลบวกของมุมภายนอก=ผลบวกของมุมทั้งสิ้นที่รวมอยู่รอบจุด o = สี่มุมฉาก.

โจทย์แบบฝึกหัด

๑. ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าออกไป มุมภายนอกย่อมเท่ากับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

๒. (ก) รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมภายนอกมุมละกี่องศา ?

(ข) รูปสิบเหลี่ยมด้านเท่า มีมุมภายนอกมุมละกี่องศา ?

๓. ถ้ามุมภายนอกทุกๆมุมของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าต่างก็เท่ากับ (ก) 30° (ข) 24° รูปเหล่านี้จะมีรูปละกี่ด้าน ?

๔. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตากผ่านเส้นตรงขนานคู่หนึ่ง เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในซึ่งอยู่ข้างเดียวของเส้นตัดย่อมบรรจบกันเป็นมุมฉาก.

๕. ถ้าต่อฐานของรูปสามเหลี่ยมออกไปทั้งสองข้าง จงแสดงให้เห็นว่า มุมภายนอกทั้งสองรวมกันลบด้วยมุมยอด = สองมุมฉาก.

๖. ถ้าเราแบ่งครึ่งมุม B กับมุม C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วยเส้นตรง OB กับ OC จงพิสูจน์ว่ามุม $BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

๗. ถ้าต่อด้าน AB กับ AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกไป แล้วแบ่งครึ่งมุมภายนอกด้วยเส้นตรง OB กับ OC จงพิสูจน์ว่า $BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$

๘. ในรูปสี่เหลี่ยม เส้นแบ่งครึ่งของมุมคู่หนึ่งที่อยู่เคียงกัน จะบรรจบกันเป็นมุม เท่ากับครึ่งของผลบวกของมุมที่ยังเหลืออยู่.

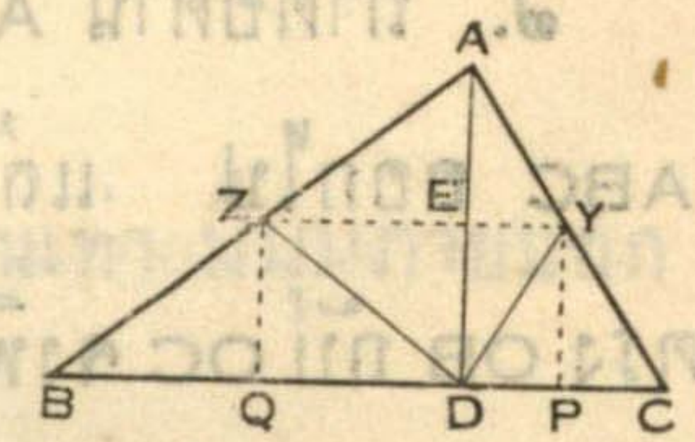
๔. ถ้า A เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC, ต่อด้าน BA ไปถึงจุด D ทำให้เส้น AD ยาวเท่ากับด้าน AB แล้วลากเส้น DC จงพิสูจน์ว่า ∠ BCD เป็นมุมฉาก.

๕. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางของด้านทะแยงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไป จนถึงจุดที่ตั้งมุมฉากแล้ว เส้นตรงเส้นนี้ย่อมยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านทะแยงนั้น.

พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๑๖ ด้วยวิธีทดลอง

$(\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ)$.

พิสูจน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ด้าน AD ตั้งได้ฉากกับด้าน BC ซึ่งเป็นด้านยาวที่สุด.



แบ่งด้าน AD ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วยเส้น ZY และให้ตั้งได้ฉากกับด้าน AD YP กับ ZQ เป็นเส้นตั้งได้ฉากกับ BC.

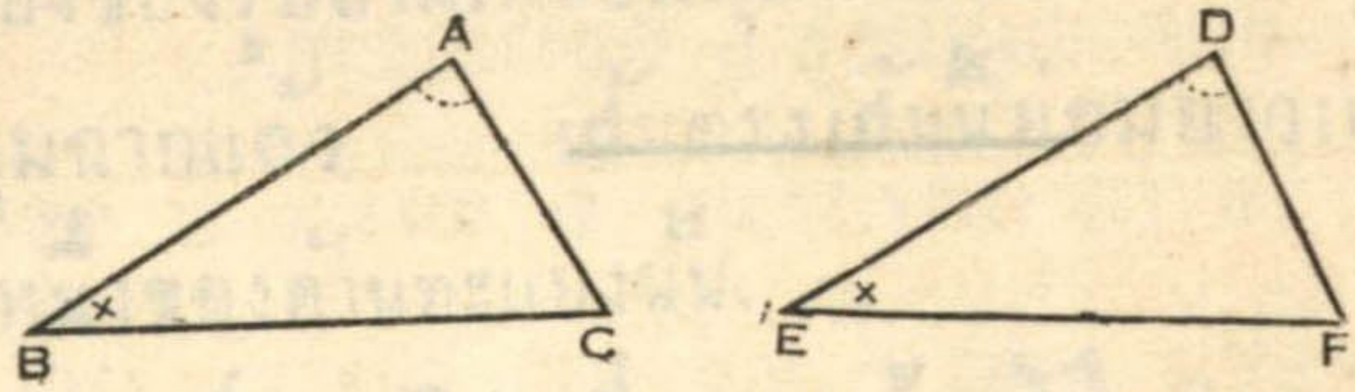
ถ้าเราพับรูปสามเหลี่ยมนี้เข้าตามรอยเส้นจุด ๆ ∠A, ∠B, ∠C ต่างก็จะทับ ∠ZDY, ∠ZDQ, และ ∠YDP ตามลำดับ ซึ่งเมื่อรวมกันเข้า $= 180^\circ$.

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

หรือตัดเอาปลายมุมทั้งสามมาต่อกันเข้าก็จะเป็นเส้นตรง).

ทฤษฎีบทที่ ๑๗ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๒๖)

โจทย์ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มีมุมสองมุมเท่ากัน มุมต่อมุม และมีด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกัน (Corresponding side) เท่ากันด้านหนึ่ง รูปสามเหลี่ยมคู่นี้เท่ากันทุกประการ.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็น △สองรูป ซึ่งมี

$\angle B = \angle E$

$\angle A = \angle D$

และด้าน BC = ด้าน EF.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า △ABC กับ △DEF เท่ากันทุกประการ.

พิสูจน์ $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ ฉาก

$= \angle D + \angle E + \angle F$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

แต่ $\angle A = \angle D$ และ $\angle B = \angle E$.

$\therefore \angle C = \angle F$.

ยก $\triangle ABC$ ซ้อน $\triangle DEF$ ให้จุด B ทับจุด E

และด้าน BC ทับด้าน EF.

$\therefore$ ด้าน BC = ด้าน EF.

$\therefore$ จุด C ต้องทับจุด F

และ $\therefore \angle B = \angle E$

$\therefore$ ด้าน AB ต้องทับด้าน ED

และ $\therefore \angle C = \angle F$

$\therefore$ ด้าน CA ต้องทับด้าน FD

$\therefore$ จุด A ซึ่งอยู่บนด้าน ED และ FD ต้องทับจุด D ซึ่งเป็นจุดที่ด้าน ED กับ FD มาบรรจบกัน.

$\therefore \triangle ABC$ ทับ $\triangle EDF$ สนิท.

$\therefore \triangle ABC = \triangle EDF$ ทุกประการ.

นั่นคือ ด้าน AB = ด้าน DE ด้าน AC = ด้าน DF และ △ ทั้งคู่นี้มีพื้นที่เท่ากัน.

ซ. ต. พ.

ไจทย์แบบฝึกหัด

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

๑. เส้นที่ลากจากปลายฐานทั้งสองข้างของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ไปตั้งได้ฉากกับด้านตรงข้ามย่อมเท่ากัน.

๒. จุดใด ๆ ที่ตั้งอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งของมุมหนึ่ง ย่อมมีระยะทางห่างจากแขนของมุมนั้นเท่ากัน.

๓. ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB แล้วลากเส้น AX กับ BY ให้ตั้งได้ฉากกับเส้นนั้น จงพิสูจน์ว่า AX = BY.

๔. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมตั้งได้ฉากกับด้านฐาน รูปสามเหลี่ยมรูปนี้ต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

๕. ถ้าลากเส้นจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งได้ฉากกับด้านฐาน แบ่งฐานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน รูปสามเหลี่ยมรูปนี้ต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

๖. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมแบ่งฐานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน รูปสามเหลี่ยมรูปนี้ต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (จงต่อเส้นแบ่งครึ่งมุมออกไป แล้วดำเนินวิธีสร้างอย่างเดียวกับทฤษฎีบทที่ ๘).

๗. จุดกึ่งกลางของเส้นตรงซึ่งปลายทั้งสองจุดเส้นตรงขนานคู่หนึ่ง มีระยะห่างจากเส้นขนานเท่ากัน.

๘. เส้นตรงเส้นหนึ่งปลายทั้งสองจดเส้นตรงสองเส้น ถ้าลากเส้นตรงจากเส้นขนานข้างหนึ่งให้ผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นตรงนั้นไปจดเส้นขนานอีกข้างหนึ่ง จุดกึ่งกลางจะแบ่งเส้นเหล่านี้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

๙. จุดจุดหนึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงขนานคู่หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน ถ้าลากเส้นตรงอีกสองเส้นให้ผ่านจุดนี้ และตัดเส้นขนานคู่นั้น ส่วนของเส้นขนานที่เส้นตรงทั้งสองตัดย่อมเท่ากัน.

๑๐. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน AB = AD และด้าน BC = CD จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุม AC จะแบ่งครึ่งมุม BAD กับมุม BCD และ AC นี้จะตั้งได้ฉากกับ BD ด้วย.

๑๑. ชายผู้หนึ่งมีความประสงค์ที่จะทราบส่วนกว้างของแม่น้ำสายหนึ่งซึ่งเขาข้ามไปไม่ได้ เขาจึงไปยืนอยู่ที่จุด A ริมฝั่งแม่น้ำนั้น เขาได้

สังเกตวัตถุ B ซึ่งอยู่ฟากข้างโน้น ตรงข้ามที่เขายืน เขาจึงจำลองเส้นตรง AC ให้ตั้งได้ฉากกับ AB แล้วให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC จากจุด C เขาเดินตรงไปยังจุด D ให้ระยะทาง CD ตั้งได้ฉากกับ AC จนจุด D, จุด O กับวัตถุ B ทั้งสามสิ่งนี้อยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน แล้วก็วัดด้าน CD จงพิสูจน์ว่าด้าน CD นี้เท่ากับส่วนกว้างของแม่น้ำนั้น.

ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันได้ทุกประการ

ทฤษฎีบทที่ ๔ ที่ ๗ และที่ ๑๗ สามบทนี้นักเรียนได้เรียนมาแล้ว จะได้ย่อไว้ในที่นี้.

รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการได้ต้องมีส่วนที่เท่ากันสามส่วน ดังต่อไปนี้.

(๑) ด้านเท่ากันสองด้านกับมุมในระหว่างด้านเท่า ๆ กัน (ทฤษฎีบทที่ ๔).

(๒) ด้านเท่ากันสามด้าน ด้านต่อด้าน (ทฤษฎีบทที่ ๗)

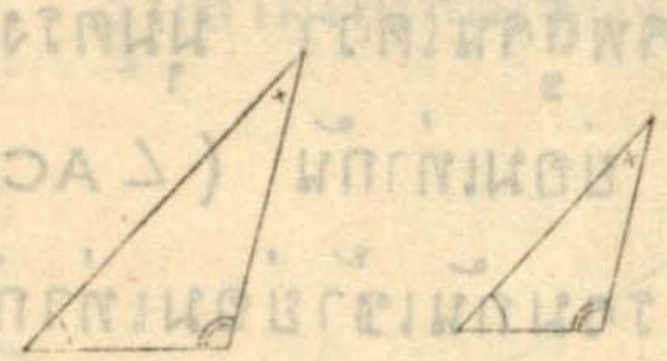
(๓) มุมเท่ากันสองมุม กับด้านเท่ากันด้านหนึ่ง แต่ต้องเป็นด้านที่ได้ลำดับกัน (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีส่วนเท่ากันสามส่วน แต่รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นไม่จำเป็นจะต้องเท่ากันทุกประการก็ได้ เช่น

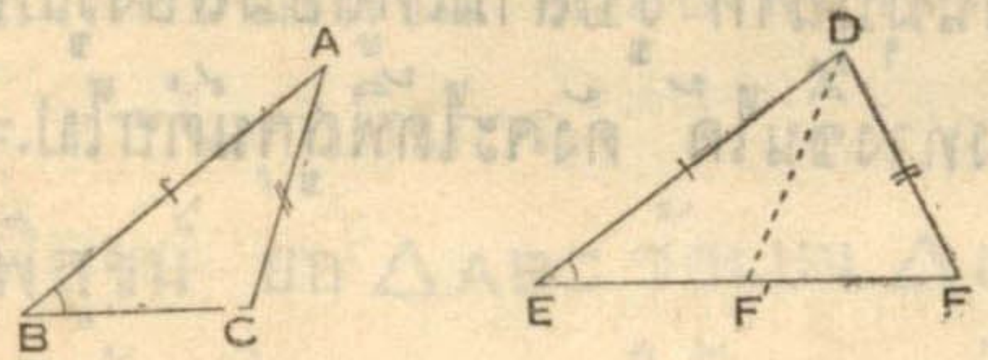
(๑) มุมสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

ต่อ

เท่ากับมุมสามมุมของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง มุมต่อมุม รูปที่แสดงไว้นี้ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ.



(๒) ด้านสองด้านกับมุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับด้านสองด้านกับมุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง มุมที่กำหนดให้เท่ากันนี้อยู่ตรงข้ามกับด้านเท่าต้องเท่ากันทุกประการ. รูปสามเหลี่ยมไม่จำเป็น



เพราะว่า AB = DE, AC = DF และ ∠ABC = ∠DEF จะเห็นได้ว่า เมื่อด้าน EF ไม่เท่ากับ

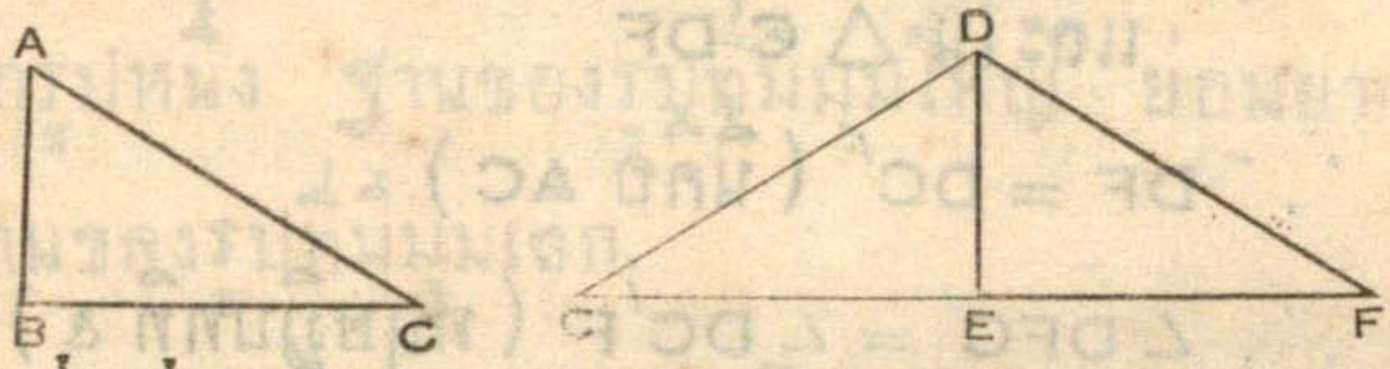
ด้าน BC แล้ว ด้าน DF ที่กำหนดให้ในรูปสามเหลี่ยม DEF จะอยู่ที่ DF หรือ DF′ ก็ได้.

นักเรียนจงสังเกตไว้ว่าเนื่องจากสิ่งที่กำหนดให้นี้ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า มุมตรงข้ามกับด้านเท่า AB และ DE ย่อมเท่ากัน ($\angle ACB = \angle DF'E$) หรือสองมุมรวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก ($\angle ACB + \angle DFE$) ถ้า $\angle ACB = \angle DF'E$ แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้ย่อมเท่ากันทุกประการ เมื่อเป็นเช่นนี้รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป จึงเกิดเป็นสองทางขึ้นได้ (Ambiguous case).

ถ้ามุมที่กำหนดให้ คือ มุม ABC กับมุม DEF ต่างก็เป็นมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะไม่เกิดเป็นสองทางขึ้นได้ ดังจะได้พิสูจน์ต่อไป.

ทฤษฎีบทที่ ๑๙

โจทย์ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามกับมุมฉากเท่ากัน และมีด้านอนเท่ากันอกด้านหนึ่ง รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้ย่อมเท่ากันทุกประการ.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มี ∠ ABC กับ ∠ DEF เป็นมุมฉากเท่ากันหนึ่งมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉาก AC = ด้านตรงข้ามมุมฉาก DF และด้าน AB = ด้าน DE.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า △ABC กับ DEF เท่ากันทุกประการ.

พิสูจน์ ยก △ ABC ซ้อนบน △ DEF ให้ด้าน AB ทับด้านเท่า DE และให้จุด C อยู่ข้างด้าน DE ทางที่ตรงกันข้ามกับจุด F, ให้ C′ เป็นจุดที่ C ไปตั้ง

อยู่ใหม่.

$\therefore$ DEC′ $\triangle$เป็นแทน$\triangle$ ABC

$\therefore$ $\angle$ DEFกับ$\angle$ DEC′ ต่างก็เท่ากับหนึ่งมุมฉาก

$\therefore$ EF กับ EC′ ย่อมเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

และใน $\triangle$ C′DF

$\therefore$ DF = DC′ (นี่คือ AC)

$\therefore$ $\angle$ DFC′ = $\angle$ DC′F (ทฤษฎีบทที่ ๕)

ใน $\triangle$ DEF กับ DEC′

$\therefore$ $\begin{cases} \angle \text{ DEF} = \angle \text{ DEC}' \text{ (เพราะต่างก็เป็นมุมฉาก)} \\ \angle \text{ DFE} = \angle \text{ DC}'\text{E (พิสูจน์มาแล้ว)} \\ \text{ด้าน DE=ด้านDE (หรือจะเรียกด้านร่วมก็ได้)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ DEF กับ DEC′ ต้องเท่ากันทุกประการ

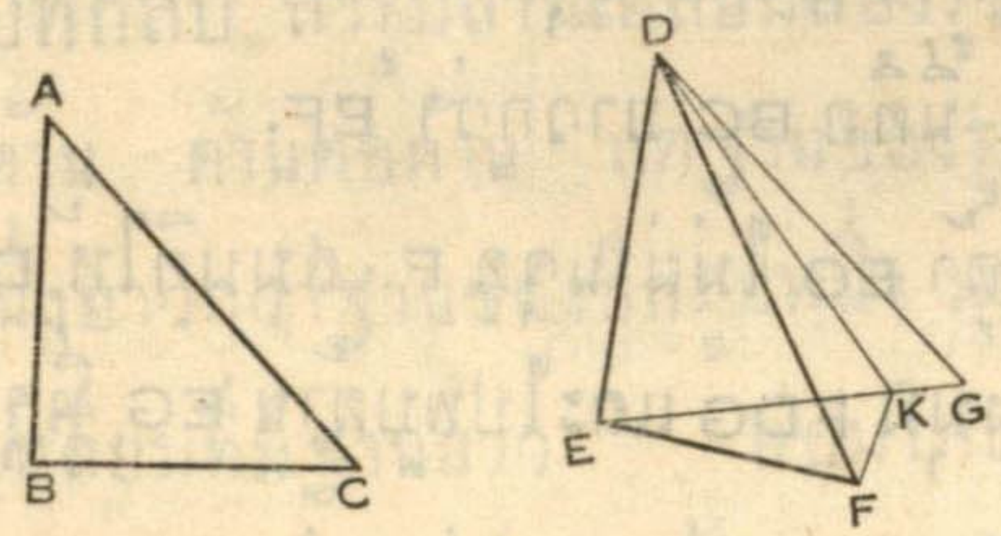
(ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

นี่ก็คือ $\triangle$ DEF กับ $\triangle$ ABC เท่ากันทุกประการ.

ซ. ต. พ.

ทฤษฎีบทที่ ๑๙ (ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๒๔)

โจทย์ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านสองด้านเท่ากันด้านต่อด้าน แต่มุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่าของรูปหนึ่งใหญ่กว่ามุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่าของอีกรูปหนึ่ง ฐานของรูปที่มีมุมใหญ่ย่อมยาวกว่าฐานของรูปที่มีมุมเล็ก.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้าน AB = ด้าน DE ด้าน AC = ด้าน DF แต่มุม BAC โตกว่ามุม EDF

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่าฐาน BC ยาวกว่าฐาน EF.

พิสูจน์ ยกรูปสามเหลี่ยม ABC ซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม DEF ให้จุด A ทับจุด D และด้าน AB ทับด้าน DE.

$\therefore$ AB = DE

$\therefore$ จุด B ต้องทับจุด E.

สมมติให้ DG แทนด้าน AC และ EG แทนด้าน BC ถ้าด้าน EG ผ่านจุด F, EG ก็ต้องยาวกว่า EF นั่นคือ BC ยาวกว่า EF.

แต่ถ้า EG ไม่ผ่านจุด F สมมติให้ DK เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม FDG และไปพบด้าน EG ที่จุด K. ลากเส้น FK.

ใน $\triangle$ FDK กับ GDK.

$\therefore$ DF = DG
DK เป็นด้านร่วมของ $\triangle$ ทั้งสองรูป
มุมในระหว่างด้านเท่า FDK = มุมในระหว่างด้านเท่า GDK

$\therefore$ FK = GK (ทฤษฎีบทที่ ๔).

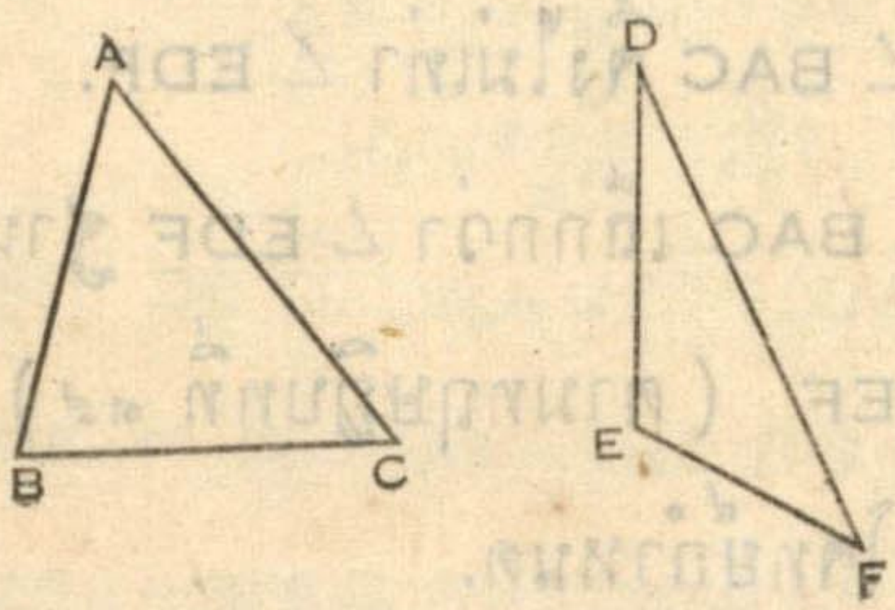
$\therefore$ EK + FK ต้องยาวกว่า EF.

นั่นคือ EK + GK ยาวกว่า EF.

$\therefore$ EG (หรือ BC) จึงยาวกว่า EF.

ซ. ต. พ.

บทกลับ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน แต่ฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งยาวกว่าฐานของอีกรูปหนึ่ง มุมยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว ย่อมใหญ่กว่ามุมยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานสั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABC กับ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้าน AB = ด้าน DE. ด้าน AC = ด้าน DF. แต่ฐาน BC ยาวกว่าฐาน EF.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า ∠ BAC ใหญ่กว่า ∠ EDF.

พิสูจน์ ถ้า ∠ BAC ไม่ใหญ่กว่า ∠ EDF. ∠ BAC จะต้องเท่ากับ ∠ EDF หรือเล็กกว่า ∠ EDF.

