

๑๗๓

ก. ๕๓๒๔

กุญแจเรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมปีที่ ๔

โดย

อำมาตย์เอก พระวรพากย์พจนานิติ
อรรถาจารย์กณิศาสตร์ โรงเรียนนายเรือ

—————

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง ๒,๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๕๑๓



พิมพ์จำหน่ายที่ บริษัทประชาช่าง จำกัด

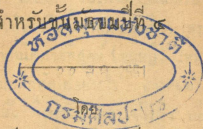
ตลาดน้อย พระนคร

(สงวนลิขสิทธิ์)

516
ก231ก

บุญแจกเรขาคณิต

สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕



อำนวยการโดย พระวรพากย์พจนสินธุ์

พิมพ์ครั้งที่ ๒๔ ๑
พิมพ์ครั้งแรก ๒,๐๐๐ ฉบับ

พ.ศ. ๒๔๘๓

ราคาเล่มละ ๘.๐๐ บาท



พิมพ์จำหน่ายที่ บริษัทประชาชน จำกัด

ตลาดน้อย พระนคร



กรมการปกครอง กระทรวงมหาดไทย
จังหวัด...

...



เลขที่ 214

เลขที่ 516

22311

...

คำนำ

วิชาเรขาคณิตนี้ นักเรียนส่วนมากคงจะเห็นว่า เป็น
วิชาที่เรียนให้เข้าใจได้ยาก และถ้ายังเป็นนักเรียนชั้นมัธยม
ปีที่ ๔ ด้วยแล้ว เห็นว่าวิชาที่ยากมากที่สุดก็เลย เพราะนักเรียน
เพิ่งเริ่มเรียนเรขาคณิตภาคพื้นฐาน (ทฤษฎี) ใหม่ ๆ บางทีก็
ไม่รู้ว่าจะคิดทำแบบฝึกหัดได้อย่างไร บางคนท่องแต่สูตร
ไว้อย่างเดียวเท่านั้น จึงทำให้ไม่เข้าใจวิธีทำ เมื่อไม่เข้าใจ
หนัก ๆ เข้าก็เลยไม่อยากที่จะเรียนวิชานี้ ซึ่งเป็นเหตุให้เบอ
ในการเรียนคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ ด้วย ความจริงก็จะ
เห็นใจนักเรียนอยู่เหมือนกัน เพราะวิชาเรขาคณิตนี้ฝึกกับ
วิชาคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น เลขคณิต พีชคณิต ซึ่งผู้เรียน
เพิ่งแต่คิดหาเหตุผล และวิธีทำโดยอิสระเป็นเรื่อง ๆ ไป
เท่านั้น ส่วนวิชาเรขาคณิตนี้เรียนต้องคิดแก้ปัญหาทั้งสองชั้น
คือ ต้องคิดสร้างรูป และคิดลงทอดักความจริง ซึ่งอาศัย
รูปประกอบการพิสูจน์ ด้วยเหตุนี้เอง ข้าพเจ้าจึงได้เรียบ
เรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้น เพื่อเป็นการแนะนำวิธีการทำแบบ
ฝึกหัดในอันที่จะช่วยเหลือนักเรียนซึ่งอ่อนในวิชา เนื่องจาก
ในประเทศไทยเราโดยมากมักนิยมใช้หนังสือเรขาคณิต ของ

Hall & Stevens เป็นหลัก ข้าพเจ้าจึงได้แปลคำราราษา
อังกฤษเดิม ออกเป็นพจนานุกรมภาษาไทย ดังปรากฏอยู่ใน คำรา
เรชาคณิต ชนมขยม ๔, ๕, ๖. ของข้าพเจ้านั้น และเพื่อเป็น
การช่วยเหลือนักเรียนที่ยังอ่อนใหม่ควมรในคำราเรชาคณิต
ข้าพเจ้าเรียบเรียงขึ้นใหม่โดยสมบูรณ ดังกล่าวแฉฉน
ข้าพเจ้าจึงได้เรียบเรียง “กฎเรชาคณิตชนมขยมบท ๔”
ประกอบคำรารทข้าพเจ้าแต่งไว้ด้วย ซึ่งทงนข้าพเจ้าหวังว่า
คงจะเป็นประโยชน์แก่นักเรียนที่ยังอ่อนบางไม่มากนักอย.

อนึ่งแบบผกทศกคตมาจกหนึ่งฉฉ Hall & Stevens นั้น
ข้าพเจ้าได้เขียนไว้ท้ายข้อด้วยอักษรย่อ [H & S.] ทุก
อนไป เครื่องหมายนหมยถึงว่าแบบผกทศน ๆ ข้าพเจ้าได้
คตมาจกหนึ่งฉฉ “A School geometry” ของ “Hall & Stevens
ข้อ.....หน้า.....” ซึ่งทงนหวังว่าคงเหมาะสำหรับนักเรียน
ทใช้คำราราษาของอังกฤษเดิมเป็นหนึ่งฉฉเรียน และเพื่อประ
โยชนสำหรับนักเรียนที่อ่าน “กฎเรชาคณิต” ของ Hall &
Stevens ไม่เข้าใจ จะได้ค้นหาจกคำราของข้าพเจ้าได้

อนึ่งกฎเรชาคณิตชนมขยมบท ๔ นั้น สำหรับแบบ
ผกทศบางข้อ ข้าพเจ้ามิได้เขียนรปลงไป แต่ได้เว้นไว้ให้

นักเรียนได้ให้ใช้ความคิดอ่านของตนเองบ้าง ทั้งการพิสูจน์
แบบฝึกหัดเรขาคณิตข้อหนึ่ง ๆ บางบททางพิสูจน์ได้หลายวิธี
ทั้งนักผู้แต่เหตุผลที่อาจจะเป็นใหญ่ มีผู้ซึ่งใจบางท่านว่า
การใช้กฎเรขาคณิต จะทำให้นักเรียนเกียจคร้าน ข้าพเจ้า
คิดว่ายังไม่ถูกต้องนัก ปัญหาอยู่ที่การรู้จักใช้เมื่อถึงสำคัญ
กว่า

ในที่สุดข้าพเจ้าหวังว่า กฎเรขาคณิต คงอำนวยความสะดวก
ความจำเริญให้แก่ นักเรียนท พงเริ่มเรียนเรขาคณิตใหม่ ๆ ให้
เข้าใจในวิชานี้ได้โดยทั่วกัน.

อำมาตย์เอก พระวรพากย์พจนานุกรม

บัญชีเรื่อง

หน้า

๑	โจทยแบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ ๑-๒	๑
๒	„ „ „ „ ๓	๑๓
๓	„ „ „ „ ๔ (๑-ร หน้า ๕๐)	๒๖
๔	„ „ „ „ ๕ (๑-ร หน้า ๕๕)	๓๓
๕	„ „ „ „ ๘ (๑-ร หน้า ๗๗)	๕๓
๖	„ „ „ „ ๓๒ (๑-ร หน้า ๘๗)	๕๗
๗	„ „ „ „ ๓๕ (๑-ร หน้า ๑๐๕)	๗๓
๘	„ „ „ „ ๓๖ (๑-ร หน้า ๑๓๓)	๘๗
๙	„ „ „ „ ๓๗ (๑-ร หน้า ๑๒๗)	๑๓๗

๑๐ คำตอบแบบฝึกหัดทวนเรื่อง

รูปตามเหลี่ยม (๑-ร หน้า ๑๔๓-๑๔๕)

หน้า ๕๔ ในหนังสือ H & S ๓๒๘

๑๑ โจทยแบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ ๒๐-๒๓

(๑-ร หน้า ๓๕๖) ๓๓๕

- ๓๒ โจทย์แบบฝึกหัดว่าด้วยดีเดียมด้านขนาน (๑-ร หน้า ๓๕๗) ๓๔๐
- ๓๓ แบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบท ๒๒ (๑-ร หน้า ๓๖๗) ๓๖๓
- ๓๔ แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการวัดเส้นตรง (๑-ร หน้า ๓๗๗) ๓๘๐
- ๓๕ แบบฝึกหัดว่าด้วยเส้นแฉะมุม (๑-ร หน้า ๓๘๖) ๓๘๗

๓๖ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๓๗ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๓๘ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๓๙ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๐ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๑ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๒ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๓ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๔ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐
๔๕ (๑-ร หน้า ๓๙๐)	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐	๓๙๐

(๓๙๐-๓๙๐ หน้า ๓๙๐) ๓๙๐

๓๙๐ ๓๙๐ ๓๙๐ ๓๙๐

กฎเงาเรขาคณิตมัธยมปีที่ ๔

โจทย์แบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ 1-2

(จ-ร. = จากหนังสือเรขาคณิตของพระวรพากย์พจนดิลก)

(H&S = จากหนังสือเรขาคณิต ของ Hall & Stevens)

1/31 โจทย์ จงหามุมประกอบ 2 มุมฉากของ

ก. มุมครึ่งมุมฉาก.

ข. มุม $\frac{4}{3}$ ของ 1 มุมฉาก

ค. มุม 46°

ง. มุม 149°

จ. มุม 83°

ฉ. มุม $101^{\circ}, 15'$ (H & S 1/13)

คำตอบ ก. $\therefore 2$ มุมฉาก $= 180^{\circ}$

$$\text{ครึ่งมุมฉาก} = \frac{90^{\circ}}{2} = 45^{\circ}$$

$\therefore$ มุมประกอบ ของมุมฉาก ของมุมครึ่งมุม

$$\text{ฉาก} = 180^{\circ} - 45^{\circ}$$

$$= 135^{\circ}$$

$$\text{ตอบ } 135^{\circ}$$

$$\text{ข.} \quad \therefore 2 \text{ มุมฉาก} = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{4}{3} \text{ มุมฉาก} = \frac{4}{3} \times 90^\circ$$

$$= 120^\circ$$

$$\therefore \text{มุมประกอบ 2 มุมฉาก ของ } \frac{4}{3}$$

$$\text{มุมฉาก} = 180^\circ - 120^\circ$$

$$= 60^\circ$$

$$\text{ตอบ } 160^\circ$$

$$\text{ค.} \quad \therefore 2 \text{ มุมฉาก} = 180^\circ$$

$$\therefore \text{มุมประกอบ 2 มุมฉากของ } 46^\circ$$

$$= 180^\circ - 46^\circ$$

$$= 134^\circ$$

$$\text{ตอบ } 134^\circ$$

$$\text{ง.} \quad \text{เช่นเดียวกัน มุมประกอบ 2 มุมฉากของ } 149^\circ$$

$$= 180^\circ - 149^\circ$$

$$= 31^\circ$$

$$\text{ตอบ } 31^\circ$$

$$\text{จ.} \quad \text{มุมประกอบ 2 มุมฉากของ } 83^\circ$$

$$= 180^\circ - 83^\circ$$

$$= 97^\circ$$

$$\text{ตอบ } 97^\circ$$

$$\text{ฉ.} \therefore 2 \text{ มุมฉาก} = 180$$

$$\therefore 101^{\circ}, 15' = 101 \frac{15}{60}$$

$$= 101 \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{มุมประกอบ 2 มุมฉากของมุม } 101^{\circ} 15'$$

$$= 180^{\circ} - 101 \frac{1}{4}$$

$$= 78 \frac{3}{4}$$

$$= 78^{\circ}, 45'$$

$$\text{ตอบ } 78^{\circ}, 45'$$

หมายเหตุ วิธีทำ อธิบาย ให้เป็น องศา มีดังนี้

$$60' = 1^{\circ} \quad \text{องศา}$$

$$1' = \frac{1}{60} \quad , ,$$

$$\therefore 15' = \frac{1}{60} \times 15 \quad , ,$$

$$= \frac{1}{4} \quad , ,$$

2/32 โจทย์ งามุมประกอบ 1 มุมฉาก ของมุม

$$\text{ก. } \frac{2}{5} \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{ข. } 27^{\circ}$$

$$\text{ค. } 38^{\circ} 16'$$

$$\text{ง. } 41^{\circ} 29' 30''$$

(H & 2/13)

คำตอบ ก. มุมประกอบ 1 มุมฉาก ของมุม $\frac{2}{5}$ มุมฉาก

$$= 1 - \frac{2}{5} \text{ มุมฉาก}$$

$$= \frac{3}{5} \text{ มุมฉาก}$$

$$= \frac{3}{5} \times 90^\circ = 54 \text{ องศา}$$

ตอบ $\frac{3}{5}$ มุมฉาก หรือ 54 องศา

ข. มุมประกอบ 1 มุมฉาก ของมุม 27°

$$= 90^\circ - 27^\circ$$

$$= 63^\circ$$

ตอบ 63°

เฉลยโจทย์ ข้อ ค. คำนวณกับ ข้อ จ. ในข้อ 1.

$$\text{จ. มุม } 41^\circ 29' 30'' = 41^\circ 29 \frac{1}{2}'$$

$$= 41 \frac{59^\circ}{120}$$

$\therefore$ มุมประกอบ 1 มุมฉากของมุม $41^\circ 29' 30''$

$$= 90^\circ - 41 \frac{59^\circ}{120}$$

$$= 48 \frac{61^\circ}{120}$$

$$= 48^\circ 30' 30''$$

ตอบ $48^\circ 30' 30''$

หมายเหตุ จะไม่ใช่วิธีทอนและกระจายมาตรงได้ คือ คง
(ใช้วิธี) ตบกัน แบบตบมาตรา

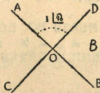
$$90^{\circ} \quad 0' \quad 0''$$

$$41^{\circ} \quad 29' \quad 30''$$

$$\hline 43^{\circ} \quad 30' \quad 30''$$

$$\hline \text{ตอบ } 48^{\circ} \quad 30' \quad 30''$$

3/32 โจทย์ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วมุม ๆ หนึ่งใน
บรรดามุมล้อมรอบที่เกิดขึ้น เป็นหนึ่งมุมฉากแล้ว, จง
พิสูจน์ว่า มุมที่เหลืออีกสามมุม ต่างก็ เป็นหนึ่งมุมฉาก
ด้วย. (H & S 3/13)



กำหนดให้ ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้น ตัดกันที่

จุด O ทำให้เกิด $\angle AOD = 1$ มุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ $\angle AOB$, $\angle COB$ และ $\angle BOD$ ต่างก็เท่ากับ 1 มุมฉาก

พิสูจน์ $\therefore$ AO พบกับ CD ที่จุด O

$$\therefore \hat{AOC} + \hat{AOD} = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

$$\text{แต่ } \hat{AOD} = 1 \text{ มุมฉาก (ตามโจทย์)}$$

$$\therefore \hat{AOC} = 1 \text{ มุมฉาก}$$

และ CO พน AB ที่ O

$$\therefore \hat{COA} + \hat{COB} = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

$$\text{แต่ } \hat{COA} = 1 \text{ มุมฉาก (พิสูจน์แล้ว)}$$

$$\therefore \hat{COB} = 1 \text{ มุมฉาก}$$

ในทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\hat{BOD} = 1 \text{ มุมฉาก}$$

ช.ต.พ.

4/32 โจทย์ ในสามเหลี่ยม ABC ถ้ามุม ABC และ ACB

โตเท่ากัน และถ้าต่อด้าน BC ออกทั้งสองข้างแล้ว จง

พิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่บังเกิดขนานกันด้วย

(H & S 4/13)

กำหนดให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

ต่อฐาน BC ออกไปยังจุด X และ Y

จะต้องพิสูจน์ $\hat{ABX} = \hat{ACY}$

พิสูจน์ $\therefore AB$ พน XC ที่จุด B

$$\therefore \hat{ABX} + \hat{ABC} = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

$$\text{และ } \therefore AC \text{ พบ } BY \text{ ที่จุด } C$$

$$\therefore \hat{ACY} + \hat{ACB} = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

$$\therefore \hat{ABX} + \hat{ABC} = \hat{ACY} + \hat{ACB}$$

$$\text{แต่ } \hat{ABC} = \hat{ACB} \text{ (ตามโจทย์)}$$

หักมุมที่เท่ากันออกเสียทั้งสองข้าง

$$\therefore \hat{ABX} = \hat{ACY}$$

ช.ต.พ.

5/32 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้ากำหนดให้มุม ABC

และ ACB เท่ากัน และต่อด้าน AB และ AC ออกไปทาง

B และ C ตามลำดับแล้ว จงพิสูจน์ว่า มุมภายนอกทั้ง

เกิดขึ้นโตเท่ากัน. (H & S 5 / 13)

กำหนดให้ ให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $\hat{ABC} = \hat{ACB} =$
ต่อ AB เลยออกไปที่จุด X และต่อ AC
เลยออกไปที่จุด Y

จะต้องพิสูจน์ $\hat{XBC} = \hat{YCB}$

พิสูจน์ $\therefore CB \text{ พบ } AX \text{ ที่จุด } B$

$$\therefore \hat{ABC} + \hat{XBC} = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\hat{A}CB + \hat{Y}CB = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ป.1)}$$

$$\therefore \hat{A}BC + \hat{X}BC = \hat{A}CB + \hat{Y}CB$$

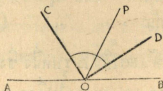
เราหักเอามุมที่เท่ากัน คือ $\hat{A}BC = \hat{A}CB$

ออกทั้งสองข้าง

$$\therefore \hat{X}BC = \hat{Y}CB$$

ซ. ต. พ.

6/33 โจทย์ [ย่อ] ลงพิสูจน์ว่า มุมที่เกิดขึ้นโดยเส้นแบ่ง
ครึ่งมุมประชิดทั้งสอง ย่อมมีขนาดเท่ากับหนึ่งมุมฉาก.
(H & S 6/13)



กำหนดให้

PO เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง พบ AB ที่จุด O
ทำให้เกิดมุมประชิด 2 มุม คือ $\hat{A}OP$ กับ $\hat{POB}$ ให้ CO และ DO เป็นเส้นแบ่ง
ครึ่งมุม $\hat{A}OP$ และ $\hat{POB}$ ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ $\hat{COD} = 1$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\therefore \hat{AOP} + \hat{POB} = 2$ มุมฉาก (ตามโจทย์)

แต่ $\hat{COP} = \frac{1}{2}$ ของ $\hat{AOP}$... 1. (ตามโจทย์)

และ $\hat{POD} = \frac{1}{2}$ ของ $\hat{POB}$... 2. (ตามโจทย์)

1. + 2. $\hat{COP} + \hat{POD} = \frac{1}{2}$ ของ $\hat{AOP}$
 $+ \frac{1}{2}$ ของ $\hat{POB}$

$\hat{COP} + \hat{POD} = \frac{1}{2} (\hat{AOP} + \hat{POB})$

แต่ $\hat{AOP} + \hat{POB} = 2$ มุมฉาก (ท.ป.1)

$\therefore \hat{COP} + \hat{POD} = 1$ มุมฉาก

$\therefore \hat{COD} = 1$ มุมฉาก

จ. ต. พ.