ถ้า ∠ BAC = ∠ EDF. ฐาน BC ต้อง = ฐาน EF (ตามทฤษฎีบทที่ ๔) แต่ไม่เป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด.

∴ ∠ BAC จึงไม่เท่า ∠ EDF.

ถา ∠ BAC เลกกวา ∠ EDF ฐาน BC ตองสั้นกว่าฐาน EF (ตามทฤษฎีบทที่ ๑๙) แต่ก็ไม่เป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด.

∴ ∠ BAC จึงไม่เล็กกว่า ∠ EDF.

เมื่อ ∠ BAC ไม่เท่า และไม่เล็กกว่า ∠ EDF.

∴ ∠ BAC ก็ต้องใหญ่กว่า ∠ EDF.

ซ. ต. พ.

---

* บทหนึ่งบทใดที่มีดอกจันทร์กำกับอยู่ด้วย จะงดไว้สอนภายหลังก็ได้ แล้วแต่ครูจะเห็นควร.

บททวนต้นที่ว่าด้วยรูปสามเหลี่ยม

๑. จงกล่าวถึงคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้องด้วย

(ก) ผลบวกของมุมภายใน.

(ข) ผลบวกของมุมภายนอก.

ในข้อ (ก) ถ้ารูปนั้นเป็นรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งมี n ด้าน แทนที่จะเป็นรูปสามเหลี่ยม คุณสมบัติของรูปนั้นจะเป็นอย่างไร.

๒. ถ้าถือเอามุมเป็นเกณฑ์แล้ว รูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ มีกี่ชะนิด จงอ้างทฤษฎีบท หรือบทแทรกบทหนึ่งบทใดที่ว่าด้วยมุมของรูปสามเหลี่ยมเหล่านั้น.

๓. จงอ้างทฤษฎีบทมาสองบท ซึ่งเขากำหนดด้านให้แล้ว ให้เราพิสูจน์มุม.

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า BC ยาว = 3·6 ซม. AC ยาว = 2·8 ซม. AB ยาว = 3·6 ซม. จงจัดมุมให้เรียงลำดับกันตามขนาดก่อนที่เราจะวัด

แล้วจงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมรูปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม.

๔. จงอ้างทฤษฎีบทมาสองบท ซึ่งเขากำหนดมุมให้และให้เราพิสูจน์ด้าน.

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า

(ก) $\angle BAC = 48^\circ$ และ $\angle ABC = 51^\circ$

จงหาจำนวนองศาของมุมที่สาม และบอกด้วยว่าด้านไหนเป็นด้านยาวที่สุด.

(ข) $\angle BAC = \angle ABC = 62\frac{1}{2}^\circ$ จงหาจำนวนองศาของมุมที่สาม แล้วจัดด้านให้เรียงกันตามลำดับความยาว.

๕. จากข้อไหนในสิ่งที่กำหนดให้ข้างล่างนี้เราอาจกล่าวได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูป คือ ABC กับ DEF เท่ากันทุกประการ และจงชี้ให้เห็นว่าข้อใดที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปอาจจะเป็นได้สองทาง ให้เขียนรูปสามเหลี่ยม ABC กับ DEF มาให้ดูทุก ๆ ข้อ.

(๑) $\angle BAC = \angle EDF = 71^\circ$

$\angle ABC = \angle DEF = 46^\circ$

ด้าน BC = ด้าน EF = 3·7 ซม.

(๒) ด้าน BC = ด้าน EF = 4.2 ซม.

ด้าน AC = ด้าน DF = 2·4 ซม.

$\angle ACB = \angle DFE = 81^\circ$

(๓) $\angle BAC = \angle EDF = 36^\circ$

$\angle ABC = \angle DEF = 121^\circ$

$\angle ACB = \angle DFE = 23^\circ$

(๔) ด้าน BC = ด้าน EF = 3.0 ซม.

ด้าน AC = ด้าน DF = 5·2 ซม.

ด้าน AB = ด้าน DE = 4.5 ซม.

(๕) $\angle ABC = \angle DEF = 53^\circ$

ด้าน AC = ด้าน DF = 4.3 ซม.

ด้าน AB = ด้าน DE = 5.0 ซม.

(๖) $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$

ด้าน AB = ด้าน DE = 5 ซม.

ด้าน BC = ด้าน EF = 3 ซม.

๖. จงสรุปผลจากคำถามข้อ ๕ ให้กล่าวเป็นโจทย์ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูป

(๑) จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ

(๒) อาจจะเท่ากันทุกประการ หรือไม่เท่าก็ได้.

๗. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสามมุม มุมต่อมุม รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้ ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ เพราะเหตุไร จงอธิบายความหมายมาให้ชัดเจน.

โจทย์ระคน

(๘. (๑) เส้นซึ่งลากจากจุดจุดหนึ่งที่กำหนด

ให้ มายังเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง เส้นตั้งได้ฉากเป็นเส้นสั้นที่สด.

(๒) เส้นเอนใด ๆ ที่ทำให้เกิดมุมกับเส้นตั้งได้ฉากเท่ากัน เส้นเอนนั้น ๆ ย่อมเท่ากัน.

(๓) เส้นเอนสองเส้น เส้นสั้นก็คือเส้นที่ทำให้เกิดมุมเล็กกับเส้นตั้งได้ฉาก.

๙. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเท่าคู่หนึ่งคู่ใดเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเท่าอีกคู่หนึ่งย่อมเท่ากันหรือมิฉะนั้นรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก ถ้าแม้ว่ามุมคู่หลังนี้เท่ากัน รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการด้วย.

๑๐. PQ เป็นเส้นตั้งได้ฉาก (ยาว 4 ซม.) กับเส้นตรง XY จงลากเส้นเอนจากจุด P ทำมุม 15°, 30°, 45°, 60°, 75° กับเส้น PQ และวัดส่วนยาวของเส้นเอนเหล่านี้ แล้วทำตารางบอกผลลัพธ์ไว้ด้วย.

๑๑. PAB เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน AB กับ AP ยาว 4 ซม. และ 3 ซม. (ด้านสองด้านนี้จะหดเข้าหรือยืดออกอีกไม่ได้) ถ้าตรึงด้าน AB ไว้เสียแล้วปล่อยให้จุด P หมุนไปรอบจุด A จงหาส่วนยาวของ PB เมื่อมุม PAB ค่อย ๆ เพิ่มจาก 0° ถึง 180°.

ให้ตอบปัญหาข้อนี้ด้วยวิธีเขียนรูปลงไว้ทีละรูป ให้มุม PAB เพิ่มขึ้นทีละ 30° แล้ววัด PB ทุกที ไป เมื่อวัดแล้วให้ทำตารางบอกผลลัพธ์ไว้ด้วย.

๑๒. AB เป็นเสาธงต้นหนึ่ง ดากเส้นระดับจากจุด B ไปยังจุด C กับจุด D ซึ่งอยู่ห่างกัน 27 ฟุต มุม BCA = 65° และมุม BDA = 40° จงเขียนรูปนี้มาให้ดู ใช้มาตราส่วน 1 ซม. แทน 10 ฟุต แล้ววัดดูว่าเสาธงต้นนี้สูงเท่าไร.

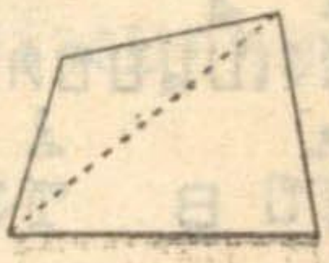
๑๓. PQ เป็นประภาคารแห่งหนึ่ง จากจุด P ซึ่งเป็นยอดประภาคาร เรามองไปเห็นเรือ A กับเรือ B ซึ่งทอดสมออยู่ทางทิศใต้ของประภาคารนี้

ถ้าประภาคารนี้สูงพ้นน้ำขนมา 126 ฟุต และมุม PAQ = 57° มุม PBQ = 33° จงเขียนรูปนี้มาให้ดู ใช้มาตราส่วน 1 นิ้วแทน 100 ฟุต แล้ววัดดูว่าเรือสองลำนี้อยู่ห่างกันเท่าไร.

๑๕. จากประภาคารแห่งหนึ่ง เราแลเห็นเรือสองลำ คือเรือ A และเรือ B อยู่ห่างกัน 600 หลา เรือ A อยู่ทางตะวันตกเฉียงใต้ของประภาคารนั้น และเรือ B อยู่ทางทิศตะวันออกของทิศใต้ของประภาคาร 15° ในเวลานั้นคนในเรือ A มองไปเห็นเรือ B อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ จงเขียนรูปนี้มาดู ใช้มาตราส่วน 1 นิ้ว แทน 200 หลา และวัดดูว่าเรือ A กับเรือ B อยู่ห่างจากประภาคารลำละกี่หลา?

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๑. รูปสี่เหลี่ยม คือรูปแบน ซึ่งมีด้านสี่ด้าน เป็นเส้นตรง.



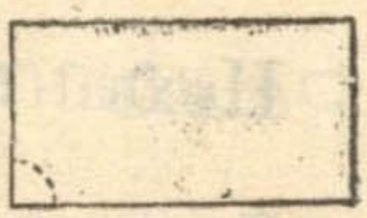
เส้นตรงซึ่งลากมาจากมุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม ไปถึงอีกมุมหนึ่งซึ่งอยู่ตรงข้าม เรียกว่าเส้นทะแยงมุม (Diagonal).

๒. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านตรงข้ามขนานกันเป็นคู่ ๆ.



(ต่อไปเราจะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่า ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้เท่ากัน และมุมตรงข้ามก็เท่ากันด้วย.)

๓. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก.



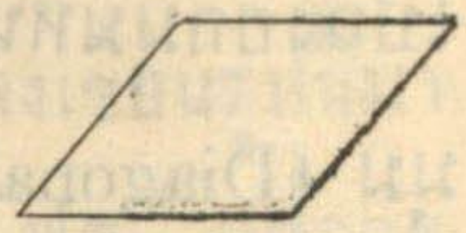
(ต่อไปเราจะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่า มุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้นเป็นมุมฉากทั้งสี่)

๔. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านประชิดเท่ากัน

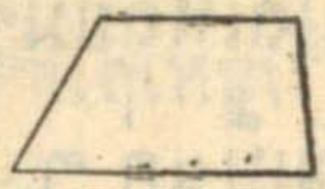


หรือมีด้านทั้งสี่เท่ากัน.

๕. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านเท่าคือ ด้านเท่ากันหมด แต่ไม่มีมุมฉากเลย.



๖. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezium) คือ รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านขนานกันคู่หนึ่ง.



นักเรียนน่าจะจำศัพท์เหล่านี้ไว้ด้วย

Penta	=	ปัญจ	แปลว่า ห้า
Hexa	=	ฉ	,, หก
Septa	=	สัปต	,, เจ็ด
Octa	=	อัฏฐ	,, แปด
Nira	=	นวะ	,, เก้า
Deca	=	ทศะ	,, สิบ

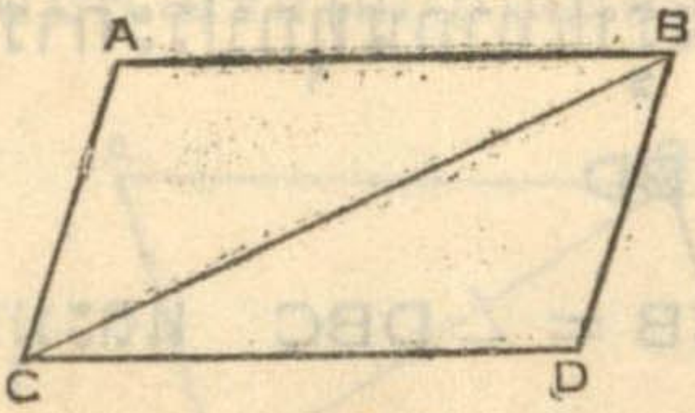
เช่น Pentagon รูปห้าเหลี่ยม

Decagon รูปสิบเหลี่ยม

ทฤษฎีบทที่ ๒๐

(ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๓๓)

โจทย์ เส้นตรงคู่ที่ต่อหัวท้ายของเส้นขนานตรงซึ่งยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ AB กับ CD เป็นเส้นขนานตรงคู่หนึ่งซึ่งยาวเท่ากัน ลากเส้น AC กับ BD.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AC กับ BD นั้นขนานกัน และยาวเท่ากันด้วย.

สร้าง ลากเส้น BC

พิสูจน์ ∵ AB กับ CD ขนานกัน และ BC เส้นตัด.

$\therefore \angle ABC = \angle$ แย้ง DCB

ในรป $\triangle$ ABC กับ DCB

$\therefore$ $\begin{cases} AB = CD \\ BC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \text{และ } \angle ABC = \angle DCB \text{ (พิสูจน์มาแล้ว)} \end{cases}$

$\therefore \triangle$ สองรูปเท่ากันทุกประการ.

$\therefore AC = BD$

และ $\angle ACB = \angle DBC$ และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้งกัน.

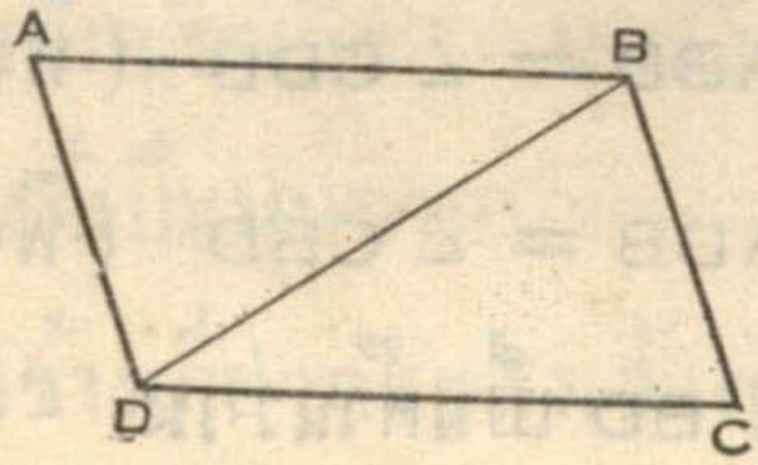
$\therefore$ AC กับ BD จึงขนานกัน

นี่คือ AC กับ BD ขนานกันและยาวเท่ากัน

ซ. ต. พ.

ทฤษฎีบทที่ ๒๑
(ยุคลิดเล่ม ๑ บทที่ ๓๔)

โจทย์ ด้านและมุมที่อยู่ตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมเท่ากัน และเส้นทะแยงมุมทั้งคู่ต่างก็แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีเส้น BD เป็นเส้นทะแยงมุม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า

(๑) AB = CD และ AD = BC.

(๒) ∠ BAD = ∠ DCB.

(๓) ∠ ADC = ∠ CBA.

(๔) พื้นที่ของ △ ABD = พื้นที่ของ △ CDB.

พิสูจน์ $\therefore$ AB กับ CD ขนานกันและ BD เป็นเส้นตัด.

$\therefore \angle ABD = \angle$ แย้ง CDB

และ $\therefore$ AD กับ BC ขนานกันและ BD เป็นเส้นตัด

$\therefore \angle ADB = \angle$ แย้ง CBD

ใน $\triangle$ ABD กับ CBD

$\therefore$ $\left\{\begin{array}{l} \angle ABD = \angle CDB \quad (\text{พิสูจน์มาแล้ว}) \\ \angle ADB = \angle CBD \quad (\text{พิสูจน์มาแล้ว}) \\ \text{และ BD เป็นด้านร่วม} \end{array}\right.$

$\therefore \triangle$ ทั้งสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ AB = CD และ AD = BC .... (I)

$\therefore \angle BAD = \angle DCB$ .... (II)

$\therefore$ พื้นที่ของ $\triangle$ ABD = พื้นที่ของ $\triangle$ CDB (IV)

และ $\therefore \angle ADB = \angle CBD$ (พิสูจน์มาแล้ว)

และ $\angle CDB = \angle ABD$

$\therefore \angle ADB + \angle CDB = CBD + ABD$

นั่นคือ $\angle ADC = \angle CBA$ ..... (III)

ซ. ต. พ.

บทแทรกที่ ๑ ถ้ามุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นมุมฉาก มุมอื่น ๆ ทั้งหมดต่างก็เป็นมุมฉากด้วย หรืออีกนัยหนึ่ง มุมทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าต่างก็เป็นมุมฉาก.

$\therefore$ มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่หนึ่งคู่ใดรวมกันเข้าต้องเท่ากับสองมุมฉาก (ทฤษฎีบทที่๑๔)

$\therefore$ ถ้ามุมหนึ่งเป็นมุมฉาก อีกมุมหนึ่งก็ต้องเป็นมุมฉากด้วย

และเมื่อมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากันทุกมุม.

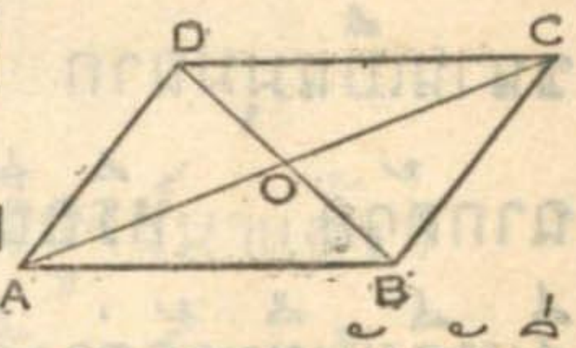
$\therefore$ มุมทั้งหมดต่างก็ต้องเป็นมุมฉาก.

บทแทรกที่ ๒ ด้านทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยม

จัตุรัสย่อมเท่ากันทุกประการ และมุมทั้งหมดต่างก็เป็นมุมฉากด้วย

บทแทรกที่ ๓ เส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมตัดกันออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้



AC กับ DB เป็นเส้นทะแยงมุมคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ตัดกันที่จุด O.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จะต้องพิสูจน์ว่า AO=CO และ DO = BO.

ใน △ AOB กับ COD

$$\therefore \begin{cases} \angle OAB = \angle \text{แย้ง } OCD \\ \angle AOB = \angle \text{ตรงข้าม } COD \text{ (ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ \text{และ } AB = \text{ด้านตรงข้าม } CD \end{cases}$$

$\therefore$ △ สองรูปเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ OA = OC และ DO = OB

ไจทย์แบบฝึกหัด

๑. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นต้องเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

๒. ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากัน สี่เหลี่ยมรูปนั้นต้องเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

๓. ถ้าเส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ต่างก็ตัดกันออกไปเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน สี่เหลี่ยมรูปนั้นต้องเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

๔. เส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าต่างก็ตัดกันออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และตั้งได้ฉากกันด้วย.

๕. ถ้าเส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากัน มุมทั้งหมดของรูปนี้ต่างก็ต้องเป็นมุมฉาก.

๖. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ย่อมมีเส้นทะแยงมุมทั้งสองไม่เท่ากัน.

โจทย์แบบฝึกหัด

ว่าด้วยเส้นขนานกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๑ จงแสดงให้เห็นว่า ถ้าเราพับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าตามรอยเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งเส้นใดแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นย่อมทับกันสนิท.

นี่ก็คือให้พิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งเส้นใดของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่าย่อมเป็นเส้นซิมมีตรี (Symmetry) (ดูคำจำกัดความ)

๒. จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรต่างก็เป็นเส้นซิมมิตรี และยังมีเส้นซิมมิตรีของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอีกสองเส้นซึ่งไม่ใช่เส้นทะแยงมุม เส้นสองเส้นนี้คือเส้นอะไร.

๓. เส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเส้นหนึ่งเส้นใดต่างก็แบ่งรูปนั้นออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ. เมื่อเช่นนี้เส้น

ทะแยงมุมนี้จะเป็นเส้นซิมมิตรีได้หรือไม่ และเส้นไหนอีกสองเส้นที่เป็นเส้นซิมมิตรีของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้.

๔. มีเส้นซิมมิตรีของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานธรรมดาบ้างหรือไม่ จงอ้างเหตุผลมาด้วย.

๕. ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD ด้าน AB = AD และด้าน BC = CD แต่ด้านทั้งหมดไม่เท่ากัน เส้นทะแยงมุมเส้นไหนบ้าง (หรือทั้งสองเส้น) เป็นเส้นซิมมิตรี.

๖. จงพิสูจน์ด้วยวิธียกรูปซ้อนกัน ว่า

(๑) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้าด้านประชิดคู่หนึ่งของรูปหนึ่ง เท่ากับด้านประชิดคู่หนึ่งของอีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้านและมุมที่ด้านประชิดของรูปหนึ่งเท่ากับมุมที่ด้านประชิดของอีกรูปหนึ่ง.

(๒) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้าด้านประชิดคู่หนึ่งของรูปหนึ่งเท่ากับ

ด้านประชิดคู่หนึ่งของอีกรูปหนึ่ง ด้านต่อด้าน.

๗. รูปสี่เหลี่ยมสองรูป คือ ABCD และ EFGH มีด้าน AB=EF, มุม BC=FG, CD=GH, DA=HE, และมุม BAD= FEH จงพิสูจน์ว่าเราอาจจะเอารูปหนึ่งรูปใดซ้อนบนอีกรูปหนึ่งได้สนิทดี.

๘. เส้นตรงเส้นหนึ่งเส้นใดซึ่งลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้ปลายไปสุดที่ด้านตรงข้ามทั้งสองของรูปนี้ เส้นทะแยงมุมจะแบ่งเส้นตรงเส้นนี้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่จุดนั้น.

๙. เส้นตั้งได้ฉาก ซึ่งลากมาจากมุมตรงข้ามทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปยังเส้นทะแยงมุมย่อมเท่ากัน.

๑๐. ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ X เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จงพิสูจน์ว่า รูป AYCX เป็นรูป

สี่เหลี่ยมด้านขนาน.

๑๑. ABC กับ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีด้าน AB = DE และขนานกัน ด้าน BC = EF และขนานกัน จงพิสูจน์ว่า AC ขนานกับ DF และยาวเท่ากันด้วย.

๑๒. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน AB ขนานกับ CD และ AD = BC แต่ไม่ขนานกัน จงพิสูจน์ว่า

(๑) $\angle A + \angle C = 180^\circ = \angle B + \angle D$.

(๒) เส้นทะแยงมุม AC = เส้นทะแยงมุม DB.

(๓) เส้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน AB ไปถึงจุดกึ่งกลางของด้านCD จะเป็นเส้นซิมมีตรี.

๑๓. AP กับ BQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากัน และหมุนรอบจุด A จุด B (ซึ่งเป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้) ได้เร็วเท่ากัน และหมุนไปทาง

เดียวกัน เหมือนเซ็มนาพิกา ถ้าเส้นตรงคู่นั้นขนาน
กันอยู่แล้ว และปลายเส้นชี้ไปทางตรงกันข้าม จง
แสดงให้เห็นว่า เมื่อเส้นตรงคู่นั้นหมุนไปย่อม.

(๑) ต้องขนานกันอยู่เสมอ.

(๒) เส้นที่ลากจากจุด P ถึงจุด Q ต้องผ่านจุด
จุดหนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้เหมือนกัน.

๑๔. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูป
หนึ่ง ซึ่งมีมุมภายใน A $= \frac{3}{7}$ ของมุมภายนอก A
และสามเท่ามุม B = สี่เท่ามุม C จงหามุมทั้งสาม
ว่ามีมุมละกี่องศา.

๑๕. เรือเที่ยวเล่นลำหนึ่งแล่นไปทางทิศตะวัน
ออก แล้วค่อยเปลี่ยนทางเดินโดยมุ่งหมายจะแล่น
ให้รอบเกาะแห่งหนึ่ง ครั้งแรกเรือลำนี้บากหัวเรือ
ออกจากทางเดินเป็นมุม 63° ครั้งที่สองเป็นมุม 78°.
ครั้งที่สามเป็นมุม 119° และครั้งที่สี่เป็นมุม 64°
เรือลำนี้ยังต้องการเปลี่ยนทางเดินอีกเป็นมุมเท่าไร

จึงจะแล่นไปทางทิศตะวันออกได้ตามเดิม.

๑๖. ถ้าผลบวกของมุมภายในของรูปเหลี่ยม ซึ่งมีด้านเป็นเส้นตรง (Rectilineal figure) เท่ากับผลบวกของมุมภายนอก รูปนั้นมีกี่ด้าน และเพราะเหตุไร.