7/33 โจทย์ คงพิสูจน์ตามรูปใน H&S ท้ายข้อ 5 หน้า 15 ว่า

มุม $\hat{AOX}$ และ $\hat{COY}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบหนึ่งของมุมฉาก
 ซึงกัน (คือรวมกันเข้าแล้วเป็นหนึ่งมุมฉาก).

(H & S 7/13)

กำหนดให้ BO ขนานตรง CA ทัด O

XO และ YO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{AOB}$ และ

$\hat{BOC}$ ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ $\overset{\Delta}{AOX} + \overset{\Delta}{COY} = 1$ มุมฉาก.

พิสูจน์ $\therefore \overset{\Delta}{XOY} = 1$ มุมฉาก (ตามข้อ 6)

แต่ $\overset{\Delta}{XOY} = \overset{\Delta}{XOB} + \overset{\Delta}{BOY}$

$\therefore \overset{\Delta}{XOB} + \overset{\Delta}{BOY} = 1$ มุมฉาก

แต่ $\overset{\Delta}{XOB} = \overset{\Delta}{AOX}$ (โจทย์)

และ $\overset{\Delta}{BOY} = \overset{\Delta}{COY}$ (โจทย์)

$\therefore \overset{\Delta}{AOX} + \overset{\Delta}{COY} = 1$ มุมฉาก ด้วย.

ข. ต. พ.

8/33 โจทย์ ให้พิสูจน์ตามรูปในข้อ 7 ว่า มุม $\overset{\Delta}{BOX}$ และ

มุม $\overset{\Delta}{COX}$ ต่างเป็นมุมประกอบของมุมฉากซึ่งกันและกัน

และให้พิสูจน์ว่า มุม $\overset{\Delta}{AOY}$ กับ $\overset{\Delta}{POY}$ ต่างเป็นมุมประกอบ

ของมุมฉากด้วย [รูปข้อ 6]

กำหนดให้ BO พบเส้นตรง CA ที่ O

$\overset{\Delta}{XO}, \overset{\Delta}{YO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\overset{\Delta}{AOB}$ และ $\overset{\Delta}{BOC}$

ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ ก. $\overset{\Delta}{COX} + \overset{\Delta}{BOX} = 2$ มุมฉาก

ข. $\overset{\Delta}{AOY} + \overset{\Delta}{BOY} = 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ ก. $\therefore \overset{\Delta}{COX} + \overset{\Delta}{XOA} = 2$ มุมฉาก

$$\text{แต่ } \angle BOX = \angle XO A \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \angle COX + \angle BOX = 2 \text{ มุมฉาก}$$

$$2. \quad \therefore \angle AOY + \angle COY = 2 \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{แต่ } \angle COY = \angle BOY \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \angle AOY + \angle BOY = 2 \text{ มุมฉากด้วย.}$$

ช. ต. พ.

9/94 โจทย์ ตามรูปในข้อ 7 ถ้าหากว่ามุม AOB โต 35° ให้หาว่ามุม COY โตเท่าใด ? (H & S 9/13)

กำหนดให้ BO พบ AC ที่จุด O OX, OY เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม AOB และ BOC ตามลำดับแต่ให้ $\angle AOB = 35^\circ$

จะต้องการหา $\angle COY$ ว่ากางเท่าใด

$$\text{วิธีหา } \therefore \angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \quad (\text{ท.ป.1})$$

$$\text{แต่ } \angle AOB = 35^\circ \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 35^\circ$$

$$= 145^\circ$$

$$\text{และ } \angle COY = \frac{1}{2} \text{ ของ } \angle BOC$$

$$\therefore \angle COY = \frac{145^\circ}{2}$$

$$= 72^\circ 30'$$

โจทย์แบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ ๓

ว - ร หน้า 37

- 1/37 โจทย์ เข็มยาวของนาฬิกาจะหมุนไปเป็นมุมเท่าใด ใน
 เวลา (i) 5 นาที, (ii) 21 นาที, (iii) $43\frac{1}{2}$ นาที,
 (iv) 14 นาที, 16 วินาที ? และกินเวลานานเท่าใด จึง
 จะหมุนไปได้มุม (v) 66° และ (vi) 222° ?
 (H & S 1/15)

กำหนดให้ OA เป็นเข็มสั้น OB เป็นเข็มยาว และห่างกัน
 5 นาที

จะต้องการหา $\angle AOB$ กางเท่าไร.

วิธีหา (1) สมมติว่า เข็ม OB เดินทับเข็ม OA แล้วหมุน
 ไปทางขวาจนครบ 1 รอบ จะได้หมุน 360°

$\therefore$ เวลา 60 นาที เข็ม OB หมุนไปได้มุม 360 องศา

$$\therefore \text{ " 1 " " " } \frac{360}{60} = 6 \text{ "}$$

$$\text{ " 5 " " OB " } = 6 \times 5 \text{ "}$$

$$= 30 \text{ "}$$

ตอบ $\angle AOB$ กาง = 30 องศา

(ii) ใน 1 นาที เริ่ม OB หมุนไปได้มุม 6 องศา
 ,, 21 ,, ,, ,, 6 × 21 ,,
 = 126 ,,

ตอบ 126 องศา

(iii) ใน 1 นาที เริ่ม OB หมุนไปได้มุม 6 องศา
 ,, 43½ ,, ,, ,, 6 × 43½ ,,
 = 6 × $\frac{87}{2}$,,
 = 261 ,,

ตอบ 261 องศา

(iv) ใน 1 นาที เริ่ม OB หมุนไปได้ 6 องศา
 ,, 14⅔ ,, ,, ,, = 6 × 14⅔ ,,
 = 6 × $\frac{85}{6}$,,
 = 85 ,,

ตอบ 85 องศา

(v) และ (vi)

กำหนดให้ ให้เริ่มยาวหมุนไปทางเข็มนาฬิกา เป็นมุม 66°
 และ 222° โดย OA เป็นเข็มนาฬิกา และ OB เป็น
 เข็มนาฬิกา.

จะต้องการหา เข็มยาวทำมุมกับเข็มสั้น 66° และ 222° เป็น
เวลาห่างกันเท่าไร.

วิธีหา

เข็มยาวหมุนได้มุม 360° ต่อ 1 ชั่วโมง

ดังนั้น เข็มยาวหมุนได้ 360° ใน 60 นาที

“ “ 1 ใน $\frac{60}{360}$ “

= $\frac{1}{6}$ “

“ “ 66° ใน $\frac{1}{6} \times 66$ “

= 11 “

และ “ “ 222° ในเวลา $\frac{1}{6} \times 222$ “

= 37 “

ตอบ { เข็มยาวกับเข็มสั้นทางมุม 66°
ห่างกันเป็นระยะเวลา 11 นาที
เข็มยาวกับเข็มสั้นทางมุม 222°
ห่างกันเป็นระยะเวลา 37 นาที

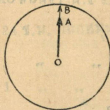
2/37 โจทย์ นาฬิกาเรือนหนึ่ง เริ่มเดิน ตั้งแต่ เวลาเที่ยงวัน

ถามว่า เข็มสั้น

(i) จะหมุนไปเป็นมุมเท่าใด เมื่อถึงเวลา 15.45 น.

(ii) 17.10 น. ?

และ (iii) จะเป็นเวลาดีกี่นาฬิกา ถ้าเริ่มต้นหมุนไปได้มุม $172\frac{1}{2}^\circ$? (H & S 2/15)



กำหนดให้ OA, OB เป็นเข็มสั้นและเข็มยาว ทั้งกันเวลาเที่ยงตรง

จะต้องการหา (i) เวลา 15.45 น. เริ่มต้น OA จะหมุนไปเป็นมุมกี่องศา

(ii) เวลา 17.10 น. เริ่มต้น OA จะหมุนไปเป็นมุมกี่องศา

(iii) ถ้าเริ่มต้น OA หมุนไปได้มุม $172\frac{1}{2}$ องศา จะเป็นเวลาเท่าใด

วิธีหา (i) และ (ii)

จากเที่ยงถึง 15.45 น. คิดเป็นเวลาได้ 3 ชั่วโมง

45 นาที หรือ $3\frac{3}{4}$ นาที

๑๖

จากเที่ยงถึง 17-10 น. คิดเป็นเวลาได้ 5 ชั่วโมง
10 นาที หรือ $5\frac{1}{6}$ ชั่วโมง

ใน 12 ช.ม. เส้นตั้ง OA หมุนได้ = 1 รอบ

หรือ = 360 องศา

“ 1 “ “ “ “ “ = $\frac{360}{12}$ “

= 30 “

“ $3\frac{3}{4}$ “ “ “ “ = $30 \times \frac{15}{4}$ “

= 112° 30'

“ $5\frac{1}{6}$ “ “ “ “ = $30 \times \frac{31}{6}$ “

= 155 องศา

(iii) เส้นตั้ง OA หมุนไป 360 องศาจะได้เวลา 12 ช.ม.