๑๗. จงเขียนรูปห้าเหลี่ยม ABCDE ให้ใช้ไม้โปรแตรคเตอร์ทำมุม B = 110°, มุม C = 115° มุม D = 93° มุม E = 152° แล้วใช้ไม้บรรทัดกับวงเวียนสอบดูว่าการสร้างนี้ทำให้ AE ขนานกันกับ BC จริงหรือไม่ และพิสูจน์ความจริงมาให้ดูด้วย.

๑๘. A กับ B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้สองจุด AP กับ BQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวเท่าไร ๆ ก็ได้ เส้นสองเส้นนี้หมุนได้รอบจุด A และ B เส้น AP ตั้งต้นหมุนจากเส้น AB ไปทางเดียวกับเข็มนาฬิกา ได้วินาทีละ $7\frac{1}{2}^{\circ}$ และ BQ ตั้งต้นหมุนพร้อมกับ

AP จากเส้น BA แต่ไปทางตรงกันข้ามกับเข็มก นาฬิกาได้วินาฑีละ $3\frac{3}{4}°$.

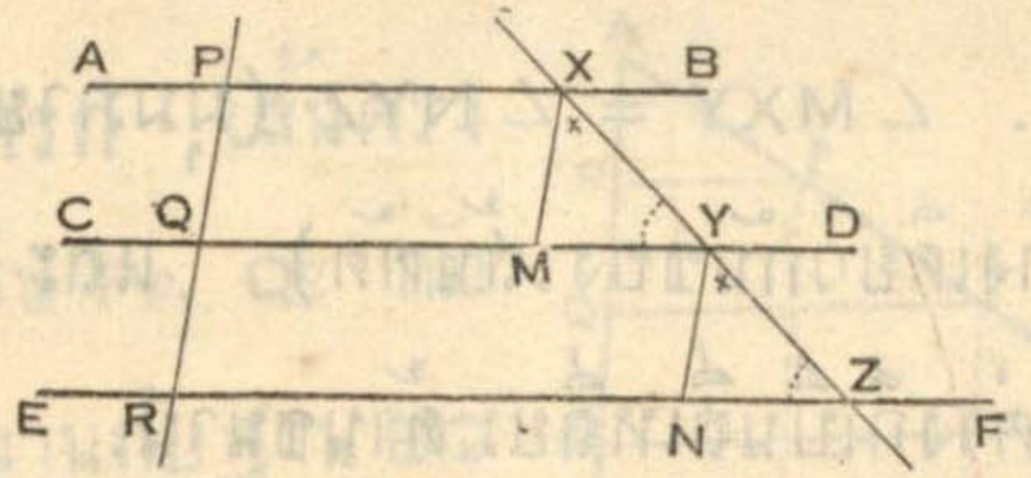
(๑) เวลาจะล่วงไปกี่วินาฑี เมื่อ AP กับ BQ มาขนานกัน.

(๒) จงวัดและคำนวณดูมุมในระหว่าง AP กับ BQ เมื่อหมุนไปได้ 12 วินาฑี.

(๓) มุมในข้อ ๒ จะลดลงวินาฑีละกี่องศา.

ทฤษฎีบทที่ ๒๒

โจทย์ ถ้ามีเส้นตรงสามเส้นหรือมากกว่าสามเส้นขนานไปขนานกัน และมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งตัดผ่าน เส้นขนานเหล่านั้นตัดเส้นตรงนี้ออกเป็นท่อนๆ ในระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ๆ ยาวเท่ากัน เมื่อมีเส้นตรงอื่น ๆ ตากผ่านเส้นขนานเหล่านี้แล้ว เส้นขนานเหล่านี้จะแบ่งเส้นตรงอื่นๆนั้นออกเป็นท่อน ๆ ในระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ๆ ยาวเท่ากันด้วย.



สิ่งที่กำหนดให้ สมมติให้เส้นขนาน AB,CD,EF แบ่งเส้นตรง PQR ออกเป็นท่อน ๆ ให้ท่อน PQ = ท่อนQR และสมมติให้เส้นขนานทั้งสามนี้แบ่งเส้นตรง XYZ ออกเป็นท่อน ๆ เหมือนกัน คือ XY กับ YZ.

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คะต้องพิสูจน์ว่า XY = YZ.

จากจุด X กับจุด Y ลากเส้น XM กับ YN ให้ขนานกับเส้น PR.

พิสูจน์ เมื่อ CD กับ EF ขนานกัน และ XZ เป็นเส้นตัด.

∴ ∠ XYM = ∠ YZN (มุมภายนอก = มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด)

และ ∴ XM ขนานกัน YN (ทฤษฎีบทที่ ๑๕)

∴ ∠ MXY = ∠ NYZ (มุมภายนอก = มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด) และ PQMX กับ QRNY ต่างก็เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

∴ ด้าน XM = ด้านตรงข้าม PQ และด้าน YN = ด้านตรงข้าม QR.

และ ∴ PQ = QR (โจทย์บอก)

∴ ด้าน XM = ด้าน YN

ในรูป △ XMY กับ YNZ

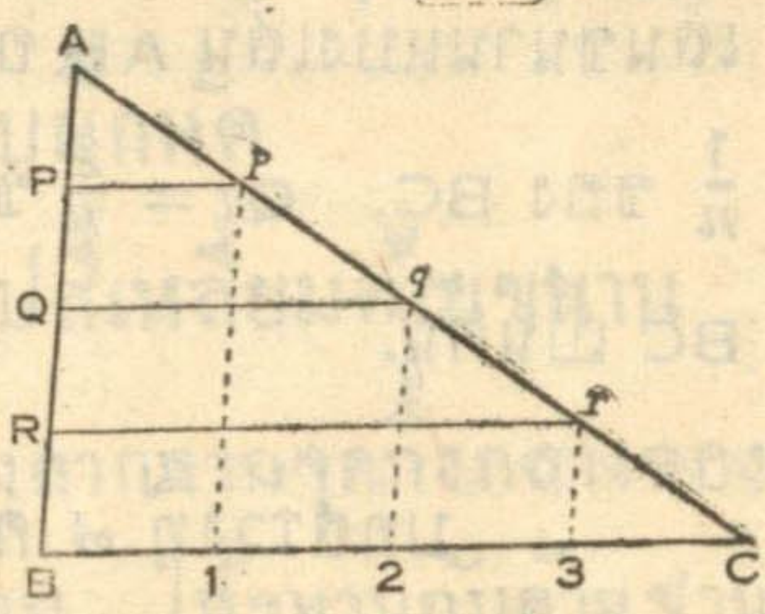
$$\therefore \begin{cases} \angle XYM = \angle YZN. \\ \angle MXY = \angle NYZ. \\ \text{ด้าน } XM = \text{ด้าน } YN. \end{cases}$$

∴ △ ทั้งสองเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

∴ XY = YZ.

ช. ต. พ.

บทแทรก เส้นตรงชุดหนึ่ง เช่น Pp, Qq กับ Rr ตากขนานกับฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยม ABC



แบ่งด้าน AB ออกเป็นส่วนเท่าๆกัน เส้นตรงเหล่านี้ย่อมแบ่งด้าน AC ออกเป็นส่วนเท่า ๆ กันด้วย.

เราอาจจะทราบได้ว่าส่วนยาวของเส้นขนาน

เหล่านี้ยาวเป็นเท่าไรของด้าน BC.

จากจุด p, q, กับ r ลากเส้น $p1$, $q2$, กับ $r3$ ให้ขนานกับเส้น AB.

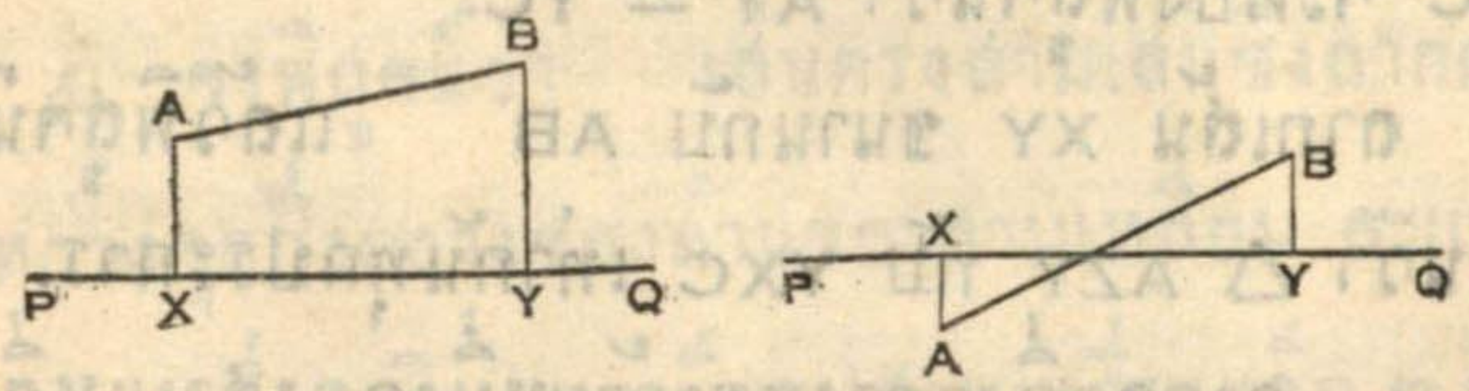
โดยทฤษฎีบทที่ ๒๒ เส้นขนานเหล่านี้แบ่งฐาน BC ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน ซึ่ง Pp ยาวได้ส่วนหนึ่ง และ Qq ยาวสองส่วน Rr ยาวสามส่วน หรืออีกนัยหนึ่ง Pp $= \frac{1}{4}$ ของ BC, Qq $= \frac{2}{4}$ ของ BC และ Rr $= \frac{3}{4}$ ของ BC ในทำนองเดียวกัน ถ้าเส้นขนานแบ่งเส้น AB ออกเป็น n ส่วน Pp จะ $= \frac{1}{n}$ ของ BC, Qq $= \frac{2}{n}$ ของ BC และ Rr $= \frac{3}{n}$ ของ BC เป็นต้น.

บทสร้างที่ ๗ ควรสอนในทันที

คำจำกัดความ

ถ้าลากเส้น AX กับ BY จากจุดที่ปลายเส้นตรง AB ให้ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง PQ ซึ่งมีส่วนยาว

ไม่จำกัด ระยะทางตั้งแต่จุด X ถึงจุด Y เราเรียกว่าเส้น ออรฺทอกอนัล โปรฺเจคชัน ของเส้นตรง AB บนเส้นตรง PQ.



นักเรียนควรจำไว้ด้วยว่า โปรฺเจคชันของเส้นดิ่ง (Vertical line) ไม่มี และโปรฺเจคชันของเส้นระดับก็คือเส้นระดับนั้นเอง.

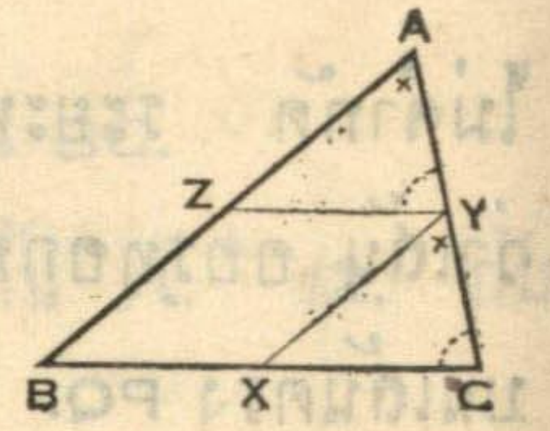
โจทย์แบบผีกหัด

ว่าด้วยเส้นขนานกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

๑. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งลากจากจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม ให้ขนานกับด้านฐานเส้นตรงเส้นนั้นจะต้องแบ่งด้านที่เหลืออยู่ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

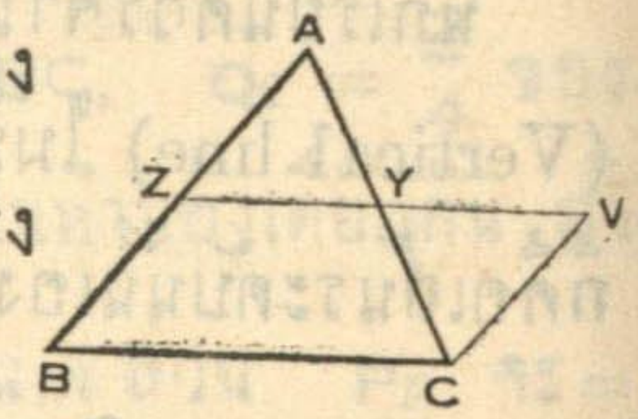
(บทนี้เป็นบทสำคัญส่วนหนึ่งฉะเพาะทฤษฎีบทที่ ๒๒)

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และมีเส้น ZY ตากขนานกับฐาน BC จะต้องพิสูจน์ว่า AY = YC.



ตากเส้น XY ขนานกับ AB แล้วพิสูจน์ให้เห็นว่า △ AZY กับ YXC เท่ากันทุกประการ.

๒. จากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ตากเส้นตรงไปยังจุดกึ่งกลักองอีกด้านหนึ่ง เส้นตรงเส้นนี้ต้องขนานกับด้านที่สาม.



ใน △ ABC ถ้า Z กับ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB กับ AC ของ △ ABC จะต้องพิสูจน์ว่า ZY ขนานกันกับฐาน BC.

ต่อด้าน ZY ไปถึงจุด V ทำให้ YV ยาวเท่ากับ ZY ตากเส้น CV แล้วพิสูจน์ให้เห็นว่า △ AZY กับ CYV เท่ากันทุกประการ ที่เหลืออยู่ก็จะพิสูจน์ต่อไปได้โดยง่าย.

๓. เส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งลากจากจุดกึ่งกลาง ของด้านหนึ่งไปยังจุดกึ่งกลางของอีกด้านหนึ่งของสามเหลี่ยม ย่อมยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม.

๔. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงสามเส้นซึ่งลากต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านของสามเหลี่ยม จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมเดิมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ซึ่งเท่ากันทุกประการได้สี่รูป.

๕. เส้นตรงซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ย่อมแบ่งครึ่งเส้นตรงซึ่งลากมาจากมุมยอดไปถึงด้านที่สาม.

๖. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่ง X, Y, เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD กับ BC จงพิสูจน์ว่า BX กับ YD แบ่งด้าน AC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน.

๗. ถ้าเราลากเส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางของด้าน

ประชิดทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รูปที่เกิดขึ้นใหม่จะต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

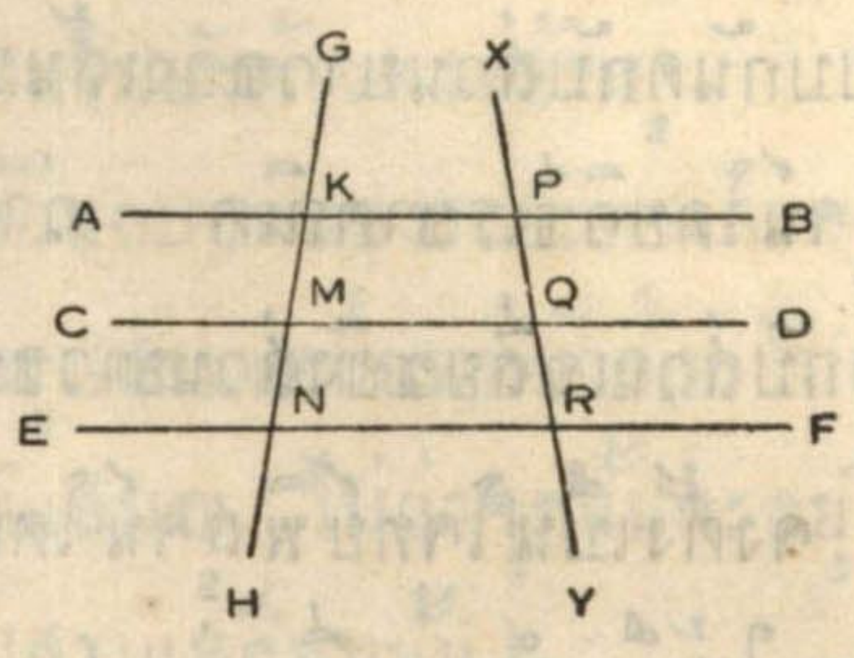
๘. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง V,X,Y,Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ ถ้าลากเส้น VY กับ XZ เส้นตรงคู่นี้ต่างก็จะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน.

๙. AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งมี O เป็นจุดกึ่งกลาง ลากเส้น AP, BQ และ OX ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง CD ถ้า AP = 4·2 ซม. และ BQ = 5.8 ซม. จงหาส่วนยาวของ OX และวัด OX ว่าได้เท่านั้นจริงหรือไม่

จงพิสูจน์ว่า $OX = \frac{1}{2}(AP + BQ)$ หรือ $\frac{1}{2}(AP \sim BQ)$ แล้วแต่ A กับ B จะอยู่ข้างเดียวกันหรืออยู่คนละข้างของเส้นตรง CD (~ หมายความว่า ผลลบ).

๑๐. GH กับ XY เป็นเส้นเอนสองเส้น ซึ่ง

ปลายเส้น G กับปลายเส้น X เบนเข้าหากัน แต่ปลายเส้น H ห่างปลายเส้น Y ออกไป มีเส้นขนาน AB, CD, EF มาตัดเส้น GH กับ XY ทำให้ KM = MN และ PQ = QR จงพิสูจน์ว่า $MQ = \frac{1}{2}(KP + NR)$



๑๑. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapexium) มีด้านขนานคู่หนึ่ง ด้านหนึ่งยาว a ซม. อีกด้านหนึ่งยาว b ซม. ถ้าเราลากเส้นจากจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสองที่ไม่ขนานกันมาถึงกัน เส้นตรงเส้นนี้ต้องขนานกับด้านขนานทั้งสองนั้น และมีส่วนยาวได้ $\frac{1}{2}(a+b)$ ซม.

๑๒. AB และ BC เป็นเส้นตรงสองเส้นบรรจบกันที่จุด B 1, 2, 3, 4, 5 เป็นจุดอยู่บนเส้น AB และอยู่ห่างเท่า ๆ กัน จากจุดเหล่านี้ลากเส้นตรง

ขนานกันไปพบเส้น BC จงวัดส่วนยาวของเส้นขนาน
เหล่านี้ แล้วคิดเฉลี่ย เมื่อได้เท่าไรให้เอาไปเปรียบ
เทียบกันดูกับส่วนยาวของเส้นขนานที่สาม แล้วจง
พิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิต ว่าเส้นขนานที่สามนี้ยาว
เท่ากับส่วนเฉลี่ยของส่วนยาวของเส้นขนานทั้งห้าเส้น

จงตั้งเป็นโจทย์พิสูจน์โดยกำหนดจำนวนเส้น
ขนานให้เป็นจำนวนคี่ เช่น $(2n+1)$ เป็นต้น.

๑๓. เส้นตรงเส้นหนึ่งอยู่ภายนอกสี่เหลี่ยมด้าน
ขนาน จากมุมทั้งสี่เขียนเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงเส้น
นี้ จงพิสูจน์ว่าเส้นตั้งฉากของมุมตรงข้ามคู่หนึ่ง
รวมกันเข้าต้องเท่ากับผลบวกของเส้นตั้งฉากของ
มุมตรงข้ามอีกคู่หนึ่ง.

(คำแนะนำ ให้ลากเส้นทะแยงมุมสองเส้น จาก
จุดที่เส้นทะแยงมุมตัดกัน ให้ลากเส้นตั้งฉากกับเส้น
ตรงที่กำหนดให้)

๑๔. ผลบวกของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุด

หนึ่งจุดใดในฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ไปสุด
ที่ด้านเท่าทั้งสองด้าน ย่อมยาวเท่ากับเส้นตั้งฉาก
ที่ลากจากจุดปลายฐานไปยังด้านตรงข้าม.

(เมื่อเป็นเช่นนี้แล้วผลบวกของระยะทางจากจุด
หนึ่งจุดใดในฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ไปสุด
ที่ด้านเท่า ย่อมเท่ากันเสมอ ไม่ว่าจุดนั้นจะอยู่ใน
ที่ใด ๆ ในฐานของรูปสามเหลี่ยมนั้น)

ถ้าจุดนี้อยู่นอกฐานซึ่งต่อออกไป ผลบวกของ
ระยะทางนี้จะเป็นอย่างไรบ้าง.

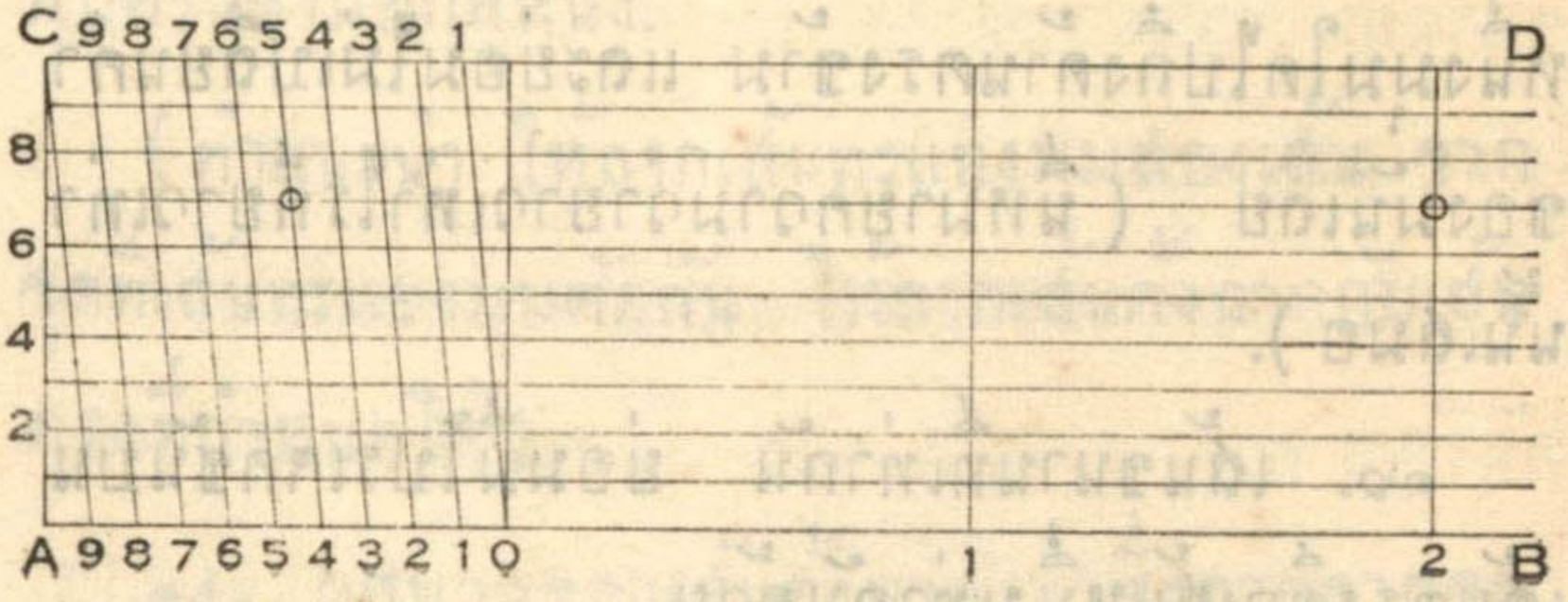
๑๕. ผลบวกของเส้นตั้งได้ฉาก ซึ่งลากจาก
จุดหนึ่งจุดใดภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ไปยัง
ด้านทั้งสาม ย่อมเท่ากับเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากมุม
หนึ่งมุมใดไปถึงด้านตรงข้าม และย่อมไม่เปลี่ยนค่า
ของมันเลย (นี่หมายความว่ายาวเท่าไรก็ยาวเท่า
นั้นเสมอ).

๑๖. เส้นขนานที่เท่ากัน ย่อมมีโปรเจคชันบน
เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งเท่ากันด้วย.

มาตราส่วนเย้

มาตราส่วนเย้นี้ นับว่าเป็นขั้นใช้อันสำคัญของทฤษฎีบทที่ ๒๒ จะได้แสดงการสร้างและการใช้มาตราส่วนเย้ด้วยวิธีเขียนมาตราส่วนเย้เป็นเศษสิบเพื่อแสดงส่วนของนิ้ว คิดเป็นทศนิยมหนึ่งหรือสองตำแหน่งดังนี้.

แบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นจำนวนนิ้ว ตั้งแต่จุด A ไป เขียนเลขกำกับจุดที่แบ่งเส้นตรงนี้ไว้ คือ 0, 1, 2, ... ช่องแรก คือช่อง O A แบ่งออกเป็นส่วนย่อย 10 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วเขียนเลขกำกับไว้ คือ 0, 1. 2, 3, จนถึง 9. ที่นี้เราก็สามารถอ่านเศษสิบของนิ้ว ที่เส้น AB เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่งได้.



ถ้าต้องการทศนิยม สอง ตำแหน่งต้องแบ่งเส้น AC ออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กัน จากจุดเหล่านี้ลากเส้นให้ขนานกับเส้น AB แล้วลากเส้นเย้ตามรูปข้างบน.

คือ จากจุด O บนเส้น AB ลากเส้นไปที่จุด 1 บนCD

„ „ 1 „ AB „ „ 2 „ CD

„ „ 2 „ AB „ „ 3 „ CD

และต่อ ๆ ไป เมื่อลากเส้นครบแล้วก็นับว่าเสร็จวิธีสร้าง ส่วนวิธีใช้อย่างไรนั้น ดูตัวอย่างข้างล่างนี้.
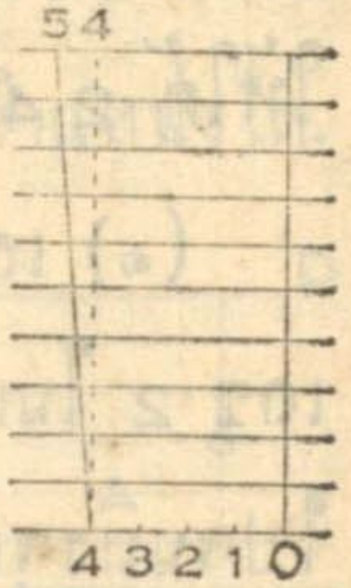
ตัวอย่าง จงวัดส่วนยาวจากมาตราส่วนเย้ให้ได้ 2·47 นิ้ว.

(๑) เอาปลายวงเวียนข้างหนึ่งกดลงที่จุดหมายเลข 2 ในเส้น AB แล้วกางปลายอีกข้างหนึ่งออกไปจนถึงจุดหมายเลข 4 บนเส้น OA ระยะทางหรือส่วนยาวที่วัดด้วยวงเวียนนี้คือ 2·4 นิ้ว.

(๒) เรายังจะต้องหาอีก .07 นิ้ว ให้เลื่อนปลายวงเวียนข้างขวาขึ้นไปตามเส้นที่ตั้งได้ฉากจากจุดที่บอก 2 นิ้ว จนกว่าจะถึงเส้นขนานที่ ๗ แล้วขยายวงเวียนให้กว้างออกไปอีก จนกว่าปลายข้างซ้ายจดเส้นเย้หมายเลข 4 ซึ่งลากไปตัดเส้นขนานที่ ๗ ดังนี้เราจะได้ระยะที่วงเวียนกางออกเท่ากับ 2.47 นิ้ว ตามความต้องการ.

เหตุผลของการที่ได้กระทำตามที่อธิบายมาแล้ว

เหตุผลสำหรับข้อ (๑) ไม่จำเป็นต้องอธิบาย ส่วนข้อ (๒) นั้นเนื่องมาจากบทแทรกของทฤษฎีบทที่ ๒๒ ถ้าลากเส้นจากจุดที่ 4 ของเส้น AB ไปยังจุดที่ 5 ของเส้น CD ก็จะเป็นรูปสามเหลี่ยม4,4,5, ซึ่งด้าน 4,4, ได้แบ่งไว้เป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กันด้วยเส้นขนานชุดหนึ่ง ซึ่งขนานกับ CD เพราะฉะนั้น



ส่วนยาวของเส้นขนานระหว่างด้าน 4, 4 กับด้าน 4,5 ก็คือ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ ... ของฐาน 4, 5 ซึ่งเท่ากับ .1 นิ้ว.

ในทำนองเดียวกันใช้มาตราส่วนเยชะนิดนี้สามารถที่จะวัดส่วนยาวต่าง ๆ ของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้จนถึงทศนิยมสองตำแหน่งของนิ้ว.

ถ้าช่องหนึ่ง ๆ ของนิ้วใช้แทนความยาว 10 ฟุต 2.47 นิ้วของมาตราส่วนเย้ ก็จะได้ส่วนยาว 24.7 ฟุต และถ้าช่องหนึ่ง ๆ ของนิ้วในมาตราส่วนเย้ใช้แทน 100 วา 2.47 นิ้ว ก็จะได้ส่วนยาว 247 วา เหตุฉะนี้มาตราส่วนเย้จึงมีประโยชน์มากในวิชาออกแบบก่อสร้าง และการวัดหาพื้นที่ต่าง ๆ เพราะว่าส่วนยาวหรือส่วนกว้างหรือส่วนสูงของสิ่งนั้นจำเป็นต้องรู้แน่นอนแล้ว เราจึงสามารถใช้มาตราส่วนเย้ย่อส่วนต่าง ๆ นั้นลงในแผนผัง (Plan) ของเราได้.

สิ่งที่ควรสังเกต

ช่องย่อยในมาตราส่วนเยี้ไม่จำเป็นต้องเป็นทศนิยมเสมอไป เช่นเราต้องการสร้างมาตราส่วนเยี้ไว้สำหรับวัดเซ็นติเมตร มิลลิเมตร และหนึ่งในสี่ของมิลลิเมตรเช่นนี้ เราเขียนเส้นขนานกับเส้น AB เพียงสี่เส้นก็ได้.

โจทย์แบบฝึกหัดสำหรับวัดทางยาว

๑. จงลากเส้นตรงให้ยาว 1.25 นิ้ว, 2.72 นิ้ว, 3.08 นิ้ว.

๒. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ยาว 2.68 นิ้ว แล้ววัดความยาวของเส้นตรงเส้นนี้ ว่าจะได้กี่เซ็นติเมตร เศษคิดเป็นจำนวนมิลลิเมตรที่ใกล้ความจริงที่สุด.

๓. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ยาว 5.7 เซ็นติเมตร แล้ววัดความยาวของเส้นตรงเส้นนี้ว่าได้กี่นิ้ว

เศษทศนิยมของนิ้วคิดสองตำแหน่ง แล้วลองคำนวณสอบดู โดยกำหนดให้ 1 ซม. = 0.3937 นิ้ว.

๔. จงวัดดูว่า 3.15 นิ้ว จะยาวกี่เซ็นติเมตร กับกี่มิลลิเมตร แล้วจงคำนวณดูว่า 1 ซม. จะเป็นทศนิยมเท่าไรของ 1 นิ้ว (ทศนิยมสองตำแหน่ง).

๕. จงลากเส้นตรงให้ยาว 2.9 ซม. กับ 6.2 ซม. และวัดดูว่ายาวกี่นิ้ว จงเทียบดูว่า 1 นิ้วมีกี่เซ็นติเมตร กับกี่มิลลิเมตร แล้วจงเฉลี่ยดูผลลัพธ์ที่วัดได้.

๖. ในแผนที่ฉะบับหนึ่งเขาใช้มาตราส่วน 1 นิ้ว แทนระยะ 100 ไมล์ จงลากเส้นตรงแทนระยะทาง 336 ไมล์ และ 408 ไมล์.

๗. ในแผนที่เขาใช้มาตราส่วน 1 นิ้วแทน 1 กิโลเมตร จงลากเส้นตรงแทนระยะทาง 850 เมตร, 2980 เมตร และ 1010 เมตร.

๘. ในแผนผังแผ่นหนึ่งเขาใช้ 1 นิ้วแทน 100 วา

เราจะต้องใช้เส้นยาวกี่เซ็นติเมตรกับกี่มิลลิเมตร แทน 417 วา.

๙. มาตราส่วนของแผนที่แผ่นหนึ่ง 1 ซม. = 5 กิโลเมตร จงหาเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ใช้แทน 42·5 กิโลเมตร แล้ววัดความยาวว่าเป็นกี่นิ้ว (ทศนิยมสองตำแหน่ง).

๑๐. ระยะทางตรงจากกรุงลอนดอนถึงเมืองออคซฟอรดไกล 55 ไมล์ ถ้าวัดในแผนที่ได้ 2.75 นิ้ว เขาใช้มาตราส่วนยาวเท่าไร หมายความว่านิ้วหนึ่งเขาใช้แทนกี่ไมล์ และ 1 ซม. แทนกี่กิโลเมตร (1 ซม. = 0.3937 นิ้ว; 1 กิโลเมตร = $\frac{5}{8}$ ไมล์).

๑๑. มาตราส่วนของแผนที่ฝรั่งเศส 1 นิ้ว = 35 ไมล์ ระยะทางจากกรุงปารีสถึงเมืองกาเลส 4.2 นิ้ว ระยะทางจริงไกลกี่ไมล์ และเป็นกี่กิโลเมตรโดยปริมาณ ให้บอกมาตราส่วนนตามมาตราเมตริกด้วย (1 กิโลเมตร = $\frac{5}{8}$)

๑๒. ระยะทางจากเมืองปลิมัท ถึงเมืองเอค-ซีเตอรไกล 37$\frac{1}{2}$ ไมล์ แต่ตามแผนที่อยู่ห่างกัน 2$\frac{1}{2}$ นิ้ว และระยะทางจากเมืองลินคอลนถึงเมืองยอรคไกล 88 กิโลเมตร แต่ตามแผนที่อยู่ห่างกัน 7 ซม. จงเปรียบเทียบมาตราส่วนของแผนที่สองแผ่นนี้ดูว่านิ้วหนึ่งใช้แทนกี่ไมล์.

๑๓. จงสร้างมาตราส่วนเย้ยาว 2 ซม. แทน 1 หลา กับให้แสดงจำนวนฟุตและนิ้วมาให้ด้วย.

เรขาคณิตภาคปฏิบัติ

บทสร้าง

การสร้างรูปในบทสร้างต่อไปนี้ ให้ใช้ฉะเพาะแต่ไม้บรรทัดกับวงเวียนเท่านั้น เพราะไม่ต้องการวัดขนาดของมุม หรือส่วนยาวของเส้น จึงไม่จำเป็นต้องใช้ไม้โปรแตรคเตอร์ หรือไม้ฟุตที่แบ่งเป็นช่อง ๆ.

นักเรียนต้องระวังให้มากในการสร้างรูปให้ได้ส่วนได้สัดถูกต้องทุก ๆ บท.

บทสร้างบทหนึ่งย่อมมีการพิสูจน์กำกับอยู่ด้วย แต่ผลของการสร้างควรจะได้รับการทดลองให้เห็นจริงด้วยการวัดว่ารูปที่สร้างนั้นถูกต้องดีแล้วหรือยัง บทสร้างโดยมากจึงจำเป็นต้องวัดให้แน่นอนว่าได้ส่วนสัดหรือไม่.

ในรูปต่าง ๆ ของบทสร้าง เส้นที่ใช้ช่วยในการพิสูจน์ เราเขียนเป็นจุด ๆ เช่น ..... เพื่อให้รู้ว่า

ไม่ใช่เส้นที่จำเป็นในการสร้าง.

เครื่องมือสำหรับใช้ในการสร้างรูปที่นักเรียนต้องมี คือ.

(๑) ไม้บรรทัดแบนอันหนึ่ง ริมข้างหนึ่งเป็นเซ็นติเมตรและมิลลิเมตร ริมอีกข้างหนึ่งเป็นนิ้วและเศษสิบของนิ้ว.

(๒) ไม้ฉากสองอัน อันหนึ่งมีมุม 45° สองมุม และอีกอันหนึ่งมีมุมหนึ่ง 60° กับ 30°.

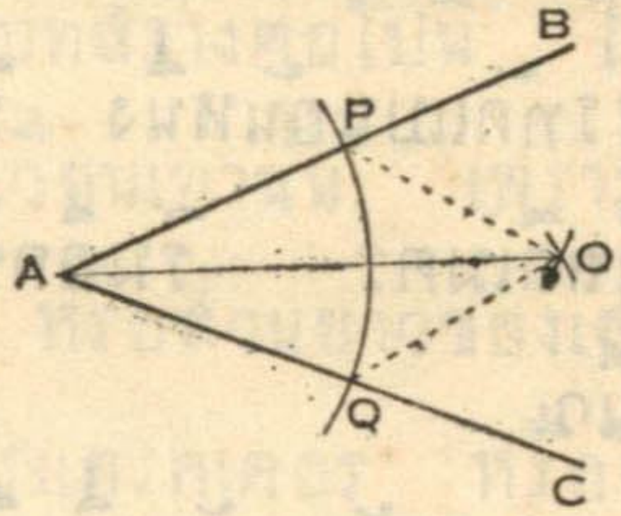
(๓) วงเวียนดินสอ.

(๔) ปากคีบ (A Pair of Dividers)

(๕) โปรแตรคเตอรูปครึ่งวงกลม (โดยมากทำด้วยโลหะ)

บทสร้างที่ ๑

จงแบ่งมุมที่กำหนดให้ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ BAC เป็นมุมมุมหนึ่งซึ่งจะต้องแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน..

สร้าง เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอควร (ในที่นี้เอา AP เป็นรัศมี) เขียนส่วนโค้งของวงกลมตัด AB ที่จุด P และ AC ที่จุด Q.

เอา P กับ Q เป็นจุดศูนย์กลางและ PQ เป็นรัศมี เขียนส่วนโค้งของวงกลมตัดกันที่จุด O ลาก เส้น AO เส้น AO จะแบ่งมุม BAC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

พิสูจน์ ลากเส้น PO และ QO

ในรูป △ APO และ AQO

$$\therefore \begin{cases} AP = AQ \text{ (รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน)} \\ PO = QO \text{ (รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน)} \\ AO \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore$ สามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

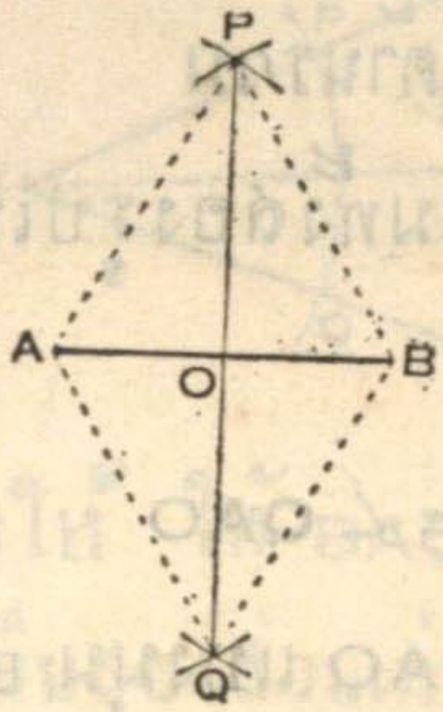
$\therefore \angle PAO = \angle QAO$

นี่ก็คือเส้นตรง AO แบ่งมุม BAC ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน.

นักเรียนจงสังเกตไว้ว่า การเอา P กับ Q เป็นจุดศูนย์กลาง และ PQ เป็นรัศมี แล้วเขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดกันที่จุด O นั้น เราจะใช้รัศมียาวเท่าไรแทนรัศมี PQ ก็ได้ แต่ต้องยาวพอที่จะทำให้ส่วนโค้งของวงกลมตัดกันได้ ถ้าแม้ว่าสั้นไป และส่วนโค้งของวงกลมไม่ตัดกัน เราก็จะไม่ได้จุด O ซึ่งเป็นจุดที่เราต้องการ.

บทสร้างที่ ๒

จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงที่จะต้องแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

สร้าง เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง และ AB เป็นรัศมี เขียนส่วนโค้งของวงกลมสองเส้นให้อยู่ข้างละเส้นของ AB.

เอา B เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้รัศมีเท่ากับ AB เขียนส่วนโค้งของวงกลมอีกสองเส้น ให้ตัดส่วนโค้งสองเส้นแรกที่จุด P และจุด Q.

ถากเส้น PQ ตัดเส้น AB ที่จุด O, O ก็จะเป็นจุดที่แบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

พิสูจน์ ถากเส้น AP, BP, AQ และ BQ

ใน $\triangle$ APQ กับ BPQ

$$\therefore \begin{cases} AP = BP & (\text{รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน}) \\ AQ = BQ & (\text{โดยเหตุเดียวกัน}) \\ PQ & \text{เป็นด้านร่วม.} \end{cases}$$

$\therefore \angle APQ = \angle BPQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

ใน $\triangle$ APO กับ BPO

$$\therefore \begin{cases} AP = BP \\ PO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \angle APO = \angle BPO \end{cases}$$

$\therefore$ AO = BO (ทฤษฎีบทที่ ๔)

นี่ก็คือ O เป็นจุดที่แบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

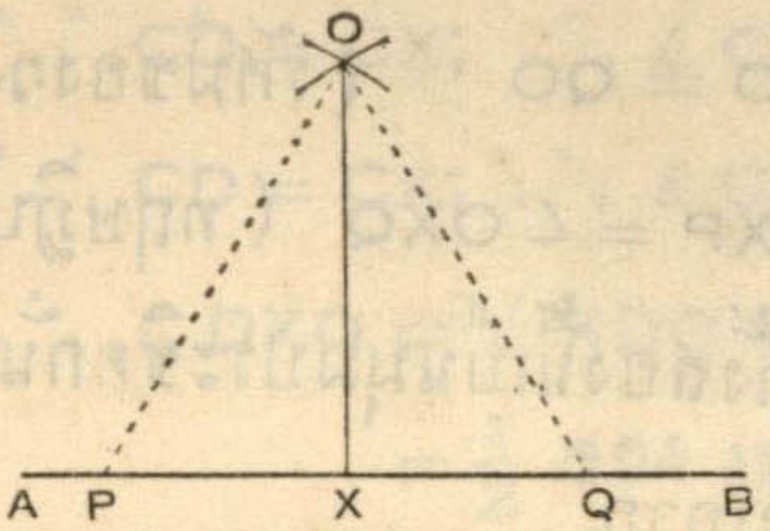
นักเรียนจงสังเกตไว้ว่า

(๑) การเอา AB เป็นรัศมีและ A กับ B เป็นจุดศูนย์กลาง แล้วเขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดกันนั้น เราจะใช้รัศมียาวเท่าไรก็ได้ แต่ต้องไม่สั้นกว่าครึ่งหนึ่งของเส้น AB มิฉะนั้นส่วนโค้งของวงกลมจะไม่ตัดกัน เราก็จะไม่ได้จุด P กับจุด Q ซึ่งเป็นจุดที่เราต้องการ.

(๒) เมื่อ △ APO กับ BPO เท่ากันทุกประการแล้ว มุม AOP ย่อมเท่ากับมุม BOP และมุมทั้งสองเป็นมุมประชิด เพราะฉะนั้นเส้น PQ ไม่แต่แบ่งเส้น AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่จุด O เท่านั้น ยังตั้งได้ฉากกับเส้น AB ด้วย.

บทสร้างที่ ๓

จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงซึ่งกำหนดให้ที่จุดจุดหนึ่งในเส้นตรงเส้นนั้น.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง X เป็นจุดจุดหนึ่งในเส้นตรง AB จะต้องลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X.

สร้าง เอา X เป็นจุดศูนย์กลาง ตัดส่วน PX ให้ยาวเท่ากับส่วน QX เอา P กับ Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี PQ เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดกันที่จุด O ลากเส้น OX.

OX ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X

พิสูจน์ ลากเส้น OP กับ OQ

ใน $\triangle$ OXP กับ OXQ

$$\therefore \begin{cases} PX = QX & \text{(โดยสร้าง)} \\ OX & \text{เป็นด้านร่วม} \\ PO = QO & \text{(รัศมีของวงกลมเท่ากัน)} \end{cases}$$

$\therefore \angle OXP = \angle OXQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

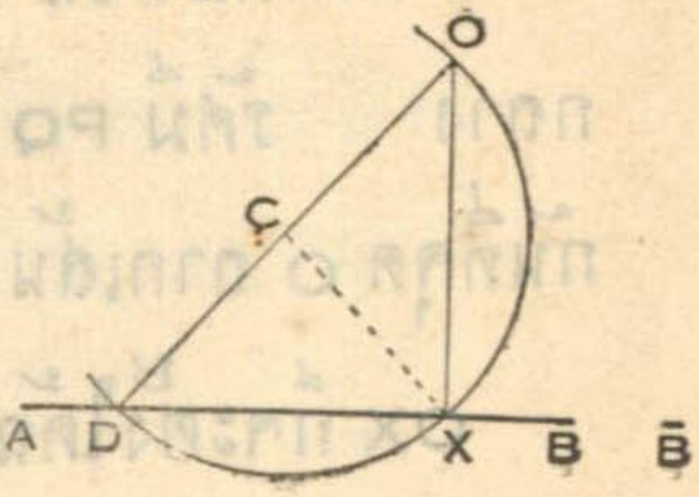
และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน ต่างก็ต้องเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

นี่ก็คือ OX ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X

สิ่งที่ต้องสังเกต ถ้าจุด X ที่กำหนดให้อยู่ใกล้ไปทางปลายเส้น AB ทางใดทางหนึ่ง เราสร้างได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้.

บทสร้างที่ ๓ (วิธีที่ ๒)

สร้าง ให้ C เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ภายนอกเส้น AB เอา C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CX



เขียนวงกลมให้ตัดเส้น AB ที่จุด D, ลากเส้น DC และต่อออกไปให้พบเส้นรอบวงที่จุด O, ลากเส้น OX.

. เส้น OX ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X.

พิสูจน์ ลากเส้น CX.

$\therefore\ CO = CX;\ \therefore\ \angle CXO = \angle COX$

และ $\therefore\ CD = CX;\ \therefore\ \angle CXD = \angle CDX$

$\therefore\ \angle DXO = \angle XDO + \angle XOD$

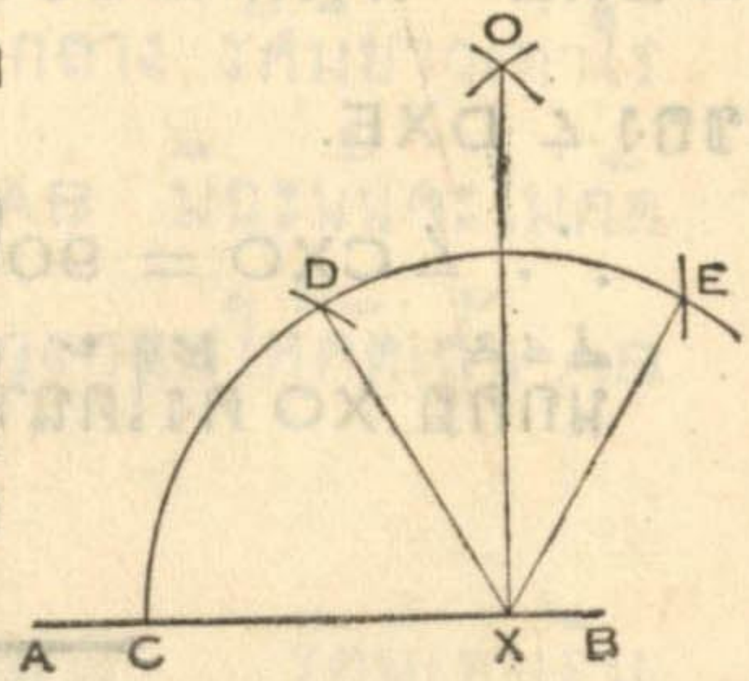
$= \frac{1}{2}$ ของ 180°

$= 90^\circ$

$\therefore$ OX ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X

บทสร้างที่ ๓ (วิธีที่ ๓)

สร้าง เอา X เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าไร ๆ ก็ได้ เขียนส่วนโค้งของวงกลม CDE ตัดเส้น AB ที่จุด C.



เอา C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าเดิม (คือ CX) เขียนส่วนโค้งของวงกลม ให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรกที่จุด D.

เอา D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าเดิม (CX) เขียนส่วนโค้งของวงกลม ให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรกอีกครั้งหนึ่งที่จุด E.

แบ่งมุม DXE ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน ด้วยเส้นตรง OX (บทสร้างที่ ๓).

OX ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X.