“ “ “ “ “ “ “ “ $\frac{12}{360}$ “

“ “ “ “ “ “ “ “ $\frac{12}{360} \times \frac{345}{2}$ “

= $\frac{23}{4}$ “

= $5\frac{3}{4}$ “

= 5 ช.ม. 45 นาที

ตอบ { (i) 112° 30'
(ii) 155°
(iii) 5 ช.ม. 45 นาที

3/37 โจทย์ โลกหมุนรอบตัวเองครึ่งหนึ่งกินเวลา 24 ชั่วโมง
ถามว่าถ้าโลกหมุนไป 3 ช.ม. 20 นาที จะได้หมุนกี่องศา?
และถ้าหากว่าโลกหมุนไปได้มุม 130° จะกินเวลา
นานเท่าใด ? (H & S3/15)

คำตอบ (i) ใน 24 ช.ม. โลกหมุนรอบตัวเองได้ 1 รอบ
หรือ 360 องศา

$$\begin{aligned} \text{,, } 1 \text{ ,, ,, ,, } & \frac{360}{24} \text{ ,,} \\ \text{,, } 3 \text{ ช.ม. } 20 \text{ นาที ,, ,, } & = \frac{360}{24} \times 3 \frac{1}{3} \text{ ,,} \\ & = 50 \text{ ,,} \end{aligned}$$

ตอบ 50°

(ii) โลกหมุนรอบตัวเอง 360 องศา 24 ช.ม.

$$\begin{aligned} \text{,, } \text{,, } 1 \text{ ,, } & \frac{24}{360} \text{ ,,} \\ \text{,, } \text{,, } 130^{\circ} \text{ ,, } & \frac{24}{360} \times 130 \text{ ,,} \\ & = \frac{26}{3} \text{ ,,} \\ & = 8 \text{ ช.ม. } 40 \text{ นาที} \end{aligned}$$

ตอบ 8 ช.ม. 40 นาที

4/38 โจทย์ AB กับ CD ตัดกันที่จุด O (ดูรูปของบทพิสูจน์ข้อ 3)

(1) ถ้า $\angle AOC = 35^{\circ}$ จงเขียนจำนวนองศาของมุม
 $\angle COB$, $\angle BOD$ และ $\angle DOA$ (ห้ามใช้ไม้โปรแทรกเตอร์)

(2) ถ้า $\angle COB + \angle AOD = 250^\circ$ จงหาจำนวนของของสาม
 $\angle COA$ และ $\angle BOD$

(3) ถ้า $\angle AOC + \angle COB + \angle BOD = 270^\circ$ จงหามุมทั้งสี่
 ที่ O ว่าเป็นมุมของสาม (H & S 1/15)

กำหนดให้ AB, CD ตัดกันที่จุด O ทำให้ $\angle AOC = 35^\circ$

จะต้องการหา จำนวนของสามของมุม $\angle COB, \angle BOC$ และ $\angle DOA$

วิธีหา ตอน(1) $\therefore \angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ (ท.ป.1)

$$\text{แต่ } \angle AOC = 35^\circ$$

$$\therefore \angle COB = 180^\circ - 35^\circ$$

$$= 145^\circ$$

ตอบ 145°

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD \quad (\text{ท.ป.3})$$

$$\therefore \angle BOD = 35^\circ \text{ ด้วย}$$

ตอบ 35°

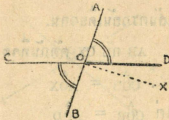
$$\text{และ } \therefore \angle COB = \angle AOD \quad (\text{ท.ป.3})$$

$$\therefore \angle AOD = 145^\circ \text{ ด้วย}$$

ตอบ 145°

ในข้อ (2), (3) เราหาจำนวนของสามของมุมต่าง ๆ
 โดยวิธีเดียวกัน.

5/38 โจทย์ ถ้าลากเส้นตรง OC และ OD จากจุด O ซึ่งเป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ในเส้นตรง AB โดยทำให้มุม COB เท่ากับมุม AOB ; แล้วจงพิสูจน์ว่า OC และ OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน. (H & S 5/15)



วิธีที่ 1 กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง CO กับ OD ตากมาพบกันที่จุด O ซึ่งเป็นจุด ๆ หนึ่ง ในเส้นตรง AB โดยกำหนดให้ $\angle AOD = \angle COB$ จะต้องพิสูจน์ว่า CO กับ OD คือเป็นเส้นตรงเดียวกัน

พิสูจน์ $\therefore CO$ พบ AB ที่จุด O
 $\therefore \angle AOC + \angle COB = 2$ มุมฉาก (ท.บ.1)
 แต่ $\angle AOD = \angle COB$ (ตามโจทย์)
 $\therefore \angle AOC + \angle AOD = 2$ มุมฉาก
 นั่นคือ CO กับ OD ตากมาพบ AB และทำ
 ให้มุมประชิดที่เกิดขึ้นรวมกัน $= 2$ มุมฉาก

$\therefore$ CO กับ OD เป็นเส้นตรงเดียวกัน (ท.ป.2)

ซ. ต. พ.

วิธีที่ 2 สิ่งที่กำหนดให้แต่ละสิ่งที่ต้องการ พิสูจน์เหมือนวิธีที่
สร้าง

ต่อ CO ออกไปที่จุด X สมมติให้ CO, OX เป็น
เส้นตรงอันเดียวกัน.

พิสูจน์

$\therefore$ AB กับ CX ตัดกันที่จุด O

$\therefore \angle COB = \angle AOX$ (ท.ป.3)

แต่ $\angle COB = \angle AOD$ (ตามโจทย์)

$\therefore \angle AOX = \angle AOD$

แต่มุมทั้งสองมุมแทน OA ร่วมกัน และอยู่ใน
ด้านตรงข้ามเดียวกัน จะเท่ากันได้ต่อเมื่อออก
เส้นหนึ่งรวมกันด้วย.

ดังนั้น OX กับ OD เป็นเส้นตรงเดียวกัน

แต่ OX กับ OC เป็นเส้นตรงเดียวกัน (สร้าง)

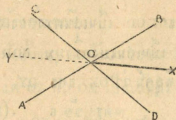
$\therefore$ OC กับ OD ก็ต่อเป็นเส้นตรงเดียวกันด้วย

ซ. ต. พ.

หมายเหตุ ในการพิสูจน์ บางครั้ง จำเป็น ต้องสร้างสิ่งประ
กอบขึ้นอีก เพื่อสะดวกในการพิสูจน์ยิ่งขึ้น.

6/38 โจทย์ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ O ถ้า
OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD, จงพิสูจน์ว่า ถ้าต่อ XO
ออกไปทาง O แล้วจะแบ่งครึ่งมุม AOC.

(H & S 6/15)



กำหนดให้ AB กับ CD ตัดกันที่จุด O

XO แบ่งครึ่งมุม BOD

ต่อ XO ตรงออกไปที่จุด Y

จะต้องพิสูจน์ว่า XY แบ่งครึ่ง $\angle AOC$ หรือ $\angle AOY = \angle YOC$

พิสูจน์ $\therefore$ XO แบ่งครึ่ง $\angle BOD$

$\therefore \angle DOX = \angle BOX$

$\therefore$ XY ตัดกับ AB ที่จุด O

$\therefore \angle AOY = \angle BOX$ (ท.ป.3)

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\angle YOC = \angle DOX$ (ท.ป.3)

แต่ $\overset{\wedge}{DOX} = \overset{\wedge}{BOX}$ (พิสูจน์มาแล้ว)

$\therefore \overset{\wedge}{AOY} = \overset{\wedge}{YOC}$

นั่นคือ XY แบ่งครึ่งมุม $\overset{\wedge}{AOC}$ ด้วย

ช. ต. พ.

7/38 โจทย์ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O
 OX และ OY เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BOD และ AOC ตาม
 ลำดับ จงพิสูจน์ว่า OX และ OY เป็นเส้นตรงอัน
 เดียวกัน (H & S 7/15)

กำหนดให้ AB กับ CD ตัดกันที่จุด O
 OX และ OY เป็นครึ่งมุม $\overset{\wedge}{BOD}$ และ $\overset{\wedge}{AOC}$
 ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า OX กับ OY คือเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

สร้าง คือ XO ไปถึงจุด Z

พิสูจน์ $\therefore XO$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\overset{\wedge}{BOD}$

และเมื่อต่อ XO ตรงออกไปจนถึงจุด Z เส้น

XZ จะแบ่งครึ่ง $\overset{\wedge}{AOC}$ ด้วย (พิสูจน์มาแล้ว

ในข้อ 6)

ดังนั้น ZO แบ่งครึ่ง $\overset{\wedge}{AOC}$

$\therefore \overset{\wedge}{COZ}$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\overset{\wedge}{AOC}$
 แต่โจทย์กำหนดให้ว่า $\overset{\wedge}{COY}$ เป็นครึ่งของ $\overset{\wedge}{AOC}$
 $\therefore \overset{\wedge}{COZ} = \overset{\wedge}{COY}$
 แต่มุมทั้งสองมีเส้น CO ร่วมกัน และ อยู่ทาง
 ข้างเดียวกัน
 ดังนั้นเส้น OZ กับ OY เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน
 แต่ OZ กับ OX เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน
 $\therefore OX$ กับ OY เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

ช. ต. พ.