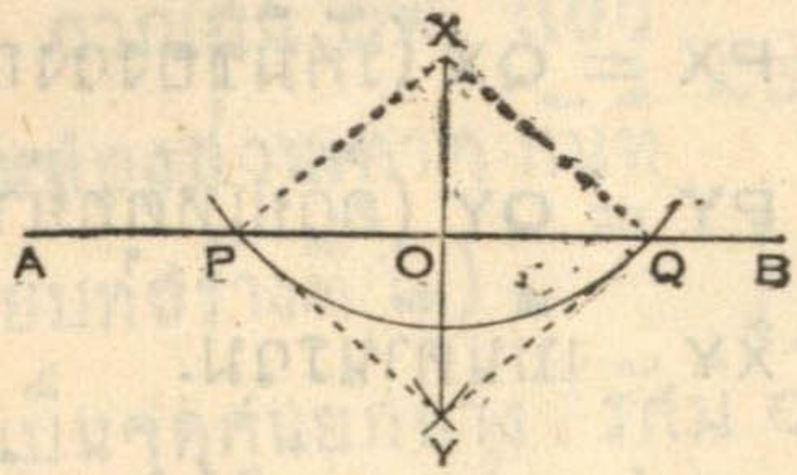
พิสูจน์ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\angle DXC$ หรือ $\angle DXE$ ต่างก็ $= 60^\circ$ และ $\angle DXO =$ ครึ่งหนึ่งของ $\angle DXE$.

$\therefore \angle CXO = 90^\circ$

นั่นคือ XO ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X.

บทสร้างที่ ๔

จงลากเส้นตรงจากจุดภายนอก ให้ตั้งได้ฉาก กับเส้นตรงที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ x เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่นอกเส้นตรง AB จะต้องลากเส้นจาก x ให้ตั้งได้ฉากกับ AB.

สร้าง เอา x เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าไรก็ได้ (แต่ต้องยาวเลยเส้น AB มิฉะนั้นจะไม่ตัดเส้น AB) เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดเส้น AB ที่จุด P และ Q.

เอา P กับ Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดกันที่จุด Y และให้

อยู่ตรงข้ามจุด X ลากเส้น XY ให้ตัด AB ที่จุด O,
XO ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด O.

พิสูจน์ ลากเส้น PX, QX, PY กับ QY.

ใน $\triangle$ PXY กับ QXY.

$$\therefore \begin{cases} PX = QX \text{ (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)} \\ PY = QY \text{ (ด้วยเหตุอย่างเดียวกัน)} \\ XY \text{ เป็นด้านร่วม.} \end{cases}$$

$\therefore \angle PXY = \angle QXY$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

ใน $\triangle$ PXO กับ QXO

$$\therefore \begin{cases} PX = QX. \\ XO \text{ เป็นด้านร่วม,} \\ \angle PXO = \angle QXO. \end{cases}$$

$\therefore \angle XOP = \angle XOQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

และมุมนี้เป็นมุมประชิดกัน ฉะนั้นต่างก็เท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

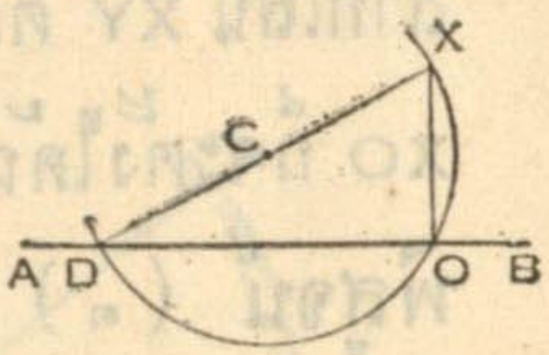
นี่ก็คือ XO ตั้งได้ฉากกับ AB,

สิ่งที่ต้องสังเกต ถ้าจุด X ที่กำหนดให้อยู่ใกล้

ไปทางปลายเส้น AB ในทางใดทางหนึ่ง ให้ใช้วิธีสร้างต่อไปนี้แทน.

บทสร้างที่ ๔ (วิธีที่ ๒)

สร้าง ให้ D เป็นจุดจุดหนึ่งในเส้น AB ลากเส้น DX แล้วแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กันที่จุด C (โดยบทสร้างที่ ๒)

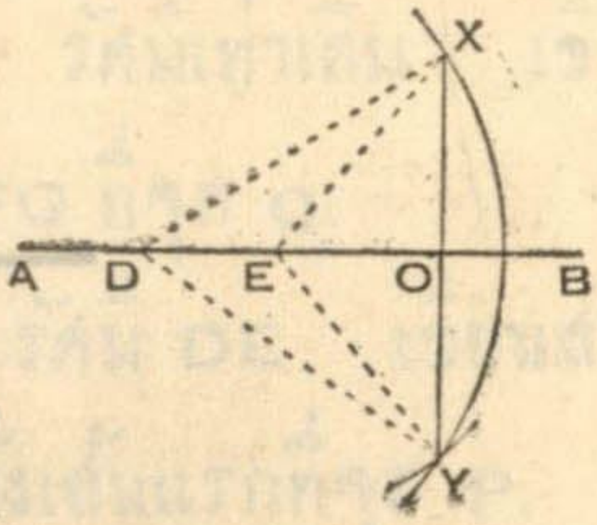


เอา C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CX เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดเส้น AB ที่จุด D กับ O, ลากเส้น XO.

XO ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB เพราะว่าตามบทสร้างที่ ๓ วิธีที่ ๒, มุม XOD เป็นมุมฉาก.

บทสร้างที่ ๕ (วิธีที่ ๓)

สร้าง ให้ D กับ E เป็นจุดสองจุดอยู่ในเส้น AB เอา D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี DX เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้



อยู่ตรงกันข้ามกับจุด X.

เอา E เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี EX เขียนส่วนโค้งของวงกลม ให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรกที่จุด Y.

ลากเส้น XY ตัดเส้น AB ที่จุด O.

XO ก็จะตั้งได้ฉากกับ AB.

พิสูจน์ (๑) ∵ △ XDE กับ YDE เท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

∴ ∠ XDE = ∠ YDE.

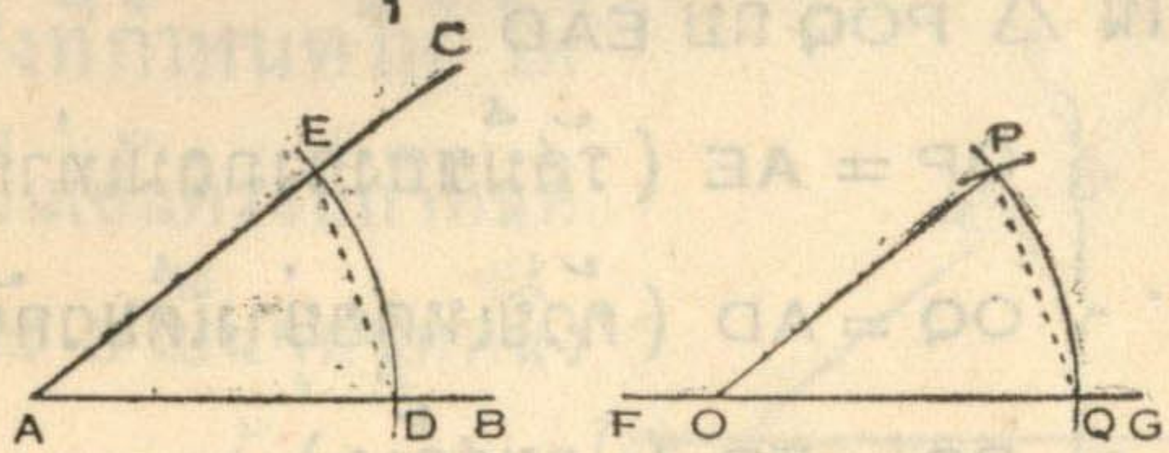
(๒) ∵ △ XDO กับ YDO เท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

∴ ∠ XOD = ∠ YOD และเป็นมุมประชิด ต่างก็ต้องเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.

นี่ก็คือ XO ตั้งได้ฉากกับ AB.

บทสร้างที่ ๕

ที่จุดจุดหนึ่งในเส้นตรงที่กำหนดให้ จงสร้างมุมมุมหนึ่งให้เท่ากับมุมที่กำหนดให้.



ให้ CAB เป็นมุมที่กำหนดให้ และ FG เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง O เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ในเส้น FG ที่จุด O นี้จะต้องสร้างมุมมุมหนึ่งให้เท่ากับมุม CAB.

สร้าง ให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าไรก็ได้ เขียนส่วนโค้งของวงกลมตัด AC ที่จุด E และ AB ที่จุด D.

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งของวงกลมตัดเส้น FG ที่จุด Q.

ให้ Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี DE เขียนส่วนโค้งของวงกลม ตัดส่วนโค้งเส้นแรกที่จุด P.

ลากเส้น OP

POQ จะเป็นมุมที่ต้องการ

พิสูจน์ ลากเส้น ED กับ PQ.

ใน $\triangle$ POQ กับ EAD

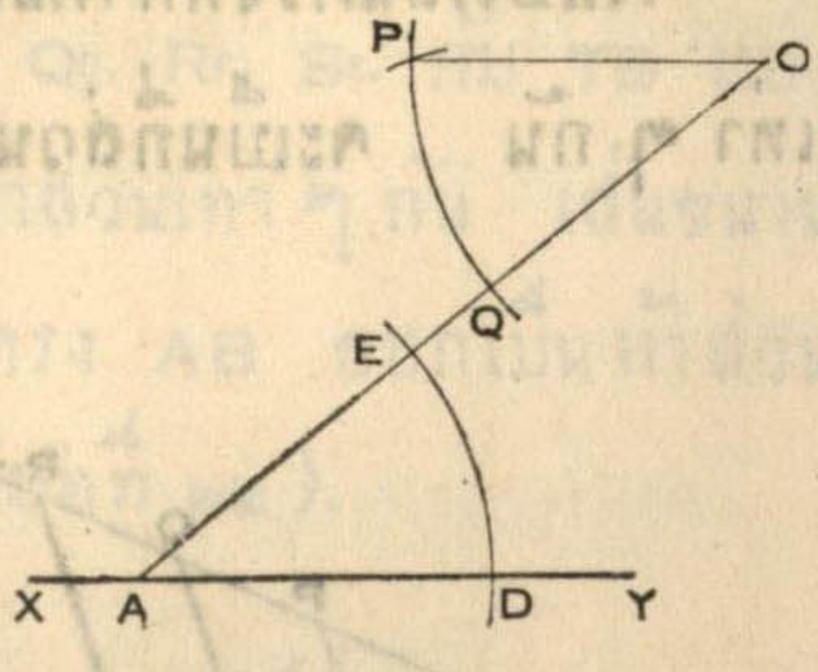
$$\therefore \begin{cases} OP = AE & (\text{รัศมีของวงกลมเท่ากัน}) \\ OQ = AD & (\text{ด้วยเหตุอย่างเดียวกัน}) \\ PQ = ED & (\text{โดยสร้าง}) \end{cases}$$

$\therefore$ สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ.

$\therefore \angle POQ = \angle EAD$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

บทสร้างที่ ๖

จงลากเส้นตรงจากจุดจุดหนึ่งให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ XY เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้ และ O เป็นจุดจุดหนึ่ง จะต้องลากเส้นตรงจากจุด O ให้ขนานกับ XY.

สร้าง ให้ A เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ในเส้น XY ลากเส้น OA (ใช้บทสร้างที่ ๕). ทำมุม AOP ที่จุด O ให้เท่ากับมุมแย้ง OAY. PO จะขนานกับ XY.

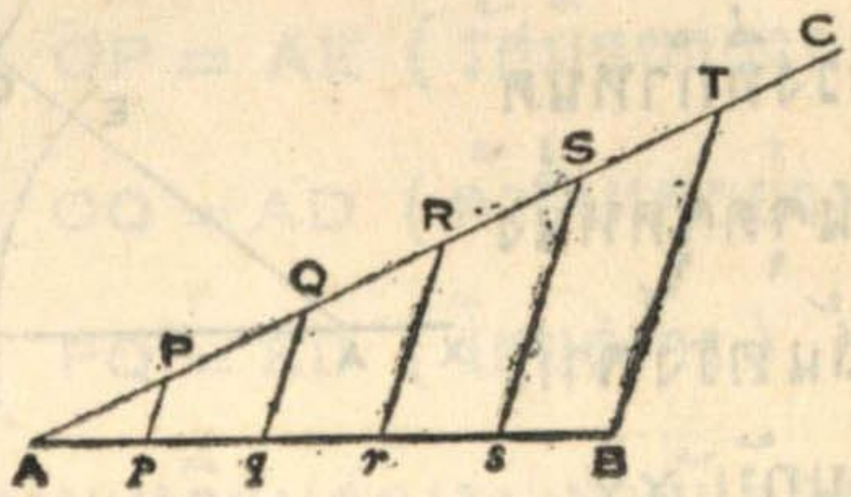
พิสูจน์ เพราะว่า AO ตัดเส้นตรง OP กับ XY ทำให้ ∠ POA = ∠ แย้ง OAY.

∴ OP จึงขนานกับ XY (ทฤษฎีบทที่ ๑๓).

(บทสร้างที่ ๓, ที่ ๔ กับที่ ๖ ไม่สู้ได้ใช้เท่าไรนัก เพราะว่าการเขียนเส้นขนานและเส้นตั้งได้ฉากเราใช้ไม้ฉากเขียนได้เร็วกว่า.)

บทสร้างที่ ๗

จงแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นหลาย ๆ ส่วน เท่า ๆ กัน จะเป็นกี่ส่วนก็ได้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้, สมมติว่าเราจะแบ่งเส้นตรงเส้นนี้ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน.

สร้าง ลากเส้น AC จากจุด A ยาวเท่าไรก็ได้ให้เป็นมุมกับเส้น AB.

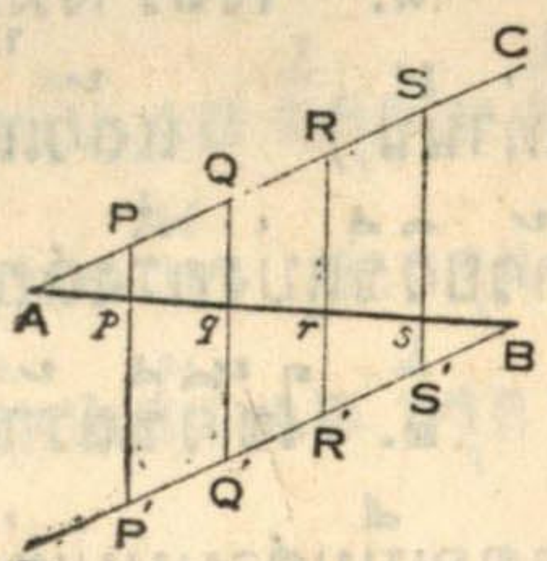
ตัดเส้น AC ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน คือ AP, PQ, QR, RS, ST. ส่วนหนึ่งจะยาวเท่าไร ๆ ก็ได้ (โดยใช้วงเวียน) ลากเส้น TB และ

และจากจุด P, Q, R, S. ลากเส้นตรงขนานกับ TB ตัดเส้น AB ที่จุด p, q, r และ s.

เมื่อเส้นขนาน Pp, Qq, Rr, Ss. กับ TB แบ่งเส้นตรง AT ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน เส้นขนานเหล่านี้ก็ย่อมแบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๒).

บทสร้างที่ ๗ (วิธีที่ ๒)

ให้ AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้



ลากเส้น AC จากจุด A ทำมุม CAB กับเส้นตรง AB ตัดเส้น AC ออกเป็นสี่ส่วนเท่าๆกัน ที่จุด P, Q, R, S. ลากเส้น BD จากจุด B ขนานกับ AC (บทสร้างที่ ๖) แล้วตัดเส้น BD ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด S′, R′, Q′, P′. และให้ทุก ๆ ส่วนยาวเท่ากับส่วนแบ่งในเส้น AC ลากเส้น

PP′, QQ′, RR′, SS′, ให้ตัดเส้น AB ที่จุด p, q, r, s, ดังนั้น Ap, pq, qr, rs, sB. จะเท่ากันหมด เราก็ได้แบ่งเส้นตรง AB ออกเป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน ที่จุด $p, q, r,$ และ s. (ใช้ทฤษฎีบทที่ ๒๐ กับทฤษฎีบทที่ ๒๒).

โจทย์แบบฝึกหัดว่าด้วยเส้นตรงและมุม

(แบบฝึกหัดสำหรับสร้าง)

๑. จงสร้างมุม 60° (ใช้ไม้บรรทัดกับวงเวียนเท่านั้น) แล้วแบ่งมุมนี้ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน ด้วยวิธีแบ่งครึ่งสองครั้ง.

๒. ใช้วิธีสร้างเหมือนข้อ ๑ ให้แบ่งมุมฉากออกเป็นสามมุมเท่าๆกัน แล้วแบ่งมุมย่อยเหล่านั้นออกเป็นมุมละสองมุมเท่า ๆ กัน และแสดงวิธีแบ่งมุม 45° ออกเป็นสามมุมเท่า ๆ กันด้วย.

(มุมอื่น ๆ ยังไม่มีใครทราบว่าจะแบ่งออกเป็นสามมุมเท่า ๆ กันได้อย่างไร).

๓. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งยาว 6.7 ซม.ออก เป็นห้าส่วนเท่า ๆ กัน แล้ววัดดูว่าส่วนหนึ่งยาวกี่นิ้ว (ทศนิยมสองตำแหน่ง) และคำนวณดูว่าจะได้เท่านั้นจริงหรือไม่ (1 ซม. = 0.3937 นิ้ว).

๔. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งยาว3.72นิ้วออก เป็นเจ็ดส่วนเท่า ๆ กัน และวัดดูว่าส่วนหนึ่ง ๆ ยาวกี่ ซม. กับกี่ มม. แล้วคำนวณดูอีกครั้งหนึ่งว่าได้เท่านั้นจริงหรือไม่.

๕. ลากเส้น XP ตั้งได้ฉากกับ AB ที่จุด X ซึ่งอยู่ในเส้น AB และให้ XP ยาว 1.8 นิ้ว จากจุด P ลากเส้น PQ ยาว 3 นิ้ว ให้พบเส้น AB ที่จุด Q จงวัดเส้น XQ.

(โจทย์บทสร้าง,ให้อธิบายวิธีสร้างกับพิสูจน์มาด้วย)

๖. ให้หาจุดจุดหนึ่งในเส้นตรง AB ซึ่งมีระยะห่างจากจุด C กับ D ที่กำหนดให้เท่ากัน.

อยากทราบว่าจะเป็นไปได้อย่างนี้เสมอหรือไม่

ถ้าเป็นไปไม่ได้ จุด C กับจุด D จะต้องอยู่อย่างไร กับเส้นตรง AB.

๗. ให้หาจุดจุดหนึ่งในเส้นตรง AB ซึ่งมีระยะทางห่างเท่า ๆ กันจากเส้นตรง CD กับ CE ซึ่งตัดกัน อยากทราบว่าจะเป็นไปได้อย่างนี้เสมอหรือไม่ ถ้าเป็นไปไม่ได้ เส้น CD กับ CE จะต้องตั้งอยู่อย่างไรกับเส้นตรง AB.

๘. จงลากเส้นตรง PQ จากจุด P ทำมุมกับเส้น AB ให้ใหญ่เท่ากับมุมที่กำหนดให้.

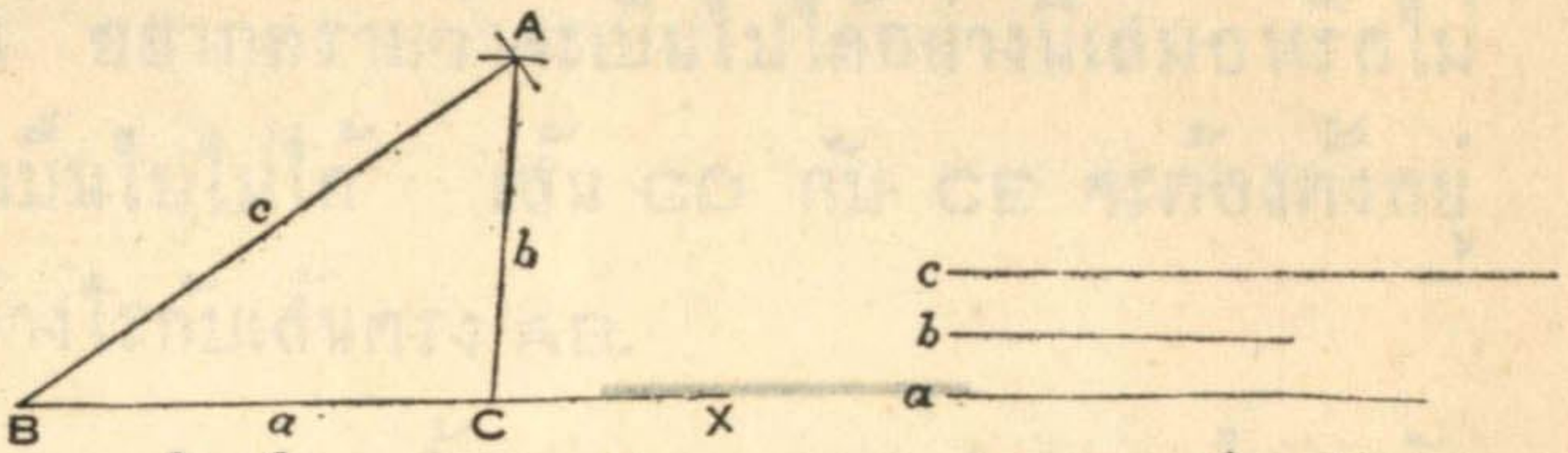
๙. ให้ลากเส้นตรงสองเส้นจากจุด P กับ C ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตรง AB ไปบรรจบกันที่เส้นตรง AB และให้ทำมุมกับเส้นตรง AB เท่า ๆ กัน (ให้ใช้วิธีสร้างอย่างนี้ คือ ลากเส้น PX จากจุด P ตั้งได้ฉากกับ AB ต่อเส้น PX ถึงจุด D ให้ PX=XD ลากเส้น CD ตัด AB ที่จุด Y ลากเส้น PY ให้พิสูจน์ว่า PY กับ CY เป็นเส้นตรงที่ต้องการ).

๑๐. A กับ B เป็นจุดที่กำหนดให้สองจุด P เป็นจุดจุดหนึ่ง ซึ่งเราจะต้องลากเส้นตรงผ่าน โดย ทำให้เส้นตั้งฉากจาก A กับ B มาถึงเส้นนี้ยาวเท่ากัน อยากทราบว่าจะเป็นไปได้เช่นนี้เสมอหรือไม่.

การสร้างรูปสามเหลี่ยม

บทสร้างที่ ๘

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้มีด้านทั้งสามยาวเท่ากับด้านที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ a, b กับ c เป็นส่วนยาวของด้านที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง △ ให้มีด้านทั้งสามยาวเท่ากับด้านที่กำหนดให้นี้.

สร้าง ลากเส้นตรง BX ตัดเอาส่วน BC ให้ยาวเท่ากับ a. เอา B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ c เขียนส่วนโค้งของวงกลม. เอา C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ b เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรกที่จุด A.

ลากเส้น AB กับ AC.

ABC ก็จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ เพราะว่าตามที่ได้สร้างไว้แล้ว ด้าน BC = a, ด้าน AC = b และด้าน AB = c

นักเรียนจงสังเกตไว้ว่า a, b กับ c นี้ใช้แทนชื่อเส้นตรงทั้งสามเส้น ซึ่งด้านของรูปสามเหลี่ยมจะต้องยาวเท่ากับเส้นตรงทั้งสามนี้ หรือมิฉะนั้นจะใช้ a, b กับ c แทนจำนวนนับ จำนวนเซ็นติเมตร หรือมาตราใดที่ใช้วัดทางยาวก็ได้.

หมายเหตุ (๑) ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมชะนิดนี้ต้องให้ด้านที่กำหนดให้สองด้านรวมกันยาวกว่าด้านที่สามตามทฤษฎีบทที่ ๑๑ มิฉะนั้นส่วนโค้งของวงกลมที่ใช้ B กับ C เป็นจุดศูนย์กลางจะไม่ตัดกันที่จุด A เราจะสร้างรูปสามเหลี่ยมไม่ได้.