8/39 โจทย์ ถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม AOB , จงพิสูจน์โดย
 การพิรูบให้เส้นแบ่งครึ่งมุม เป็นรอยพับว่า OA นั้น
 ซากกับ OB สนิท และ OA จะอยู่ข้างในของ OB ถ้า

(i) $\angle AOX$ โตกว่า $\angle XOB$;

(ii) $\angle AOX$ เล็กกว่า $\angle XOB$? (H&S 8/15)

[แบบฝึกหัดข้อนี้ ไม่ดีนัก ขอแนะนำ คือ

เมื่อเขียนรูปแล้ว ต้องลองพับดูตามรอยที่กำหนดให้ แต่ถ้าจะ
 ให้ดี ควรเขียนรูปใส่กระดาษอีกแผ่นหนึ่ง และพับดูจริงๆ]

วิธีพิสูจน์ พบตามแนว OX

สมมติว่า OA ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่าน O คือ OC และให้

$$\angle COX \text{ แทนมุม } \angle AOX$$

$$\therefore \angle AOX = \angle BOX \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle COX = \angle BOX$$

และมุมทั้งสองมีเส้น OX ร่วมกัน และอยู่ทาง
ข้างเดียวกัน

$$\therefore \text{เส้น OC } \perp \text{เส้น OB}$$

$$\therefore \text{เส้น OC } \perp \text{เส้น OA}$$

$$\text{นั่นคือ OA } \perp \text{ OB ดังนั้น} \quad \text{จ.ต.พ.}$$

คำถามในตอนหลังนี้ ตอบได้ว่า เส้นตรงทั้งสองไม่ทับ

กัน ถ้า $\angle AOX$ ใหญ่กว่า $\angle BOX$ เส้นตรง OA จะอยู่นอก $\angle BOX$

ถ้า $\angle AOX$ เล็กกว่า $\angle BOX$ เส้นตรง BOA จะอยู่ใน $\angle BOX$

9/39 โจทย์ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุม

ฉากที่จุด O จงพิสูจน์โดยการพิพจน์ให้ AB, เป็นรอยพับ

ว่า OC กับ OD ได้ฉาก.

(H & S 9/15)

วิธีพิสูจน์ $\therefore \angle BOC = \angle BOD$ (ต่างเท่ากับ 1 มุมฉาก)
 $\therefore$ ถ้าพับ $\angle BOC$ และ $\angle BOD$ โดยให้เส้นร่วม OB
 ทับกันแล้ว

$\therefore \angle BOC = \angle BOD$ (โจทย)

$\therefore$ เส้น OC ทับ OD ดังนั้น

10/39 โจทย์ เขียนเส้นตรง AOB ลงบนกระดาษ แล้วพับเส้น
 ณจุด O และให้ AO ทับ OB; จงพิสูจน์ว่ารอยพับนั้น
 ตั้งฉากกับ AB. (H & S 10/15)

กำหนดให้ AOB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง พับ AB ตรงจุด O
 ให้ OY เป็นรอยพับ

จะต้องพิสูจน์ว่า รอยพับ OY ขัอมตั้งฉากกับ AB

พิสูจน์ $\therefore$ OA ทับ OB และ OY เป็นเส้นร่วม

$\therefore \angle AOY = \angle BOY$

แต่ $\angle AOY + \angle BOY = 2$ มุมฉาก (ท.บ.1)

ดังนั้น $\angle BOY$ หรือ $\angle AOY = 1$ มุมฉาก

$\therefore$ OY ตั้งฉากกับ AB ช.ต.พ.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

ว - ร หน้า 50

1/50 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (i) แบ่งครึ่งฐาน, (ii) ตั้งฉากกับฐาน, (H & S 1/19)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว ปท. $\angle A$ เป็นมุมยอด
ลาก AD แบ่งครึ่ง $\angle A$ มายังฐาน BC ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $BD = CD$
(2) AD ตั้งฉากกับ BC

พิสูจน์ ในรูป $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB=AC \text{ (คุณสมบัติของ } \triangle \text{ หน้าจั่ว)} \\ \angle BAD = \angle CAD \text{ (เส้นแบ่งครึ่งมุม)} \\ AD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad (\text{ท.บ.4})$$

$$\therefore BD = CD \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ } \angle BDA = \angle CDA$$

$$\text{แต่ } \angle BDA + \angle CDA = 2 \text{ มุมฉาก (ท.ท.1)}$$

$$\therefore \angle BDA \text{ กับ } \angle CDA \text{ ต่างก็กาง } 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{นั่นคือ } AD \text{ ตั้งฉากกับ } BC \quad \dots\dots\dots (2)$$

ซ. ต. พ.

2/51 โจทย์ ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB, และให้ OC เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรง OC จงพิสูจน์ว่า $PA = PB$. (H & S 2/19)

กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB

ลาก CO ตั้งฉากกับ AB ที่จุด O

P เป็นจุด ๆ หนึ่งบน CO ลาก PA, PB

จะต้องพิสูจน์ว่า $PA = PB$

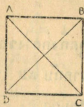
พิสูจน์ ในรูป $\triangle APO$ กับ $\triangle BPO$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} AO = BO \\ PO \text{ ด้านร่วม} \\ \angle POA = \angle POB \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (\text{ตามโจทย์}) \\ \\ (\text{มุมฉาก}) \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle APO = \triangle BPO \quad (\text{ท.บ.4})$$

$$\therefore PA = PB \quad \text{ช.ต.พ.}$$

3/51 โจทย์ สัมมตว่า ด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากันหมด และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD เส้นทแยงมุม AC และ BD ยาวเท่ากัน. (H & S 3/19)



กำหนดให้ ABCD เป็น □ จตุรัสรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน
 $AB = BC = CD = AD$
 และมุมทุกมุมตั้งฉากมุมละ 1 มุมฉากเท่ากัน
 ฉากเส้นทแยงมุม AC, BD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC = BD$

พิสูจน์ ในรูป $\triangle BDC$ กับ $\triangle ACD$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ตามโจทย์} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} AD = BC \quad (\text{ตามโจทย์}) \\ \therefore \left\{ \begin{array}{l} CD \text{ ด้านร่วม} \\ \angle ADC = \angle BCD \quad (\because \text{ต่าง} = 1 \text{ มุมฉากตามโจทย์}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

หอสมุดแห่งชาติ

๒๕

$$\therefore \triangle ADC = \triangle BCD \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore AC = BD$$

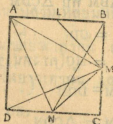
ช. ต. พ.

4/51 โจทย์ ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง L, M, N, เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CD ตามลำดับ.

จงพิสูจน์ว่า (i) $LM = MN$ (ii) $AM = DM$

(iii) $AN = AM$ (iv) $BN = DM$

(H & S 4/19)



กำหนดให้ ABCD เป็น □ จตุรัสรูปหนึ่ง L, M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $LM = MN$

(2) $AM = DM$

$$(3) \quad AN = AM$$

$$(4) \quad BN = DM$$

พิสูจน์ (1) ใน $\triangle BML$ กับ $\triangle CMN$

$$\therefore \begin{cases} LB = CN \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ MB = MC \text{ (" " ")} \\ \angle LBM = \angle NCM \text{ (ต่างก็ = 1 มุมฉาก)} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BML = \triangle CMN \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore LM = MN$$

(2) ใน $\triangle ABM$ กับ $\triangle CDM$

$$\therefore \begin{cases} AB = CD \text{ (ตามโจทย์)} \\ BM = MC \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้าน BC เดียวกัน)} \\ \angle ABM = \angle DCM \text{ (" " ")} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM = \triangle CDM \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore AM = DM$$

(3) ใน $\triangle ABM$ กับ $\triangle ADN$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \text{ (ตามโจทย์)} \\ BM = DN \text{ (ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน)} \\ \angle ABM = \angle ADN \text{ (ต่างก็ = 1 มุมฉาก)} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM = \triangle ADN \quad (\text{ท.บ. 4})$$

$$\therefore AN = AM$$

(4) ใน $\triangle BCN$ กับ $\triangle DMC$

$$\therefore \begin{cases} BC = CD & (\text{ตามโจทย์}) \\ CN = CM & (\text{ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน}) \\ \angle BCN = \angle DCM & (\text{ตรงกึ่ง = 1 มุมฉาก}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCN = \triangle DMC \quad (\text{ท.บ. 4})$$

$$\therefore BN = DM \quad \text{ซ.ด.พ.}$$

5/51 โจทย์ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีด้าน AB และ AC เป็นด้านคู่ยาวเท่ากัน ตัด AX และ AY จากด้านที่เท่ากันคู่ในให้อยาวเท่ากัน และต่อ BY และ CX จงพิสูจน์ว่า $BY = CX$. (H & S 1/19)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง มี $AB = AC$ ตัด AB, AC ที่จุด X และ Y ตามลำดับ โดยทำให้ $AX = AY$

โยงเส้น CX, BY

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์) ใน $\triangle ABY$ กับ $\triangle ACX$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{ตามโจทย์}) \\ AY = AX & (\text{ตามโจทย์}) \\ \angle BAY = \angle CAX & (\text{โดยเป็นมุมร่วมกัน}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABY = \triangle ACX \quad (\text{ท.บ. 4})$$

$$\therefore BY = CX \quad \text{ซ.ต.พ.}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

ว-ร หน้า 55

1/55 โจทย์ รูปสี่เหลี่ยม ABCD ซึ่งมีด้านเท่ากันหมด มี BD เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า

$$(1) \angle ABD = \angle ADB;$$

$$(2) \angle CBD = \angle CDB;$$

$$(3) \angle ABC = \angle ADC. \quad (H \& S 1/21)$$

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน $AB = BC$

$$CD = AD$$

และมี BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $\angle ABD = \angle ADB$

$$(2) \angle CBD = \angle CDB$$

$$(3) \angle ABC = \angle ADC$$

พิสูจน์ $\therefore AB = AD$ (ตามโจทย์)

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าที่ โดยมี BD เป็นฐาน

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD \quad (\text{ท.ป.5}) \dots\dots\dots (1)$$

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\angle CDB = \angle CBD \quad (\text{ท.ป.5}) \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \therefore \angle ADB + \angle CDB = \angle ABD + \angle CBD$$

(ตามสิ่งที่เห็นจริงแล้ว)

$$\text{นั่นคือ } \angle ABC = \angle ADC \quad \dots\dots\dots (3)$$

ช.ต.พ.