(๒) ถ้าต่อส่วนโค้งซึ่งตัดกันที่จุด A ออกไปแล้ว ส่วนโค้งคู่นี้จะตัดกันอีกแห่งหนึ่ง ซึ่งอยู่ตรง

ข้ามกับจุด A ฉะนั้นจะได้สามเหลี่ยมสองรูป ตั้งอยู่ตรงข้ามของฐานที่ร่วมกัน.

ว่าด้วยการสร้างรูปสามเหลี่ยม

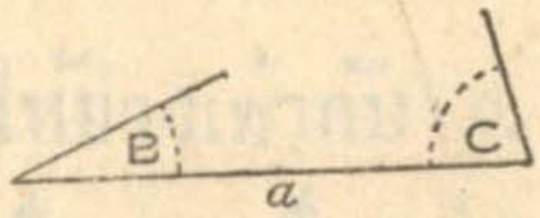
เราย่อมทราบดีอยู่แล้วว่า การที่จะพิสูจน์ให้สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการได้ ต้องอาศัยสิ่งที่กำหนดให้สามอย่างของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับสิ่งที่กำหนดให้สามอย่าง ของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง แต่ต้องเป็นสิ่งที่ตรงกันและได้ลำดับกัน (แม้แต่ส่วนทั้งสามที่เราไม่ต้องการ) นี่ก็เท่ากับกล่าวว่า รูป หรือ ขนาดของสามเหลี่ยมใด ๆ จักต้องอาศัยส่วนทั้งสามนี้ หรืออีกนัยหนึ่ง การสร้างรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จำเป็นต้องมีสิ่งที่กำหนดให้สามประการ.

เช่นจะสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งต้องมีสิ่งที่กำหนดให้ คือ

(๑) ด้านสองด้าน กับมุมในระหว่างด้าน วิธีสร้างไม่จำเป็นต้องอธิบายในที่นี้.

(๒) กำหนดมุมให้สองมุมกับด้านด้านหนึ่ง เพราะข้อนี้เมื่อรู้มุมสองมุมแล้วก็จะหามุมที่สามได้ตามทฤษฎีบทที่ ๑๖ มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งรวมกันเข้าเท่ากับ 180° เมื่อเป็นเช่นนี้เอาด้านที่กำหนดให้เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมแล้วทำมุมที่ปลายให้เท่ากับมุมสองมุมที่กำหนดให้ (หรือหาได้จากทฤษฎีบทที่ ๑๖) จงดูในรูป.

กำหนด ∠B, ∠C และด้าน BC (a) ให้



∴ ∠A+∠B+∠C=180°

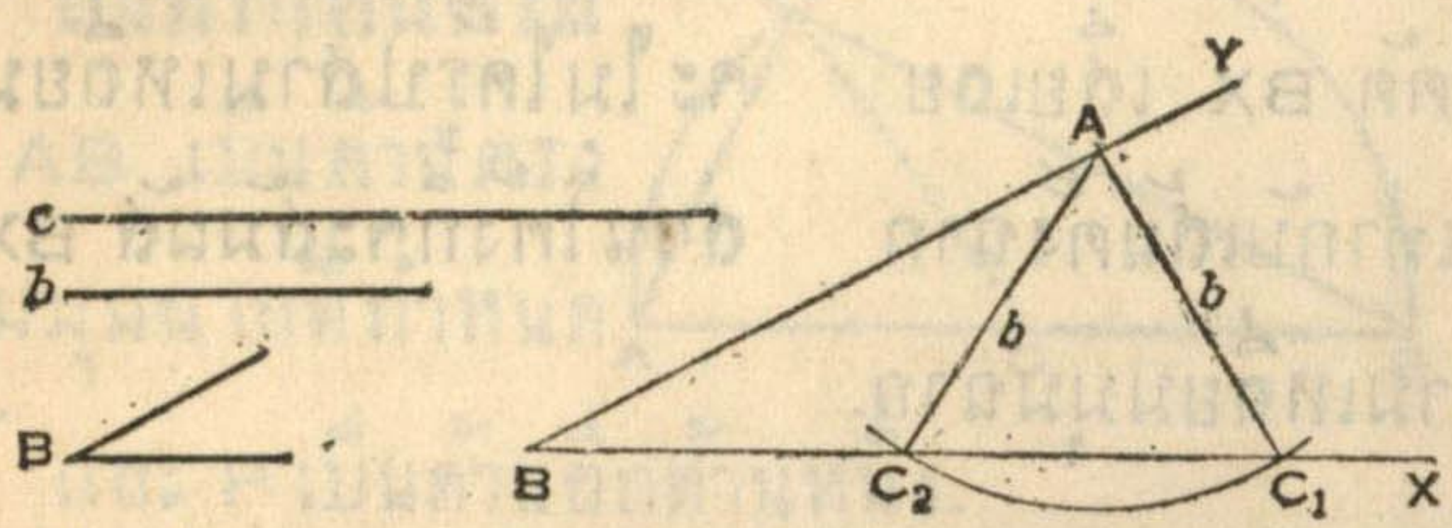
∴ มุมที่เหลือก็ต้อง =∠A

(๓) ถ้ากำหนดมุมให้สามมุม (แต่ไม่กำหนดด้านให้) จะสร้างรูปสามเหลี่ยมได้หลายร้อยหลายพันรูป นับว่าการสร้างรูปสามเหลี่ยมชนิดนี้ไม่มีที่สิ้นสุด.

เพราะว่าถ้าปลายฐานทำมุมทั้งสองให้เท่ากับมุมสองมุม ดังปรากฏในรูปแล้ว มุมที่สามก็ต้องเท่ากับมุม A อยู่เอง ในการที่สร้างได้หลายร้อยหลายพันรูปนี้ ก็เนื่องจากสิ่งที่กำหนดให้สามประการนั้นยังต้องอาศัยกันและกันไม่เหมือนข้อ (๑) กับข้อ (๒) ซึ่งจะอาศัยรู้ด้านจากมุมที่กำหนดให้ไม่ได้ หรือจะอาศัยรู้มุมจากด้านที่กำหนดให้ก็ไม่ได้เหมือนกัน ส่วนข้อ (๓) หามุมที่สามได้โดยอาศัยรู้มุมสองมุมที่กำหนดให้ (ตามทฤษฎีบทที่ ๑๖)

บทสร้างที่ ๙

จงสร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง กำหนดด้านให้สองด้าน กับมุมมุมหนึ่ง ซึ่งอยู่ตรงข้ามด้านใดด้านหนึ่งที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ b กับ c เป็นด้านที่กำหนดให้ และ B เป็นมุมที่กำหนดให้.

สร้าง ลากเส้น BX และที่จุด B ทำมุม YBX = มุม B ที่กำหนดให้.

ตัดเส้น BY เอาแต่เพียง AB ให้ยาวเท่ากับ c.

เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี b เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดเส้น BX ที่จุด C_1 กับ C_2, ลากเส้น AC_1 กับ AC_2. $\triangle ABC_1$ หรือ ABC_2 รูปหนึ่งรูปใดก็จะเป็นสามเหลี่ยมที่เราต้องการ.

การที่ได้สามเหลี่ยมสองรูปนั้น เขาเรียกว่า บัญหาสองง่าม (Ambiguous Case) จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อด้าน b สั้นกว่าด้าน c และยาวกว่าเส้นตั้งได้ฉากจากจุด A ถึงเส้นตรง BX ถ้าไม่ยาวกว่าก็จะไม่ตัด BX เสียเลย จะไม่ได้รูปสามเหลี่ยม ถ้ายาวเท่ากับเส้นตั้งฉาก ส่วนโค้งก็จะสัมผัส BX จะได้สามเหลี่ยมมุมฉาก.

โจทย์แบบฝึกหัด

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมแสดงให้เห็นลักษณะและจำนวนวิธีตามโจทย์ข้างล่างนี้:-

(๑) ถ้าด้าน b ยาวกว่าด้าน c

(๒) ถ้าด้าน b ยาวเท่ากับด้าน c

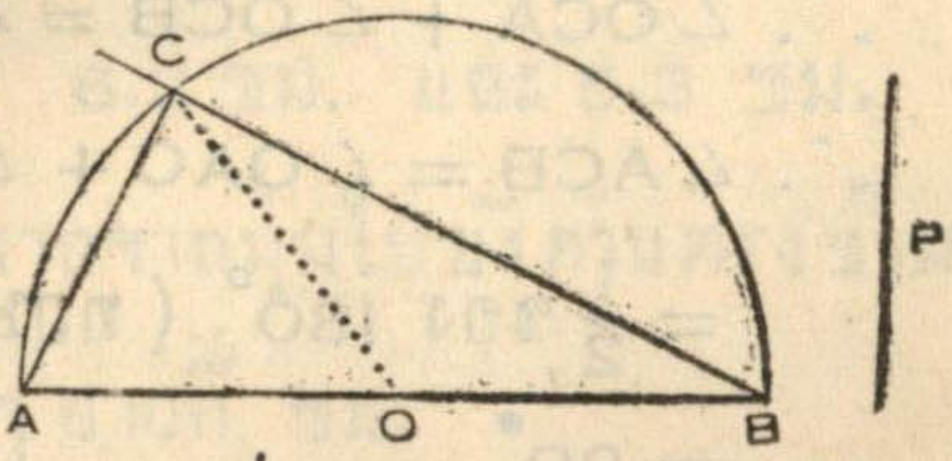
(๓) ถ้าด้าน b ยาวเท่ากับเส้นตั้งได้ฉากจากจุด A ถึงเส้นตรง BX.

(๔) ถ้าด้าน b สั้นกว่าเส้นตั้งได้ฉากเส้นนี้.

บทสร้างที่ ๑๐

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดด้านตรงข้ามมุมฉากกับด้านอีกด้านหนึ่งให้

สิ่งที่กำหนดให้



ให้ AB เป็นด้านตรง

ข้ามมุมฉากที่กำหนด

ให้ และ P เป็นด้านอีกด้านหนึ่ง.

สร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่จุด O (บทสร้างที่ ๒)

และเอา O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี OA เขียนครึ่งวงกลม.

เอา A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ P เขียนส่วนโค้งให้ตัดครึ่งวงกลมที่จุด C.

ลากเส้น AC และ BC.

ABC จะเป็นสามเหลี่ยมที่เราต้องการ.

พิสูจน์ ลากเส้น OC.

$\therefore$ OA = OC

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$

แต่ $\therefore OB = OC$

$\therefore \angle OCB = \angle OBC$

$\therefore \angle OCA + \angle OCB = \angle OAC + \angle OBC$

$\therefore \angle ACB = \angle OAC + \angle OBC$

$= \frac{1}{2}$ ของ 180° (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$= 90^\circ$

ว่าด้วยการสร้างรูปสามเหลี่ยม
(แบบผึกหัดสำหรับสร้าง)

(๑) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้ด้านทั้งสามยาว 7·5 ซม. 6.2 ซม. และ 5.3 ซม.

ให้ลากเส้นตั้งได้ฉากจากมุมไปยังด้านตรงข้ามแล้ววัดดูว่าเส้นหนึ่ง ๆ ยาวกี่ ซม.

(จงจำไว้ว่าเส้นตั้งฉากทั้งสามเส้นนี้จะมาพบกันที่จุดจุดหนึ่ง ซึ่งจะได้พิสูจน์ในภายหลัง).

(๒) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ด้าน $AB = 2{\cdot}75''$, $BC = 3{\cdot}00''$ และ $CA = 2{\cdot}50''$

แล้วแบ่งมุม A ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กันด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งลากไปถึงด้านตรงข้ามของมุม A ที่จุด X. วัด BX กับ CX (ทศนิยมสองตำแหน่ง) แล้วจงหาค่าของ $\frac{BX}{CX}$ (ทศนิยมสองตำแหน่ง) จงเทียบเลขดัชนีกับค่าของ $\frac{AB}{CA}$ ด้วย.

(๓) นาแห่งหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านสองด้านยาว 315 หลากับ 260 หลา และมีมุมในระหว่างด้านกาง 39° จงทำแผนที่ของนานี้ (ใช้มาตราส่วน 1 นิ้ว = 100 หลา) แล้ววัดดูว่าด้านที่เหลืออยู่ยาวเท่าไร.

(๔) ABC เป็นที่ดินรูปสามเหลี่ยมแปลงหนึ่ง ซึ่งมี BC ยาว 75 เมตรเป็นด้านฐาน มีมุม B = 47°, มุม C = 68° จงทำแผนที่ (ใช้มาตราส่วน 1 ซม. = 10 เมตร) มุม A จะกางกี่องศา (ห้ามไม่ให้วัดด้านที่เหลืออีกสองด้าน) แล้วให้หาส่วนยาวของเส้นตั้งฉากจากมุม A ถึงฐาน BC.

(๕) เรือยอชต์ลำหนึ่งกำลังแล่นออกจากท่าชั่วโมงละ 9 นอต หันหัวเรือไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ พอเวลาล่วงไป 20 นาทีได้เปลี่ยนทิศคือแล่นไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนืออีก 35 นาที เรือลำนี้จะอยู่ห่างจากท่าเท่าไร และเมื่อจะแล่น

กลับเข้าท่าต้องหันหัวไปทางทิศไหน ให้ทำแผนที่ทางเดินของเรือใช้มาตราส่วน 2 ซม. = 1 นอต.

(๖) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC กำหนดให้ AB ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10.6ซม. และให้ด้าน BC ยาว 5.6 ซม. จงวัดด้าน AC และหาค่าของ $\sqrt{AB^2-BC^2}$ แล้วเปรียบเทียบผลลัพธ์นี้กับด้าน AC.

(๗) กำหนดให้ $\angle B = 34^\circ$, ด้าน AC=5·5 ซม. ด้าน AB = 8·5 ซม. ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมและแสดงให้เห็นว่าอาจสร้างสามเหลี่ยมเช่นนี้ได้สองรูป แล้วจงวัดด้าน BC กับมุม C และแสดงให้เห็นว่ามุม C ทั้งสองมุมนั้นต่างเป็นมุมประกอบของมุมฉากแก่กันและกัน.

(๘) ในรูปสามเหลี่ยม ABC, $\angle A = 50^\circ$ และด้าน AC = 6.5 ซม. จงแสดงให้เห็นความแตกต่างของการสร้างรูปสามเหลี่ยมนี้ ถ้า (๑)

ด้าน BC = 7 ซม. (๒) ด้าน BC = 6 ซม.
(๓) ด้าน BC = 5 ซม. (๔) ด้าน BC=4 ซม.
เขียนรูปมาให้ดูด้วย.

(๙) ถนนตรงสองสายตัดกันเป็นมุมฉากที่จุดA มีคลองตรงคลองหนึ่งขุดผ่านถนน คลองสายนี้มีสะพาน B กับ C สำหรับข้าม ระยะทางจากสะพาน B ถึงสะพาน C ยาว 461 หลา และตั้งแต่สี่แยก A ถึงสะพาน B ยาว 261 หลา ให้เขียนแผนที่และวัดระยะทางจากสี่แยก A ถึงสะพาน C ว่ายาวกี่หลา (โจทย์บทสร้าง ให้อธิบายวิธีสร้างและพิสูจน์มาด้วย.)

(๑๐) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสูง 6.2ซม. บนด้านฐานซึ่งยาว 4 ซม. จงพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมรูปนี้มีด้านเท่ากันสองด้าน แล้ววัดดูว่าด้านหนึ่งยาวกี่ซม. (ทศนิยมสองตำแหน่ง).

(๑๑) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้มี

มุมยอดเท่ากับมุมที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉาก จากมุมยอดถึงด้านฐานต้องยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย อาศัยวิธีสร้างนี้ จงสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีเส้นตั้งได้ฉากจากมุมถึงด้านตรงข้ามยาว 6 ซม. แล้ววัดดูว่าด้านหนึ่งยาวกี่ ซม. (ทศนิยมสองตำแหน่ง).

(๑๒) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ด้าน AB = 5·8 ซม. ด้าน AC = 9.0 ซม. และเส้นตั้งได้ฉากจากมุม A ถึงฐาน BC = 5.0 ซม. แล้ววัดด้าน BC.

(๑๓) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มีมุม B = มุม M มุม C = มุม N ที่กำหนดให้ และให้เส้นตั้งได้ฉากจากมุม A ถึงฐาน BC ยาวเท่ากับเส้นตรง P ที่กำหนดให้.

(๑๔) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC กำหนดมุม B, มุม C และด้าน AC ให้ (ห้ามไม่ให้ใช้โปรแทรกเตอร์)

(๑๕) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วบนฐานที่กำหนดให้ ให้มีมุมยอด = มุม L ที่กำหนดให้.

(๑๖) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดส่วนยาวของ AB ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากให้ และกำหนดผลบวกของด้านที่ยังเหลืออยู่อีกสองด้าน คือด้าน AC และด้าน BC ให้ด้วย ถ้าด้าน AB=5.3 ซม. และ AC + BC = 7.8 ซม. ให้วัดด้าน AC กับด้าน BC แล้วจงหาค่าของ $\sqrt{AC^2+BC^2}$

(๑๗) ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม กำหนดผลบวกของด้านทั้งสามกับมุมที่ฐานคู่หนึ่งให้ เช่น AB + BC + CA = 12 ซม. มุม B = 70°, และมุม C = 80°.

(๑๘) กำหนดให้ BC = 6.5 ซม. AB + AC = 10 ซม. และมุม B = 60° จงสร้างสามเหลี่ยม ABC แล้ววัดด้าน AC กับ AB.

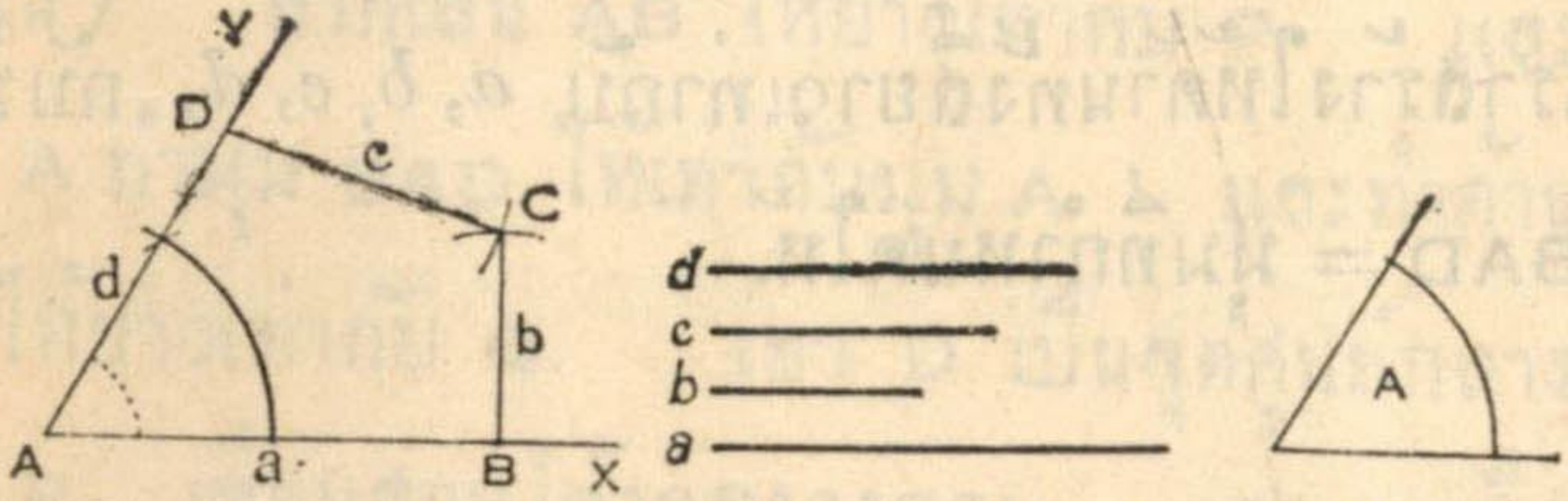
(๑๙) กำหนดให้ BC = 7 ซม. AB — AC = 1 ซม. และมุม B = 55° จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ววัดด้าน AC กับ AB.

วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ (Quadrilaterals)

ตามที่ได้อธิบายมาแล้วว่า การที่จะรู้ขนาดและรูปของสามเหลี่ยมใด ๆ ได้ จำเป็นต้องรู้ส่วนยาวของด้านทั้งสาม แต่รูปสี่เหลี่ยมนั้นจะอาศัยส่วนยาวของด้านทั้งสี่ไม่ได้ จำเป็นต้องรู้ส่วนที่กำหนดให้ถึงห้าส่วน จึงจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าได้.

บทสร้างที่ ๑๑

กำหนดส่วนยาวของด้านทั้งสี่ และมุมมุมหนึ่งให้ ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยม (Quadrilateral)



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ a, b, c, d เป็นส่วนยาวของด้านทั้งสี่ที่กำหนดให้ A เป็นมุมมุมหนึ่งซึ่งกำหนดให้ อยู่ในระหว่างด้าน a กับด้าน d

สร้าง ลากเส้นตรง AX ยาวเท่าไร ๆ ก็ได้ แล้ว
ตัดเอาแต่เพียง AB ให้ยาวเท่ากับ a

ทำมุม BAY ให้เท่ากับมุม A

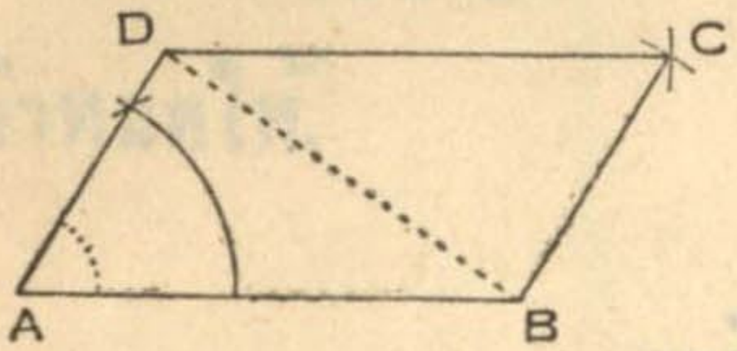
ตัดเส้น AY เอาแต่เพียง AD ให้ยาวเท่ากับ d
เอา D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี c เขียนส่วนโค้ง
ของวงกลม. เอา B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี b
เขียนส่วนโค้งของวงกลม ให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรก
ที่จุด C.

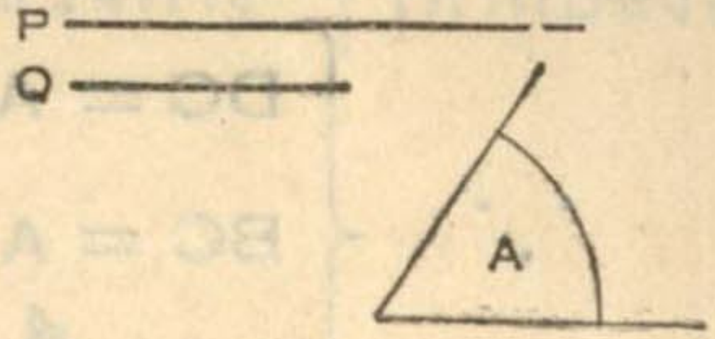
ลากเส้น DC กับ BC

ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมที่ต้องการ เพราะว่า
เราสร้างให้ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากับ $a, b, c, d,$ กับมีมุม
BAD = มุมที่กำหนดให้.

บทสร้างที่ ๑๒

กำหนดด้านประชิดให้สองด้านกับมุมในระหว่างด้านคู่นี้ ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.





สิ่งที่กำหนดให้ ให้ P กับ Q เป็นส่วนยาวของด้านสองด้าน และ A เป็นมุมมุมหนึ่ง.

สร้าง วิธีที่ ๑ (ใช้แต่วงเวียนกับไม้บรรทัดเท่านั้น) ลากเส้น AB ให้ยาวเท่ากับ P และที่จุด A ทำมุม BAD ให้เท่ากับมุม A และทำด้าน AD ให้ยาวเท่ากับ Q. เอา D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี P เขียนส่วนโค้งของวงกลม. เอา B เป็นศูนย์กลาง รัศมี Q เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดส่วนโค้งเส้นแรกที่จุด C.

ABCD ก็จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานตามความต้องการ.

พิสูจน์ ลากเส้น DB

ใน $\triangle$ DCB กับ BAD

$\therefore$ $\begin{cases} DC = AB \\ BC = AD \\ BD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore \angle CDB = \angle ABD$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

และมุมคู่แย้งก็เป็นมุมแย้ง.