2/55 โจทย์ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูป คือ ABC กับ DEC
ซึ่งอยู่บนฐาน BC เดียวกัน แต่อยู่ข้างตรงรูป จงพิสูจน์
ว่า $\angle ABD = \angle ACD$ ด้วยบทพิสูจน์ที่ 5. (H&S2/21)

กำหนดให้ ABC กับ DEC เป็น Δ หน้าจั่ว 2 รูป
อยู่บนฐาน BC เดียวกัน แต่อยู่คนละข้างกับ BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD = \angle ACD$

พิสูจน์ $\therefore$ ABC เป็น Δ หน้าจั่ว และมีด้าน $AB = AC$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{ท.ป.5}) \dots\dots\dots (1)$$

และ $\therefore$ DEC เป็น Δ หน้าจั่ว มี $DB = DC$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB \quad (\text{ท.ป.5}) \dots\dots\dots (2)$$

$$(1)+(2) \therefore \angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$$

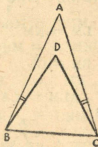
(ตามสิ่งที่เห็นจริงแล้ว)

$$\text{นั่นคือ } \angle ABD = \angle ACD \quad \text{ช.ค.พ.}$$

3/56 โจทย์ $\triangle ABC, \triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูป
อยู่บนฐาน BC ด้วยกัน และอยู่บนข้างเดียวกันด้วย จง
จงอาศัยบทพิสูจน์ที่ 5 พิสูจน์ว่า

$$\angle ABD = \angle ACD$$

(H & S 3/21)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DBC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป
ตั้งอยู่บนฐาน BC ด้วยกัน ทางข้างเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD = \angle ACD$

พิสูจน์ $\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว มีด้าน $AB = AC$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad (\text{ท.ป.5}) \dots (1)$$

และ $\therefore \triangle DBC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว มี $DB = DC$ เป็นฐาน

๓๖

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB \quad (\text{ท.ป.5}) \dots (2)$$

$$(1) - (2) \therefore \angle ABC - \angle DBC = \angle ACB - \angle DCB$$

(สิ่งที่เห็นจริงแล้ว)

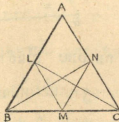
$$\text{นั่นคือ } \angle ABD = \angle ACD \quad \text{ซ.ต.พ}$$

4/56 โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$, L, M และ N, เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, และ CA ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$(1) \quad LM = NM$$

$$(2) \quad BN = CL$$

$$(3) \quad \angle ALM = \angle ANM \quad (\text{H \& S 4/21})$$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วปท่ง $AB = AC$
 L, M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC
 และ AC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ (1) $LM = MN$, (2) $BN = CL$

$$(3) \quad \angle ALM = \angle ANM$$

พิสูจน์ (1) จากโจทย์จะได้ว่า $BL = LA = AN = NC$

$$\text{และ } BM = MC$$

ในรูป $\triangle LBM$ กับ $\triangle MNC$

$$\therefore \begin{cases} LB = NC & (\text{ตามโจทย์}) \\ BM = MC & (\quad \text{,,} \quad) \\ \angle LBM = \angle MNC & (\text{ท.ป.5}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle LBM = \triangle MNC \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore LM = MN \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{และ } \angle BLM = \angle CNM \text{ ด้วย}$$

ใน $\triangle BNC$ กับ $\triangle BCL$

$$\therefore \begin{cases} NC = BL & (\text{ตามโจทย์}) \\ BC \text{ ด้านร่วม} \\ \angle NCB = \angle LBC & (\text{ท.ป.5}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BNC = \triangle BCL \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore BN = CL \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{และ } \therefore \angle ALM + \angle BLM = \angle ANM + \angle CNM \quad (\text{ท.ป.1})$$

หักมุม $\angle BLM$ และ $\angle CNM$ ที่เท่ากันออกเสียทั้ง
สองฐาน

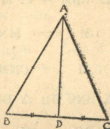
$$\therefore \text{มุมที่เหลือ } \angle ALM = \text{มุมที่เหลือ } \angle ANM \dots (2)$$

ซ.ด.พ.

1/66 โจทย์ จึงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากต่อมุมยอดของสาม
เหลี่ยมหน้าจั่วมายังจุดกึ่งกลางของฐานจะ

(1) แบ่งครึ่งมุมยอด

(2) ตั้งฉากกับฐาน. (H & S 1/26)



กำหนดให้ ABC เป็น Δ หน้าจั่วรูปหนึ่ง มีเส้นตรง AD
ลากจาก A มาแบ่งครึ่งฐาน BC ที่ D

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $\angle BAD = \angle CAD$

(2) AD ตั้งฉาก BC

พิสูจน์ ใน ΔABD กับ ΔACD

ACD

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{ตามโจทย์}) \\ BD = DC & (\quad \text{,,} \quad) \\ AD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad (\text{พ.บ.7})$$

$$\therefore \hat{BAD} = \hat{CAD} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ } \hat{ADB} = \hat{ADC} \text{ ด้วย}$$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน และรวมกัน

ได้ = 2 มุมฉาก

$$\therefore \hat{ADB} \text{ และ } \hat{ADC} \text{ ต่างก็กางมุมละ 1 มุมฉาก}$$

$$\text{นั่นคือ } AD \text{ ตั้งฉาก } BC \dots\dots\dots (2)$$

ช.ต.พ.

2/66 โจทย์ ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่ง
(คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านเท่ากันหมด) ถ้าลาก
เส้นทแยงมุม AC จงพิสูจน์ว่า

$$(1) \hat{ABC} = \hat{ADC}$$

$$(2) \text{เส้น } AC \text{ จะแบ่งครึ่ง } \hat{BAD} \text{ และ } \hat{BCD}$$

(H & S 2/26)

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ ด้านเท่ารูปหนึ่ง

ลากเส้นทแยงมุม AC

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $\triangle ABC = \triangle ADC$

(2) AC แบ่งครึ่ง BD และ BCD

พิสูจน์ ใน $\triangle ACD$ กับ $\triangle ABC$

$$\therefore \begin{cases} AD = AB & \text{(ตามโจทย์)} \\ CD = CB & \text{(ตามโจทย์)} \\ AC \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD = \triangle ABC \quad (\text{ท.ป. 7})$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{และ } \triangle ACD = \triangle ACB$$

$$\therefore \triangle CAD = \triangle CAB \text{ ด้วย}$$

$$\text{นั่นคือ } AC \text{ แบ่งครึ่ง } BD \text{ และ } BCD \dots \dots (2)$$

ชดพ.

3/67 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ถ้าด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามเท่ากัน กล่าวคือ $AB = CD$ และ $AD = CB$ จงพิสูจน์ว่า

$$\angle ADC = \angle ABC \quad (H \& S 3/26)$$

กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB = CD$

$$\text{และ } BC = AD$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC = \triangle ADC$

พิสูจน์ ถ้ากั้นทแยงมุม AC

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

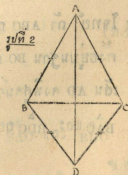
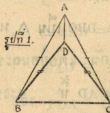
$$\therefore \begin{cases} AB = CD & (\text{ตามโจทย์}) \\ CB = AD & (\text{ " " }) \\ AC \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC \quad (\text{ท.ป.7})$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC \quad \text{ชดพ.}$$

4/67 โจทย์ ถ้า $\triangle ABC$ และ $\triangle DCB$ เป็นสามเหลี่ยมทงด้านตรงของรูป ดังอยู่บนฐาน BC เหมือนกัน จงพิสูจน์ (โดยใช้บทพิสูจน์ที่ 7) ว่า มุม $\angle ABD = \angle ACD$ ในกรณี เมื่อ (1) สามเหลี่ยมทงต้องนั้น อยู่บนข้างเดียวกันกับ BC (2) สามเหลี่ยมทงต้องอยู่คนละข้างกับ

ฐาน BC



กำหนดให้ ABC, DBC เป็นด้านเดียวกันหน้าจุด C ตั้งอยู่บน
 ฐานร่วม BC และอยู่ข้างเดียวกันดังรูป 1.
 และอยู่ก้นกันคนละข้างดังรูป 2.

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABD = \triangle ACD$
 พิสูจน์ (เพราะข้อนี้ พิสูจน์ที่จริงแล้วต่อไปน ใช
 ได้ทั้งสองรูป)

(จ.น.ก.)