$\therefore$ CD ต้องขนานกับ AB

และ CD = AB ด้วย

$\therefore$ AD และ BC ต้องขนานกันและเท่ากันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

$\therefore$ ABCD จึงต้องเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

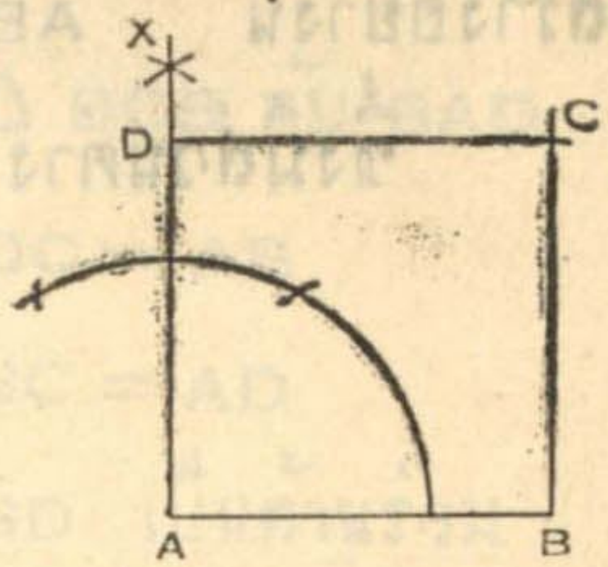
สร้าง วิธีที่ ๒ (ใช้ไม้ฉาก) ลากเส้น AB กับ AD ดังในวิธีที่ ๑ ใช้ไม้ฉากลากเส้น CD จาก

จุด D ให้ขนานกับ AB และลากเส้น BC จากจุด B ให้ขนานกับ AD.

เนื่องจากวิธีสร้างอย่างนี้ ABCD ก็จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีส่วนต่าง ๆ เท่ากับสิ่งที่กำหนดให้.

บทสร้างที่ ๑๓

ให้สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัสรบนฐานที่กำหนดให้.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้

สร้าง วิธีที่ ๑ (ใช้วงเวียนกับไม้บรรทัด) จากจุด A ลากเส้น AX ตั้งได้ฉากกับ AB และตัด AX เอาแต่ส่วน AD ให้ยาวเท่ากับ AB.

เอา B กับ D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AB เขียนส่วนโค้งของวงกลมให้ตัดกันที่จุด C.

ลากเส้น BC กับ CD.

ABCD ก็จะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามความต้องการ.

พิสูจน์ ดังบทสร้างที่ ๑๒, ABCD เป็นสี่เหลี่ยม

ด้านขนาน และเมื่อ ∠BAD เป็นมุมฉาก รูปนี้ก็ต้องเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่เราสร้างให้ด้านทั้งสี่ด้านเท่ากันหมด.

∴ ABCD จึงต้องเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

โจทย์แบบฝึกหัด

ว่าด้วยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ

(๑) จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า (Rhombus) ให้มีด้านยาวเท่ากับด้าน PQ ที่กำหนดให้ และให้เส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งยาวเท่ากับเส้นนั้นด้วย จงคะเนดูว่ามุมหนึ่ง ๆ กางออกได้กี่องศา (โดยไม่ต้องวัด) ให้อธิบายเหตุผลด้วย.

(๒) จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งบนด้านยาว 2.5" และพิสูจน์ให้เห็นว่า เส้นทะแยงมุมทั้งคู่ยาวเท่ากัน แล้วจงวัดเส้นทะแยงมุมคู่นี้ว่ายาวเส้นละกี่นิ้ว (ทศนิยมสองตำแหน่ง) เพื่อสอบ

ดูว่ารูปที่เขียนไว้นั้นถูกต้องดีหรือไม่.

(๓) กำหนดด้านทะแยงมุมให้ยาว 3". จง สร้างสี่เหลี่ยมจัตรัสร และวัดส่วนยาวของด้านมา ทุก ๆ ด้าน แล้วให้เฉลี่ยผลบวกของด้านที่วัดได้.

(๔) กำหนดให้ด้าน AB = 5.5 ซม. BD = 6 ซม. ด้านทะแยง AC = 8 ซม. จงสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD แล้ววัดด้าน AD.

(๕) รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง (A Quadrilateral) มีเส้นทะแยงมุมเท่ากัน (ยาวเส้นละ 6 ซม.) และเส้นทะแยงมุมคู่นี้แบ่งครึ่งกันได้มุมมุมหนึ่ง = 60° จงแสดงให้เห็นว่าต้องมีสิ่งที่กำหนดให้ห้าประการพร้อมแล้ว.

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมนี้มาให้ดู บอกชื่อด้วยว่าเป็นสี่เหลี่ยมชะนิดไหน ให้พิสูจน์มาด้วย จงวัดด้านทั้งสี่ แล้วหาผลบวกของด้านเหล่านั้น ถ้ามุมที่เส้นทะแยงมุมตัดกัน เพิ่มขึ้นจนถึง 90° ผลบวกของด้านทั้งสี่จะต้องเพิ่มขึ้นร้อยละเท่าไร.

(๖) ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD, AB = 5·6 ซม., BC = 2·5 ซม., CD = 4·0 ซม. และ AD = 3·3 ซม. จงแสดงให้เห็นว่า ที่กำหนดให้เท่านี้จะไม่ทราบลักษณะแน่นอนของสี่เหลี่ยมรูปนี้.

ให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ ถ้า (๑) มุม A=30° (๒) มุม A = 60° แต่ถ้ามุม A = 100° ทำไมจึงสร้างไม่ได้.

ให้หาจากวิธีสร้างว่ามุม A จะต้องเป็นมุมอย่างน้อยที่สุดกี่องศา จึงจะทำให้สร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ไม่ได้.

(๗) กำหนดส่วนยาวของด้านให้สี่ด้าน กับเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่ง จงแสดงวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ สิ่งที่กำหนดให้จักต้องมีลักษณะอย่างไรจึงจะสร้างได้เสมอ ให้สร้างสี่เหลี่ยม ABCD กำหนดให้ (๑) AB = 3″, BC = 1·7″, CD = 2.5″, DA = 2·8″ และเส้นทะแยงมุม

$\overline{BD} = 2.6''$ แล้ววัดด้าน AC (๒) AB=3.6 ซม.
BC = 7.7 ซม. CD = 6.8 ซม. DA = 5.1 ซม.
และเส้นทะแยงมม AC = 8.5 ซม. แล้ววัดมม B
กับมุม D.

โลไซ (เอกพจน์โลกัส)

คำนำ นักเรียนโดยมาก แม้แต่นักเรียนมัธยมปีที่ ๘ ก็ยังไม่ใคร่เข้าใจดีนักว่า โลไซ คือ อะไร โจทย์ที่ว่าด้วยโลไซมักจะทำไม่ได้ เพราะนักเรียนไม่ใคร่เข้าใจสิ่งที่เรียนมาแล้วแต่ตอนต้น ๆ ดี ฉะนั้นข้าพเจ้าขอแนะนำให้ครูบอกแก่นักเรียนให้ทราบว่า โลกัสหรือโลไซนี้มิใช่อื่นไกล คือ เส้นเส้นหนึ่ง (เส้นคดหรือเส้นตรงก็ได้) แต่ว่าต้องมีกฎบังคับเส้นตรงหรือเส้นคดนี้ด้วย เมื่อนักเรียนรู้วิชาคำนวณมากขึ้น ก็ย่อมมีโอกาสทราบได้ว่าโลกัสเป็น เส้น.

ตามคำจำกัดความ โลกัสของจุดจุดหนึ่ง คือทางเดินที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของจุดนั้น แต่ต้องมีกฎบังคับว่าจุดนั้นจะต้องเคลื่อนที่อย่างไร.

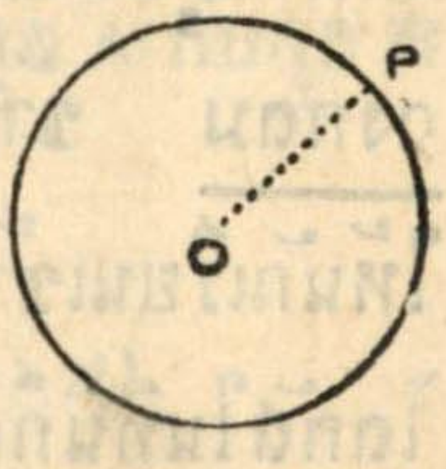
นักเรียนพึงดูจะเข้าใจได้ยาก ข้าพเจ้าเองเมื่อยังเด็กก็ไม่รู้เรื่องทีเดียว จึงอยากจะแนะให้ครูสอน

ให้นักเรียนของตนเข้าใจ อย่าสอนให้จำแต่คำจำกัดความ วิธีสอนควรสอนดังนี้

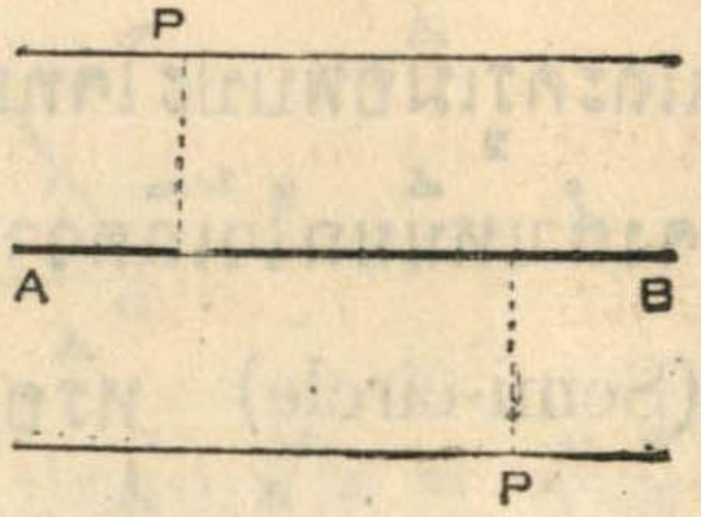
วิธีสอนโลกัสของจุด เมื่อนักเรียนเข้าใจว่าโลกัสเป็นทางเดินของจุดแล้ว ให้นักเรียนคิดหาว่าเราจะเอาอะไรมาแทนทางเดินของจุดนี้ (เส้น) เพราะว่าจุดเมื่อเคลื่อนที่ก็ย่อมทำให้เกิดเป็นเส้น ส่วนกฎนั้นมีความว่าอย่างไร พูดถึงกฎเราต้องมีอะไรเป็นหลักเป็นเกณฑ์เสียก่อน จึงจะตั้งขึ้นได้ ถ้าเช่นนั้นเราเอาจุดหรือเส้น ฯลฯ เป็นเกณฑ์ กฎมีอยู่ว่า เมื่อจุดเคลื่อนที่ไปแล้ว ไม่ว่าจะไปอยู่ในที่ใด จำเป็นต้องอยู่ห่างจากจุดหรือเส้น ฯลฯ ที่เรากำหนดไว้เป็นเกณฑ์ มีระยะทางเท่า ๆ กันทุกแห่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้.

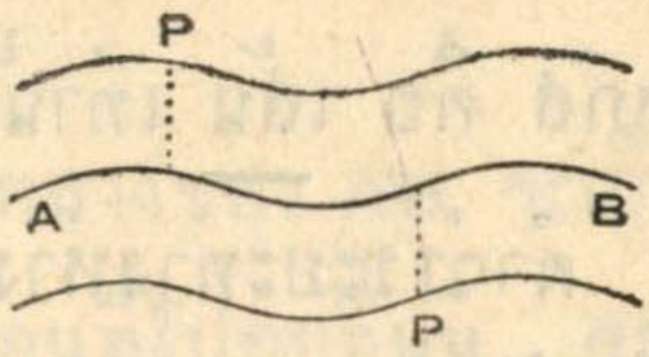
ตัวอย่างที่ ๑ สมมติว่าเราจะหาโลกัสของจุด P เอาจุด O เป็นเกณฑ์ (จงจำไว้อีกว่าถ้าเราเอาอะไรเป็นเกณฑ์ จะเป็นจุดหรือเส้นก็ดี จุดและเส้น

เหล่านี้ต้องเคลื่อนที่ไม่ได้) ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่าโลกัส ของจุด P ก็คือ เส้นรอบวงของวงกลม เพราะว่า P จะอยู่ณที่ใด ๆ บนเส้นรอบวงนี้ ก็ย่อมมีระยะทางห่างจากจุด O เท่า ๆ กัน (รัศมีของวงกลมอันเดียวกันย่อมเท่ากัน) สมกับกฎที่มีไว้บังคับ.



ตัวอย่างที่๒ ให้หาโลกัสของจุด P เอาเส้นตรง AB เป็นเกณฑ์ โลกัสของจุด P ในที่นี้ก็คือ เส้นตรงขนานกับ AB ข้างหนึ่งข้างใดของ AB ก็ได้ แล้วแต่จุด P จะเดิน เพราะจุด P จะอยู่ณที่ใด ๆ บนเส้นตรงขนานเส้นนี้ ย่อมมีระยะทางห่างจากเส้นตรง AB เท่า ๆ กัน (เราพิสูจน์ได้) สมกับกฎที่มีไว้บังคับ (ถ้าเส้นเกณฑ์





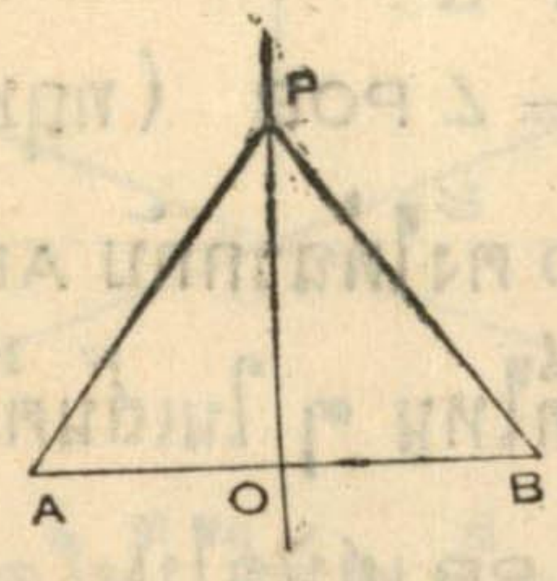
เป็นเส้นคด โลกัสก็จะเป็นเส้นคดด้วย).

ตามที่กล่าวมาแล้วในตัวอย่างที่ ๑ โลกัสของจุด P ก็คือเส้นรอบวง นักเรียนบางคนคงจะเคยได้ยินได้ฟังครูสอนมาบ้างแล้วเหมือนกันว่า โลกัส นี่ก็คือ วงกลม ข้าพเจ้ารู้สึกว่าไม่เหมาะ เพราะอาจทำให้นักเรียนเข้าใจผิด ถ้าเราเรียกว่าเส้นรอบวงแล้ว โลกัสในที่นี้ก็คือ เส้นโค้ง นั่นเอง ฉะนั้นนักเรียนและครูเมื่อพบปะโจทย์ใดที่เกี่ยวกับโลกัสของจุด ก็จงสำเหนียกไว้เถิดว่า โลกัสไม่ใช่ครึ่งวงกลม (Semi-circle) หรือวงกลมเลย ที่แท้อาจจะเป็นเส้นรอบวงหรือครึ่งรอบวงก็ได้ และอย่าลืมว่า โลกัส คือ เส้น เท่านั้น.

คำว่าระยะทางห่างจากจุดจุดหนึ่งไปยังเส้นตรงหรือด้านของรูปสามเหลี่ยม นักเรียนต้องเข้าใจว่า ส่วนยาวของเส้นตั้งฉาก.

บทสร้างที่ ๑๔

ให้หาโลกัสของจุด P ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปอยู่ในที่ใด ๆ ย่อมมีระยะทางห่างจากจุด A กับจุด B เท่า ๆ กันเสมอ.



ในที่นี้จุด P เมื่อเคลื่อนไปอยู่ณที่ใด ๆ จำเป็นต้องทำให้ AP = PB เสมอ.

∴ จุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AB จะเป็นที่แห่งหนึ่ง ซึ่งถ้าจุด P เคลื่อนที่ไปอยู่ที่นั้น จะทำให้ PA = PB.

ฉากเส้น OP

P จะอยู่ที่ไหน ๆ ในเส้นตั้งฉากเส้นน ก็จะทำให้ PA = PB เสมอไป.

พิสูจน์ ตากเส้น AP กับ PB.

ใน $\triangle$ POA กับ POB.

$\therefore$ $\begin{cases} \text{OP เป็นด้านร่วม.} \\ \text{OA} = \text{OB (สร้าง).} \\ \text{PA} = \text{PB (โดยกำหนดให้).} \end{cases}$

$\therefore \angle \text{POA} = \angle \text{POB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๗).

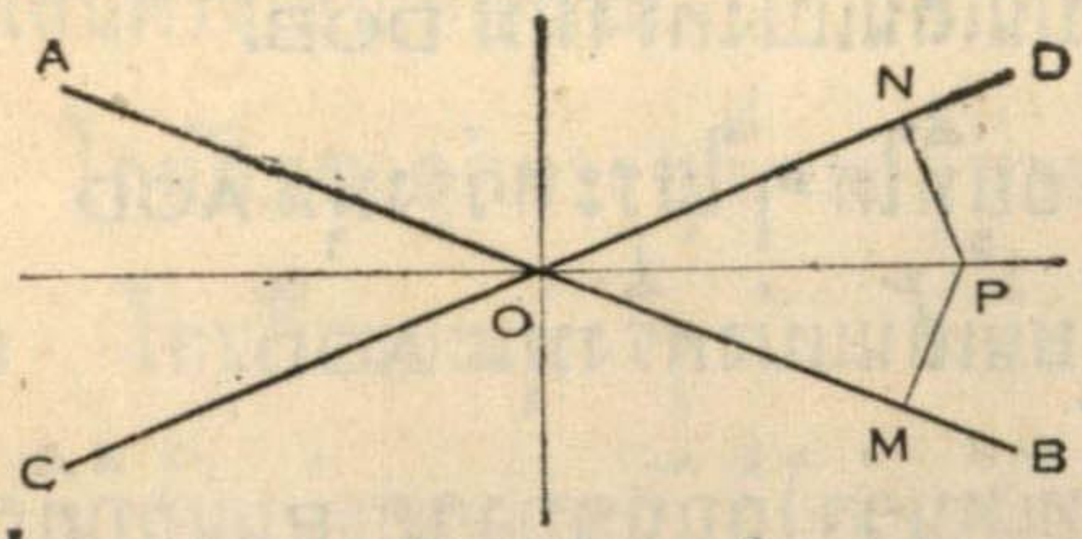
$\therefore$ PO ตั้งได้ฉากกับ AB.

$\therefore$ P จะอยู่ที่ไหน ๆ ในเส้นตั้งฉากเส้นนี้ ก็ย่อมทำให้ PA = PB เสมอไป.

เพราะฉะนั้นโลกัสของจุด P ซึ่งจะต้องอยู่ห่างจากจุด A กับจุด B เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน ก็คือ เส้นตรง ซึ่งแบ่ง AB ออกเป็นสองท่อนเท่า ๆ กัน และตั้งได้ฉากกับ AB ด้วย (The right bisector).

บทสร้างที่ ๑๕

จงหาโลกัสของจุด P ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปอยู่ในที่ใด ๆ ย่อมมีระยะทางห่างจากเส้นตรง AB กับ CD เท่ากันเสมอ.



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ P เป็นจุดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ในระยะที่ทำให้เส้นตั้งฉาก PN = เส้นตั้งฉาก PM และ O เป็นจุดที่เส้นตรง AB กับ CD ตัดกัน ฉากเส้น OP.

พิสูจน์ ใน Δ PMO กับ PNO

$$\therefore \begin{cases} \angle \text{PNO} = \angle \text{PMO} \text{ (ต่างก็เท่ากับ } 90^\circ) \\ \text{ด้าน OP เป็นด้านร่วม.} \\ \text{ด้าน PN = PM.} \end{cases}$$

∴ △ สองรูปเท่ากันทุกประการ (ทฤษฎีบท ที่ ๑๘)

∴ ∠ POM = ∠ PON.

ถ้า P อยู่ที่ใด ๆ ในระหว่างมุม DOB จุด P จะต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุม DOB.

ถ้า P อยู่ที่ใด ๆ ในระหว่างมุม AOD จุด P จะต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุม AOD.

นี่ก็ชี้ให้เห็นว่าโลกัสของจุด P ก็คือเส้นแบ่งครึ่งมุม ซึ่งอยู่ในระหว่างเส้นตรง AB กับ CD.

โลไซตัดกัน

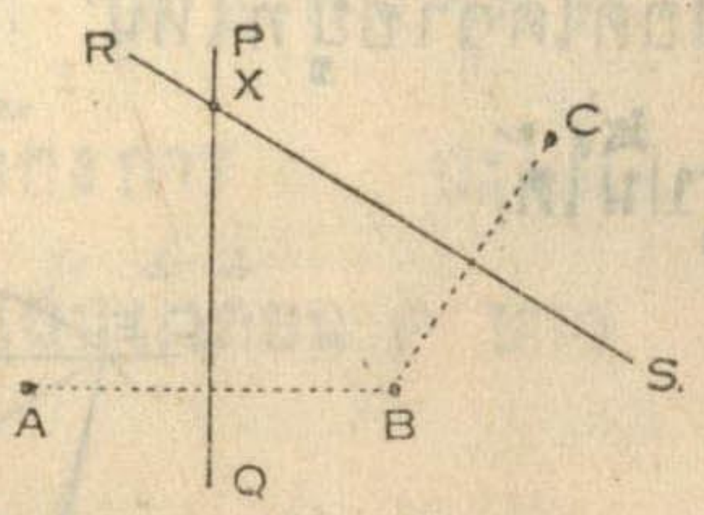
วิธีโลไซนอาจใช้สำหรับการหาที่ตั้งของจุดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ในกฎสองข้อ เพราะว่ากฎข้อหนึ่งๆย่อมจะมีโลกัสอยู่เส้นหนึ่ง ซึ่งจุดที่เราต้องการ จะต้องอยู่ในโลกัสเส้นนี้ ฉะนั้นจุดใด ๆ ที่เป็นจุดร่วมของโลไซคู่นี้ คือจุดทั้งหมดที่โลไซตัดกัน เป็นจุด

ที่เราต้องการ เพราะว่าจุดเหล่านี้อยู่ในกฎที่กำหนดให้ไว้ทั้งสองประการนั้น.

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาจุดจุดหนึ่งมีระยะทางห่างจากจุดสามจุดที่กำหนดให้ คือ A, B, C, ซึ่งไม่ได้ตั้งอยู่ในเส้นตรงเส้นเดียวกัน.

(๑) โลกัสของจุดต่างๆที่จะอยู่ห่างจากจุด A กับจุด B โดยมีระยะเท่าๆกัน ก็คือ เส้นตรง PQ ซึ่งเป็นเส้นแบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน และตั้งได้ฉากกับ AB ด้วย.

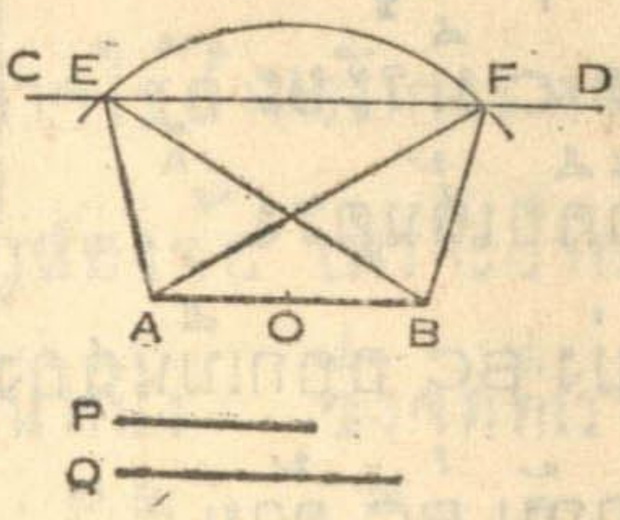
(๒) ในทำนองเดียวกัน โลกัสของจุดต่างๆที่อยู่ห่างจากจุด B กับจุด C มีระยะทางเท่าๆกัน ก็คือเส้นตรง RS ซึ่งเป็นเส้นแบ่ง BC ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน และตั้งได้ฉากกับ BC ด้วย.