ลาก AD

ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

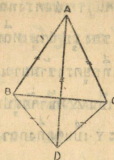
$$\begin{cases} AB = AC & (\text{โจทย์}) \\ BD = CD & (\text{""}) \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD \quad \text{ซ.ต.พ.}$$

5/67 โจทย์ ถ้า ABC กับ $\triangle DBC$ เป็น $\triangle$ หน้าจุด C รูป
 ตั้งอยู่บนฐาน BC เดียวกัน แต่อยู่คนละข้าง ถ้าลาก
 เส้น AD จงพิสูจน์ว่าเส้น AD นี้ จะแบ่งมุมครึ่งมุม
 $\angle BAC$ และ $\angle BDC$ ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน ๆ กัน

(H & S 5/26)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DCB$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูป ตั้งอยู่บน
ฐาน BC เดียวกัน แต่อยู่คนละข้าง ตากเส้น AD
จะต้องพิสูจน์ว่า AD แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ และ $\angle BDC$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{ตามโจทย์}) \\ BD = CD & (\quad , \quad) \\ AD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad (\text{ท.ป. 7})$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD$$

$$\text{และ } \angle BDA = \angle CDA$$

นั่นคือ AD แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ และ $\angle BDC$

6/68 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดปลายทั้งสอง
 ของด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปยังจุดกึ่ง
 กลางของด้านที่อยู่ตรงข้ามยาวเท่ากัน (H&S 6/26)
 กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB = AC$
 X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AC ตาม
 ลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABY$ กับ ACX

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{ตามโจทย์}) \\ AY = AX & (\text{ครึ่งหนึ่งของด้านที่เท่ากัน}) \\ \angle A \text{ เป็นมุมร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABY = \triangle ACX \quad (\text{ท.ป. 4})$$

$$\therefore BY = CX$$

ชดพ.

7/68 โจทย์ บนฐานของ $\triangle$ หน้าจั่ว มี 2 จุด ซึ่งต่างก็
 อยู่ห่างจากปลายฐานเท่ากัน จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งสอง
 จุดนั้น อยู่ห่างจากมุมยอดเป็นระยะทางเท่ากันด้วย

(H & S 7/26)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง X และ Y เป็น

จุด ๒ จุด อยู่ในฐาน BC โดย $BX = CY$
 จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = AY$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABX$ กับ $\triangle ACY$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & (\text{ตามโจทย์}) \\ BX = CY & (\text{,,}) \\ \angle ABX = \angle ACY & (\text{ท.ป.5}) \end{cases}$$

$$\triangle ABX = \triangle ACY \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore AX = AY$$

ช.ต.พ.

8/68 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลาก
 เส้นตรง ต่อจุด กึ่งกลาง ของด้าน ทงสาม ของรูปสาม
 เหลี่ยมด้านเท่าจะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วย.

(H & S 8/26)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่ารูปหนึ่ง มี X, Y และ Z เป็น
 จุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ AC ตามลำดับ
 จะต้องพิสูจน์ว่า XYZ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

พิสูจน์ ใน $\triangle AXZ$ กับ $\triangle BXY$

$$\therefore \begin{cases} AX = BX & (\text{ตามโจทย์}) \\ AZ = BY & (\text{เพราะต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน } AC, BC \text{ เท่ากัน}) \\ \angle XAZ = \angle YBX & (\text{บทแทรก 2. ท.ป.5}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AXZ = \triangle BXY \quad (\text{ท.ป. 4})$$

$$\therefore XZ = XY$$

ทำนองเดียวกัน ใน $\triangle AXZ$ กับ $\triangle CYZ$ เรา
จะพิสูจน์ได้ว่า $XZ = YZ$

$$\therefore XZ = XY = YZ$$

นั่นคือ XYZ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า ช.ต.พ.

9/68 โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน

$AB = AC$, ถ้ามุม B และมุม C ถูกแบ่งครึ่งโดย BO
และ CO: จงพิสูจน์ว่า

$$(1) \quad BO = CO$$

$$(2) \quad AO \text{ แบ่งครึ่งมุม } BAC.$$

(H & S 9/26)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หนักรูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB = AC$
 BO กับ CO แบ่งครึ่ง $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ตามลำดับ
 และพบกันที่จุด O คือ AO

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $BO = CO$

(2) $\angle BAO$ และ $\angle CAO$

พิสูจน์ (i) $\therefore \angle ABC = \angle ACB$ (ท.บ. 5)

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$ ด้วย ($\because$ ต่างก็ $= \frac{1}{2}$
 ของมุมที่เท่ากัน)

$\therefore OB = OC$ (ท.บ. 6)

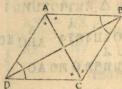
(ii) ใน $\triangle ABO$ กับ $\triangle ACO$.

$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ OB = OC \\ AO \text{ ด้านร่วม} \end{cases} \begin{matrix} \text{(ตามโจทย์)} \\ \text{(พิสูจน์มาแล้ว)} \end{matrix}$

$\therefore \triangle ABO = \triangle ACO$ (ท.บ. 7)

$\therefore \angle BAO = \angle CAO$ ชดพ.

10/68 โจทย์ คงพิสูจน์ว่า เส้นตรงแบ่งมุมทั้งสองของรูปสี่
 เหลี่ยมขนานมเยกป็นจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกัน
 เป็นมุมฉาก (H & S 10/26)



กำหนดให้ $\triangle ACD$ เป็น $\square$ ซึ่งมี AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $AO = OC$ และ $DO = OB$

(2) AC ตั้งฉากกับ BD

พิสูจน์ (i) ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle CBD$

$$\therefore \begin{cases} AB = CB & (\text{ตามโจทย์}) \\ AD = DC & (,,) \\ BD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle CBD \quad (\text{ท.บ.1})$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle CBD$$

ใน $\triangle OAB$ กับ $\triangle OCB$

$$\therefore \begin{cases} AB = CB & (\text{ตามโจทย์}) \\ OB \text{ ด้านร่วม} \\ \angle ABO = \angle CBO & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAB = \triangle OCB \quad (\text{ท. 11.4})$$

$$\therefore AO = OC$$

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $DO = OB$

$$(ii) \therefore \triangle OAB = \triangle OCB$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COB \text{ ด้วย}$$

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดรวมกัน = 2 มุมฉาก

$$\therefore \text{แต่ละมุมต้องกาง} = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{นั่นคือ } \angle AOB = \angle COB = 90^\circ \quad (2)$$

ช.ต.พ.

11/60 โจทย์ BAC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมีด้าน
 $BA = CA$ ถ้าตัดด้าน BC ที่ E และ F ออกไปทางมุมยอด
 A ถึงจุด E และ F โดยทำให้ $AE = AF$ จงพิสูจน์ว่า
 $BE = CF$ (H & S 11/25)

กำหนดให้ BAC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมี $BA = CA$
 คือ BA ออกไปที่ E และ CA ออกไปที่ F โดย
 $AE = AF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $FB = EC$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABF$ กับ $\triangle ACE$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & \text{(ตามโจทย์)} \\ AF = AE & \text{(")} \\ \angle BAF = \angle CAE & \text{(ท.ป.3)} \end{cases}$$

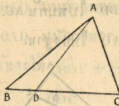
$$\therefore \triangle ABF = \triangle ACE \quad \text{(ท.ป.4)}$$

$$\therefore FB = EC \quad \text{ข.ต.พ.}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ ๘

จ-ร หน้า 77

1/77 โจทย์ จงพิสูจน์บทแทรกที่ 1 โดยลากเส้นตรงจากมุม
ยอด A ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในฐาน BC (H & S 1/29)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC + \angle ACB < 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ จาก A ลาก AD มายังฐาน BC ที่ D

ใน $\triangle ABD$ มี $\angle ADC$ เป็นมุมภายนอก

$$\therefore \angle ADC > \angle ABD \quad (\text{ท.บ.8}) \dots (1)$$

และใน $\triangle ADC$ มี $\angle ADB$ เป็นมุมภายนอก

$$\therefore \angle ADB > \angle ACD \quad (\text{ท.บ.8}) \dots (2)$$

$$(1) + (2) \therefore \angle ADC + \angle ADB > \angle ABD + \angle ACD$$

$$\text{แต่ } \angle ADC + \angle ADB = 2 \angle \text{น} \quad (\text{ท.บ.1})$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ACD < 2\angle D$$

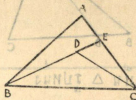
$$\text{นั่นคือ } \angle ABC + \angle ACB < 2\angle D$$

ช.ต.พ.

2/77 โจทย์ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมหนึ่ง D เป็นจุด ๆ
 หนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยมนี้ ถ้า BD และ CD เป็น
 (๑) พิสูจน์ว่ามุม BDC ใด ๆ มากกว่ามุม BAC โดยวิธี

(1) คือ BD ไปพบกับ AC .

(2) คือ AD ไปยังฐาน. (H & S 2/29)



กำหนดให้ D เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายใน $\triangle ABC$

คือ BD และ CD .

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BDC > \angle BAC$ โดยวิธี

(1) (ii) คือ BD ไปพบกับ AC ที่ E .

(ii) คือ AD ไปพบกับฐาน BC ที่ F

พิสูจน์ (i) คือ BD ไปพบกับ AC ที่ E

ใน $\triangle ABE$ มี $\angle BEC$ เป็นมุมภายนอก

$$\therefore \angle BEC > \angle BAE \quad (\text{ท.บ. 8})$$

และใน $\triangle CDE$ มี $\angle BDC$ เป็นมุมภายนอก (ท.บ.๘)

$$\therefore \angle BDC > \angle BEC$$

$\therefore \angle BDC$ ก็ยัง $> \angle BAE$

$$\therefore \angle BDC > \angle BAC$$

(ก) ต่อ AD ไปตัดฐาน BC ที่ F

ใน $\triangle BAD$, มุมภายนอก $\angle BDF > \angle BAD$ (ท.บ.๘)

ใน $\triangle CAD$, มุมภายนอก $\angle CDF > \angle CAD$ (ท.บ.๘)

รวมกันจะได้ $\angle BDF + \angle CDF > \angle BAD + \angle CAD$

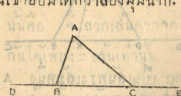
$$\therefore \angle BDC > \angle BAC$$

(ข.ต.พ.)