เพราะฉะนั้นจุดร่วมของ PQ กับ RS ต้องอยู่ในกฎสองข้ออยู่เอง นักคือจุด X ซึ่งเป็นจุดที่ PQ กับ RS ตัดกัน จะอยู่ห่างจากจุด A, B, และ C มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

ตัวอย่างที่๒ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมกำหนดฐาน, ส่วนสูง และส่วนยาวของเส้นมีเดียน ซึ่งแบ่งฐานออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันให้.

ให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้ P เป็นส่วนสูง และ Q เป็นส่วนยาวของเส้นมีเดียน ถ้าเราหามุมยอดได้ว่าอยู่ที่ไหน เราก็จะสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ได้.



(๑) ลากเส้นตรง CD ให้ขนานกับ AB และ

ให้ห่างจาก AB = ส่วนสูง P ยอดของ△รูปนี้ก็จะอยู่ที่เส้น CD.

(๒) เอาจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB เป็นศูนย์กลาง รัศมี Q เขียนส่วนโค้งของวงกลม. ยอดของ △ รูปนี้ก็จะอยู่บนส่วนโค้งของวงกลมนี้ด้วย.

เพราะฉะนั้น จุดหนึ่งจุดใดซึ่งเป็นจุดร่วมของเส้นตรง CD กับส่วนโค้งของวงกลมก็จะเข้าตามกฎที่กำหนดให้ นี่ก็หมายความว่า ถ้า CD ตัดส่วนโค้งของวงกลมที่จุด E กับจุด F, จุด E หรือจุด F นี้จะเป็นมุมยอดของ △ ที่เราต้องการ ฉะนั้น เราต้องสมมติให้ส่วนยาวของเส้นมีเดียน P ยาวกว่าส่วนสง Q.

อาจจะมีปัญหาเกิดขึ้น ถ้าส่วนที่กำหนดให้เหล่านี้ทำให้โลไซไม่ตัดกันเลย ถ้าเป็นเช่นนี้ การสร้างรูปสามเหลี่ยมเป็นอันว่าสร้างไม่ได้ทีเดียว.

สิ่งที่ต้องสังเกต สำหรับโจทย์ทุก ๆ ข้อที่ต้องใช้โลไซตัดกัน นักเรียนต้องตรวจดสิ่งที่เขากำหนดให้เสียก่อน ว่าการสร้างจะเป็นไปได้หรือไม่ และต้องสังเกตด้วยว่า โจทย์บางข้อเราสร้างรูปสามเหลี่ยมได้สองรูป โจทย์บางข้อก็สร้างไม่ได้ และจงตรวจความสัมพันธ์ในสิ่งที่เขากำหนดให้ ว่าจะเป็นอย่างไรบ้าง ถ้าเราหาวิธีสร้างตามสิ่งที่กำหนดให้ชะนิดที่สร้างรูปสามเหลี่ยมได้สองรูป กับวิธีสร้างตามสิ่งที่กำหนดให้ ชะนิดที่เราสร้างไม่ได้ ก็คงจะพบความสัมพันธ์ซึ่งทำให้เราสร้างรูปสามเหลี่ยมได้เพียงรูปเดียว.

โจทย์ตัวอย่างว่าด้วยโลไซ

(๑) จงหาโลกัสของจุดจุดหนึ่งซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปแล้ว จะต้องมีระยะทางห่างจากเส้นรอบวงของ

วงกลมที่กำหนดให้เท่า ๆ กันเสมอ ให้คิดระยะทางโดยวัดส่วนยาวของเส้นรัศมี.

(๒) จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง CD ให้หาที่ตั้งของจุด P ในเมื่อจุด P อยู่ห่างจากจุด A และ B เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน.

(๓) จุด A กับจุด B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้และอยู่ภายในวงกลมวงหนึ่ง ให้หาจุดบนเส้นรอบวง ซึ่งมีระยะทางห่างจากจุดทั้งสองนี้เท่ากัน และจุดเช่นนี้มีกี่จุด.

(๔) จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง RQ จงหาที่ตั้งของจุด P ในเส้นตรงเส้นนี้ เมื่อจุด P อยู่ห่างจากเส้นตรง AB กับ CD มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

(๕) A กับ B เป็นจุดซึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้ และอยู่ห่างกัน 6 ซม. ใช้วิธีโลไซ หาจุดสองจุดที่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง 4 ซม. และจุด B 5 ซม.

(๖) AB กับ CD เป็นเส้นตรงสองเส้น ให้หา

จุดที่อยู่ห่างจาก AB 3 ซม. และ CD 4 ซม. และมีกี่จุด.

(๗) ไม้ตรงท่อนหนึ่งเลื่อนขึ้นเลื่อนลงได้ ในระหว่างไม้บรรทัดสองอัน ซึ่งบรรจบกันเป็นมุมฉาก ให้หาโลกัสของจุดกึ่งกลางของไม้ท่อนนี้ด้วยวิธีเขียนรูป และแสดงให้เห็นว่าโลกัสนี้ คือ $\frac{1}{4}$ ของเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง (ดูโจทย์ข้อ ๑๐).

(๘) กำหนดให้ด้านทะแยงเป็นฐาน จงสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากหลายรูป แล้วหาโลกัสของมุมยอด.

(๙) A เป็นจุดจุดหนึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้ X เป็นจุดจุดหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปได้ตามเส้นตรง BC เส้นตรง BC นี้ก็เคลื่อนที่ไม่ได้ด้วย ให้หาโลกัสของจุด P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้น AX ด้วยวิธีเขียนรูป และพิสูจน์ว่าโลกัสนี้คือเส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งขนานกันกับ BC.

(๑๐) A เป็นจุดจุดหนึ่งเคลื่อนที่ไม่ได้ X เป็นจุดจุดหนึ่ง เคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่ง ให้หาโลกัสของจุด P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้น AX และพิสูจน์ว่าโลกัสนี้คือเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง.

(๑๑) กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรง AX เป็นเส้นตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง ซึ่งตากผ่านจากจุด B ถ้า BX หมุนรอบจุด B ให้หาโลกัสของจุดกึ่งกลางของด้าน AX.

(๑๒) เส้นตรง OA กับ OB มาบรรจบกันเป็นมุมฉาก P เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ในระหว่างแขน OA กับ OB, PX ตั้งได้ฉากกับ OA และ PR ตั้งได้ฉากกับ OB, จงเขียนโลกัสซึ่งกำหนดให้ (๑) PX + PR = Constant (6 ซม.) (๒) PX − PR = Constant (3 ซม.) และในข้อหนึ่ง ๆ ต้องพิสูจน์ผลของการสร้างมาด้วยตัว "Constant"

นักเรียนจงเข้าใจเถิดว่า ตัว π นั้นแม้ว่าวงกลมจะใหญ่หรือเล็กเท่าไรก็ดี ย่อมมีค่าอยู่คงที่เสมอ ฉะนั้นตัวเลขใดๆทุกๆตัวเขาเรียกว่า ตัว Constant ทั้งนั้น ส่วนตัวอักษรบางตัว ในภาษาอังกฤษนอกจาก $x, y, z.$ แล้ว ก็เป็นตัว Constant เหมือนกัน แต่เรียกยาวไปหน่อยว่า อาบิตรารีคอนสแตนต์.

(๑๓) OX กับ OY เป็นเส้นตรงสองเส้นบรรจบกันที่จุด O กางเป็นมุม 90°. P เป็นจุดที่เคลื่อนที่ได้ PM เป็นเส้นตั้งฉากกับ OX และ PN เป็นเส้นตั้งฉากกับ OY จงเขียนโลกัสของจุด P (ไม่ต้องพิสูจน์) กำหนดให้.

(๑) PM = 2 PN.

(๒) PM = 3 PN.

(๑๔) ให้หาจุดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งมีระยะทางเท่ากับส่วนยาวที่กำหนดให้ และให้ห่างจากเส้นตรงขนานคู่หนึ่ง มีระยะ

ทางเท่าๆกัน เมื่อไรเราจึงจะหาจุดจุดนี้ได้ (๑) สอง จุด (๒) จุดเดียวเท่านั้น (๓) ไม่ได้เลย.

(๑๕) S เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้และอยู่ห่างจากเส้นตรง MX 2 นิ้ว ให้หาจุดสองจุด ซึ่งอยู่ห่างจากจุด S $2\frac{3}{4}$ นิ้ว และให้อยู่ห่างจาก MX $2\frac{3}{4}$ นิ้วด้วย.

(๑๖) ให้หาจุดต่าง ๆ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด S กับเส้นตรง MX มีระยะทางเท่า ๆ กัน แล้วต่อจุดเหล่านี้ให้เป็นเส้นโค้ง (เส้นโค้งชนิดนี้เรียกว่าพาราบอลา Parabola).

(๑๗) กำหนดส่วนสูง กับมุมยอดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้สร้างรูปสามเหลี่ยม.

(๑๘) ให้หาจุดจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างจากด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

(๑๙) OX กับ OY เป็นเส้นตรงสองเส้นบรรจบกันที่จุด O กางได้หนึ่งมุมฉาก. Q เป็นจุดจุดหนึ่ง

ในเส้น XO และ R ในเส้น OY จงเขียนโลกัสของจุดกึ่งกลางของด้าน QR กำหนดให้.

(๑) $OQ + OR = \text{Constant}$.

(๒) $OQ - OR = \text{Constant}$.

(๒๐) X กับ X′ เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไม่ได้ ให้หาจำนวนที่ตั้งหลาย ๆ ที่ ของจุด P ที่จะทำให้.

(๑) $XP + X'P = \text{Constant}$ (3.5 นิ้ว).

(๒) $XP - X'P = \text{Constant}$ (1.5 นิ้ว).

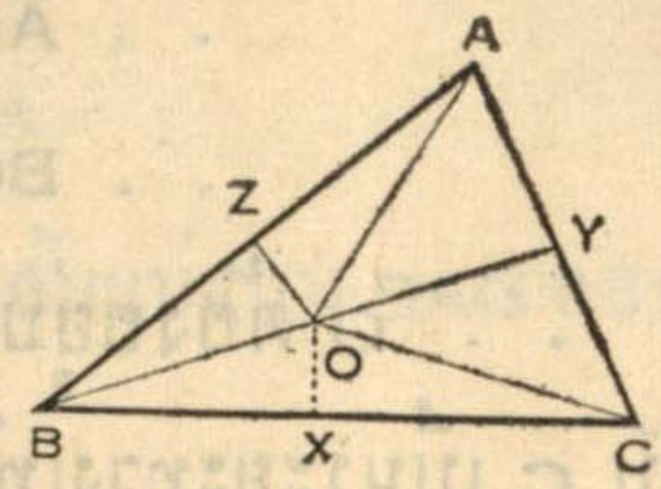
ในข้อหนึ่ง ๆ ให้ต่อจุดที่ตั้งเหล่านี้เป็นเส้นโค้งเข้าเส้นหนึ่ง.

ส่วนโค้งข้อหนึ่งเรียกชื่อว่า เอลิพส์ และส่วนโค้งข้อสองเรียกว่า ไฮเพอร์บอลา.

ว่าด้วยเส้นตรงหลาย ๆ เส้นมาร่วมกัน ที่จุดจุดหนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยม

(๑) เส้นตรงซึ่งลากมาตั้งได้ฉากที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมใด ๆ ต้องมารวมกันที่จุดจุดหนึ่ง.

ให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง และ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม.



จากจุด Z กับจุด Y ตาก เส้นตั้งได้ฉากกับด้าน AB และ AC ให้มาพบกันที่จุด O ตาก เส้น OX.

จะต้องพิสูจน์ว่า OX ตั้งได้ฉากกับ BC.

สร้าง ตากเส้น AO, BO และ CO.

พิสูจน์ ∵ OY แบ่งด้าน AC เป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และตั้งได้ฉากกับ AC.

∴ OY เป็นเส้นโดกัสของจุด ซึ่งอยู่ห่างจาก A กับ C มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

∴ AO = CO.

และ ∵ ZO แบ่งด้าน AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน และตั้งได้ฉากกับ AB.

$\therefore$ ZO เป็นเส้นโดกัสของจุด ซึ่งอยู่ห่างจาก A กับ B มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

$\therefore$ AO = BO

$\therefore$ BO = CO

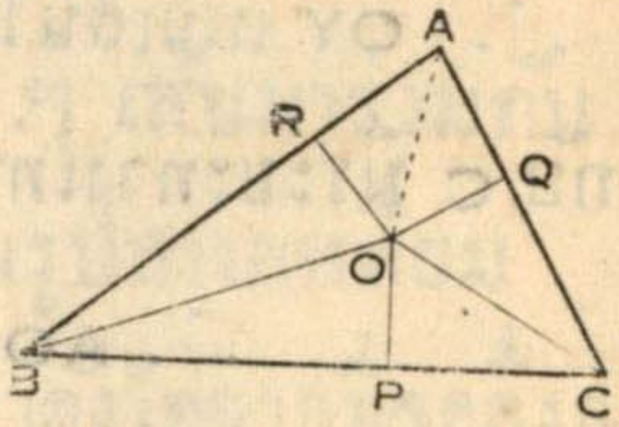
$\therefore$ O ต้องอยู่บนเส้นโดกัส และห่างจาก B กับ C เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน.

นี่คือ OX ตั้งได้ฉากกับ BC.

$\therefore$ เส้นตั้งฉากจากจุดกึ่งกลางของด้านต้องรวมกันที่จุด O.

ซ. ต. พ.

(๒) เส้นแบ่งครึ่งมุม (Bisectors) ของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมต้องมารวมกันที่จุดจุดหนึ่ง.



ให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง แบ่งครึ่งมุม ABC

กับ BCA ด้วยเส้นตรงสองเส้น และให้มาพบกันที่จุด O.

ลากเส้น OA.

จะต้องพิสูจน์ว่า OA เป็นเส้นแบ่งมุม BAC ออกเป็นสองมุมเท่า ๆ กัน.

จากจุด O ลากเส้นตั้งฉาก OR, OP, OQ

พิสูจน์ ∵ OB เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC.

∴ OB จึงเป็นเส้นโลกัสของจุด ซึ่งอยู่ห่างจากด้าน AB และ BC มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

$$\therefore OR = OP$$

ในทำนองเดียวกัน OC ต้องเป็นเส้นโลกัสของจุดซึ่งอยู่ห่างจากด้าน BC และ AC มีระยะทางเท่าๆกัน.

$$\therefore OP = OQ.$$

$$\therefore OR = OQ$$

∴ O ต้องอยู่บนเส้นโลกัสของจุด ซึ่งอยู่ห่างจากด้าน AB กับ AC มีระยะทางเท่า ๆ กัน.

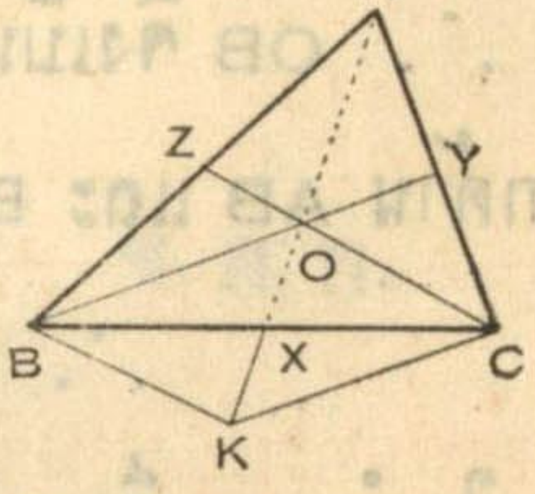
นี่คือ OA เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC.

เพราะฉะนั้นเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของสามเหลี่ยม
จึงต้องมารวมกันที่จุด O.

ซ. ต. พ.

(๓) เส้นมัธยันทั้งสามของสามเหลี่ยม ย่อม
มารวมกันที่จุดจุดหนึ่ง.

ให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง



และให้ BY กับ CZ เป็นเส้น
มัธยันคู่หนึ่ง ตัดกันที่จุด O
ลากเส้น AO และต่อออกไปจนพบด้าน BC ที่จุด X.

จะต้องพิสูจน์ว่า AX เป็นเส้นมัธยันเส้นที่สาม.

จากจุด C ลากเส้น CK ให้ขนานกับ BY และ
ต่อเส้น AX ให้พบกับเส้น CK ที่จุด K ลากเส้น BK.

พิสูจน์ ใน △ AKC.

∴ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ OY ขนานกับ CK.

∴ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK (ทฤษฎีบทที่ ๒๒).

ใน △ AKB.

∴ Z เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK.

∴ OZ ต้องขนานกับ BK

นี่ก็คือ OC ขนานกับ BK.

∴ BKCO เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

แต่เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมแบ่งกันเองออกเป็นเส้นละสองส่วนเท่า ๆ กัน.

∴ X จงเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC.

นี่ก็คือ AX เป็นเส้นมัธยของ △.

∴ เส้นมัธยทั้งสามจึงมาร่วมกันที่จุด O.

ช. ต. พ.

คำจำกัดความ จุดที่เส้นมัธยมทั้งสามรวมกัน เรียกว่า 'จุดร่วมมัธยม' (Centroid) ของรูปสามเหลี่ยม.

บทแทรก จุดร่วมของเส้นมัธยมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นจุดที่แบ่งเส้นมัธยมเหล่านั้นออกเป็นหนึ่งในสามของส่วนยาวทุกเส้น (คือ $\frac{2}{3}$ อยู่ทางมุมของรูปสามเหลี่ยม)

เพราะว่าที่ได้พิสูจน์ไว้แล้วในรูปข้างต้น

OA = OK

และ OX เป็นครึ่งหนึ่งของ OK.

∴ OX ก็เป็นครึ่งหนึ่งของ OA.

นั่นคือ OX = $\frac{1}{3}$ ของ AX.

ในทำนองเดียวกัน OY = $\frac{1}{3}$ ของ BY.

และ OZ = $\frac{1}{3}$ ของ CZ.

อาศัยบทแทรกบทนี้ เราอาจพิสูจน์ได้ว่าในสามเหลี่ยมใด ๆ มัธยมเส้นสั้นย่อมแบ่งด้านยาว

ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน จงจำไว้ด้วยว่าต่อไป เราจะต้องพิสูจน์ว่าเส้นตั้งได้ฉากทั้งสามเส้นที่ลากจากมุมของ △ ไปยังด้านตรงข้าม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่งด้วย.

โจทย์ระคนของบทสร้าง

(ต้องพิสูจน์มาด้วยทุก ๆ ข้อ)

๑. A เป็นจุดจุดหนึ่ง และ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ลากเส้นตรงจากจุด A ทำมุมกับเส้น BC ให้กางเท่ากับมุม x ซึ่งเป็นมุมที่กำหนดให้ เส้นตรงที่ทำให้เกิดมุมอย่างนี้ได้มีกี่เส้น.

๒. จงหาเส้นซึ่งแบ่งครึ่งมุม AOB (Bisector) ห้ามไม่ให้ใช้วิธีสร้างจากมุม O.

๓. P เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ในระหว่างมุม AOB ให้ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด P ไปจดแขน OA กับ OB และ P ต้องเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงนี้ด้วย.

๔. OA, OB, OC เป็นเส้นตรงสามเส้นบรรจบกันที่จุด O ให้ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งไปจดด้าน OA กับ OC แต่ต้องให้เส้น OB แบ่งเส้นตรงเส้นนี้ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

๕. A เป็นจุดจุดหนึ่ง จงลากเส้นตรงจากจุด A ตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ให้ส่วนของเส้นตรงเส้นนี้ที่อยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่นั้น เท่ากับส่วนยาวที่กำหนดให้.

ให้อธิบายว่าเมื่อไรจึงจะมีเส้นชะนิดนี้ได้สองเส้น, เมื่อไรมีได้แต่เส้นเดียวเท่านั้น และเมื่อไรจะไม่มีเส้นตรงชะนิดนี้เลย.

๖. ให้บรรจุสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านเท่า (Rhombus) ลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ให้มุมหนึ่งทับมุม A ได้สนิท.

๗. ให้แบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน. โดยใช้คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า.

การสร้างรูปสามเหลี่ยม

๘. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยอาศัยสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้.

(๑) จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม.

(๒) ด้านสองด้านกับเส้นมัธยมซึ่งแบ่งด้านที่สามออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน.

(๓) ด้าน ๆ หนึ่งกับมัธยมซึ่งแบ่งด้านที่เหลืออยู่สองด้านออกเป็นด้านละสองส่วนเท่า ๆ กัน.

(๔) มัธยมสามเส้น.

จบภาค ๑

รายชื่อหนังสือซึ่งมีจำหน่ายที่ร้านสุธาวณิช

แบบเรียนภาษาอังกฤษของพระประทัดสุนทรสาร

๑. ไวยากรณ์และแต่งอังกฤษเล่ม ๑ ราคา ๕๐ สตางค์

๒. ไวยากรณ์และแต่งอังกฤษเล่ม ๒ ราคา ๖๐ สตางค์

๓. ไวยากรณ์และแต่งอังกฤษเล่ม ๓ ราคา ๖๕ สตางค์

๔. แปลไทยเป็นอังกฤษ (จากท้ายบันไดเล่ม ๔) ราคา ๗๕ สตางค์

๕. แบบฝึกหัดใช้ถ้อยคำอังกฤษ ราคา ๑ บาท

๖. แบบฝึกหัดอังกฤษสำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๒ ราคา ๓๕ สตางค์

(ของพระยาภะรตราชา กับ พระประทัดสุนทรสาร)

แบบเรียนเรขาคณิตภาคปฏิบัติของ หลวงศิลปานุการกวี

๑. เรขาคณิตภาคปฏิบัติ ม ๑ ราคา ๒๐ สตางค์

๒. เรขาคณิตภาคปฏิบัติ ม ๒ ราคา ๒๕ สตางค์

๓. เรขาคณิตภาคปฏิบัติ ม ๓ ราคา ๒๕ สตางค์

๔. คู่มือเรขาคณิตภาคปฏิบัติ ม ๒ (สำหรับแจกให้แก่ครูผู้สอน)

๕. คู่มือเรขาคณิตภาคปฏิบัติ ม ๓ ,, ,,

แบบเรียนคณิตศาสตร์ของพระสันธิวิทยาพัฒน์

๑. เรขาคณิต ภาค ๑ ราคา ๗๐ สตางค์

๒. เรขาคณิต ภาค ๒ ราคา ๓๔ สตางค์

๓. เรขาคณิต ภาค ๓ ราคา ๖๕ สตางค์

๔. เรขาคณิต ภาค ๔ ราคา ๕๐ สตางค์

๕. เรขาคณิต ภาค ๕ ราคา ๗๘ สตางค์

แบบเรียนคณิตศาสตร์ของ ร.อ.ท. ยม ไทยวุฒิพงศ์ ครูคำนวณในวชิราวุธวิทยาลัย

๑. เลขเร็ว เล่ม ๑ ราคา ๕๐ สตางค์

๒. พีชคณิตเล่ม ๑ ราคา ๖๐ สตางค์

๓. พีชคณิตเล่ม ๒ ราคา ๕๐ สตางค์

๔. พีชคณิตเล่ม ๓ ราคา ๖๔ สตางค์

๕. คู่มือเรขาคณิตภาค ๑ ราคา ๗๕ สตางค์

(A key to Geometry part 1)

สุธาวณิชหลังกระทรวงมหาดไทย ถนนเฟื่องนคร

แก้คำผิด

หน้า ๔๑	บรรทัดที่ ๔	เบน	แกเบน	เบน
,, ๙๔	,, ,,	สุดท้าย ดุด	,, ,,	จุด
,, ๑๒๐	,, ,,	๕ Rectilneal	,,	Rectilineal
,, ๑๔๑	,, ,,	๕ จันทร์	,, ,,	จันทน์
,, ๑๖๐	,, ,,	๓ มุม BC	,, ,,	BC
,, ๑๖๐	,, ,,	๔ FEH	,, ,,	มุม FEH

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ศรีสุเทพ
ข้างวัดราชบพิธ ถนนเฟื่องนคร พระนคร
หลวงศิลปานุการกวี ผู้พิมพ์โฆษณา
พ. ศ. ๒๔๙๐

หอสมุดแห่งชาติ
22 ส.ค. 2551
กรมศิลปากร

ใบอนุญาต

ฉะบับที่ ๔๘/๑๐๗

วันที่ ๓

หนังสือเรขาค

พิมพ์ครั้งที่ห้า จำน

เจ้าหน้าที่ได้ตรวจแ

(ลงนาม) สุคน