3/77 โจทย์ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป

ไปทั้งสองข้าง, จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกทั้งสองที่เกิดขึ้น

รวมกันเข้าย่อมโตกว่าสองมุมภายใน (H & S 5/29)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หนึ่ง ต่อด้าน BC ออกไป

ทั้งสองข้างถึงจุด D และ E

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD + \angle ACE > 2 \angle C$

พิสูจน์ (ป.ท.) $\angle ABD + \angle ABC$ และ $\angle ACB + \angle ACE$ ต่างก็ $= 2 \angle C$
(ท.ป. 1)

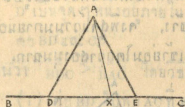
$$\therefore \angle ABC + \angle ABC + \angle ACB + \angle ACE = 4 \angle C$$

แต่ $\angle ABC + \angle ACB < 2 \angle C$ (บทแทรก 1 ท.ป. 8)

(8.ป. 8) $\therefore$ มุมที่เหลือคือ $\angle ABD + \angle ACE > 2 \angle C$

(8.ป. 8) $\therefore$ $\angle ABD + \angle ACE > 2 \angle C$ ช. ท. พ.

4/77 โจทย์ จากจุด ๆ หนึ่งภายนอกเส้นตรงที่กำหนดให้เส้น
หนึ่ง จะลากเส้นตรงไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ ให้
พ. ความยาวเท่ากับ ความยาวที่ กำหนดให้ มากกว่า 2 เส้น
ไม่ได้. (H & S 5/29)



กำหนดให้ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง A เป็นจุด ๆ หนึ่ง
อยู่ภายนอก

จาก A ลาก AD และ AE มาตัดด้าน BC ที่จุด
D และ E ตามลำดับ โดยทำให้ $AD = AE$

จะต้องพิสูจน์ว่า มีเส้นตรง 2 เส้นเท่ากันคือ AD, AE เท่ากัน
ที่ลากจาก A มายัง BC ได้

พิสูจน์ สมมติว่า จาก A ลากเส้นตรงเท่ากันมายัง BC ได้มากกว่าสองเส้น

ให้ AX เป็นเส้นตรงเส้นที่ลากจาก A มายัง BC โดยทำให้

$$AX = AC = AE$$

$$\therefore \angle ADX = \angle AXD \quad (\text{ท.ป. 5})$$

แต่ $\therefore AD = AE \quad (\text{โจทย์})$

$$\therefore \angle ADX = \angle AED \quad (\text{ท.ป. 5})$$

$$\therefore \angle AXD = \angle AED \quad \text{ด้วย}$$

$$\text{แต่ } \angle AXD > \angle AED \quad (\text{ท.ป. 8})$$

ดังนั้น ตามที่ได้อนุมตไว้จึงเป็นจริงไปไม่ได้

นั่นคือ จึงลากเส้นจากจุด A มายัง BC ให้เท่า

กันได้เพียง 2 เส้นเท่านั้น ซ.ต.พ.

๕/๗๗ โจทย์ ถ้าข้อด้านที่เท่ากัน ของรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ออกไป มุมภายนอกทั้งสองข้างก็จะต้องเป็นมุมบ้าน

(H & S 5/29)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หนึ่งรูปหนึ่ง มี LC เป็นฐาน

คือ AB และ AC ไปทจุด D และ E ตามลำดับ
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle DBC$ กับ $\angle BCE$ ต่างก็ใหญ่กว่า $1 \angle C$

พิสูจน์ $\therefore \angle DBC > \angle ACB$ (ท.บ. 8)

แต่ $\angle ACB = \angle ABC$ (ท.บ. 5)

$\therefore \angle DBC > \angle ABC$ ด้วย

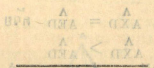
แต่ $\angle DBC + \angle ABC = 2 \angle C$ (ท.บ. 1)

ดังนั้น $\angle DBC$ ต้อง $> 1 \angle C$

และ $\therefore \angle BCE = \angle DBC$ (บทแทรกที่ 1 ท.บ. 5)

$\therefore \angle BCE > 1 \angle C$ ด้วย

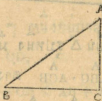
ซ.ต.พ.



แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12

ว. - ร. หน้า 87

1/87 โจทย์ ให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านที่แบ่งหรือด้านตรงข้ามมุมฉาก เป็นด้านยาวที่สุด (H & S 1/34)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉากรูปหนึ่ง ซึ่งมี AB เป็นด้านที่แบ่ง และ $\triangle ACB$ เป็นมุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ว่า AB เป็นด้านยาวที่สุด

พิสูจน์ $\therefore \angle BAC + \angle ACB < 2 \text{ L.น.}$ (บททฤษฎี 10.8)

แต่ $\angle ACB = 1 \text{ L.น.}$ (โจทย์)

$\therefore \angle BAC < 1 \text{ L.น.}$

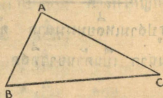
ดังนั้นได้ข้อสรุปว่า $\angle ABC < 1 \text{ L.น.}$

$\therefore$ ใน $\triangle ABC$ $\angle ACB$ ซึ่งเป็นมุมใหญ่ที่สุด

$\therefore AB$ เป็นด้านยาวที่สุด (ท.บ. 10)

ช.ค.พ.

2/87 โจทย์ ด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมย่อมทำมุม
แหลมกับด้านอีกสองด้าน (H & S 2/34)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี BC เป็นด้านยาวที่สุด
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC, \angle ACB$ ต่างเป็นมุมแหลม

พิสูจน์ สมมติว่า $\angle ABC, \angle ACB$ ต่างเป็นมุมบาน

$\therefore BC$ เป็นด้านยาวที่สุด (โจทย์)

$\therefore \angle BAC$ ใหญ่ที่สุด (ท.ป.9)

$\therefore \angle BAC > \angle ABC$, หรือ $> \angle ACB$

$\therefore$ ถ้า $\angle ABC$ หรือ $\angle ACB$ เป็นมุมบาน ($> 90^\circ$)

$\therefore \angle BAC$ ต้องเป็นมุมบานด้วย

$\therefore (\angle BAC + \angle ABC)$ หรือ $(\angle BAC + \angle ACB)$ ต่าง

$> 180^\circ$ ฉะนั้นจริงไม่ได้ (ท.ป.8)

$\therefore \angle ABC, \angle ACB$ ต้องต่างเป็นมุมแหลม

3/87 โจทย์ ถ้าลากเส้นตรงจากปลายทั้งสองของด้าน^๑หนึ่งของรูปสามเหลี่ยม^๑รูปหนึ่ง, ไปยังจุด^๑ๆ หนึ่งภายในรูปสามเหลี่ยม^๑รูปนั้น, ระยะทางของเส้นทั้งสองรวมกัน จะสั้นกว่าด้าน^๑อีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยม^๑นั้นรวมกัน รูป H & S 2/29 (H & S 3/34)

กำหนดให้ D เป็นจุด^๑ๆ หนึ่งภายในรูป $\triangle ABC$
ลาก BD, CD,

จะต้องพิสูจน์^๑ว่า $BD + CD < AB + AC$

พิสูจน์^๑ ต่อ BD ไปพบ AC ที่ E

ใน $\triangle ABE$ $\therefore AB + AE > BE$ (ท.๒.๑๑).... (1)

และใน $\triangle CDE$ $\therefore CE + DE > CD$ (ท.๒.๑๑).... (2)

(1)+(2) $\therefore AB + AE + CE + DE > BE + CD$

$\therefore AB + AE + CE + DE > BD + DE + CD$

($\because BE = BD + DE$)

หัก DE ที่รวมอยู่ทั้งสองข้างออก

$\therefore AB + AE + CE > BD + CD$

คือ $AB + AC > BD + CD$

หรือ $BD + CD < AB + AC$ ช.ต.พ.

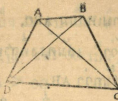
4/87 โจทย์ ถ้าต่อฐาน BC ของ $\triangle$ เที่ยมหน้าจั่ว ABC
 ไปจนถึงจุด D จงพิสูจน์ว่า AD ยาวกว่าด้านที่เท่า
 กันด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้น
 (H & S 4/34)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ต่อฐาน BC ออก
 ไปจนถึงจุด D
 จะต้องพิสูจน์ว่า $AD > AB$

พิสูจน์ ใน $\triangle ACD$ มี $\angle ACB$ เป็นมุมภายนอกที่ D
 $\therefore \angle ACB > \angle ADC$ (ท.บ.8)
 แต่ $\angle ACB = \angle ABC$ (ท.บ.5)
 $\therefore \angle ABC > \angle ADC$
 $\therefore AD > AB$ (ท.บ.10)

ช. ต. พ.

5/87 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าด้านที่ยาวที่สุดและ
 ด้านที่สั้นที่สุดอยู่ตรงกันข้ามแล้ว มุมที่ประชิดกับด้าน
 ที่สั้นที่สุด ย่อมใหญ่กว่ามุมที่อยู่ตรงข้าม
 (H & S 5/34)



กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี AB สั้นที่สุด
และ CD ยาวที่สุดอยู่ตรงข้ามกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $\angle ABC > \angle ADC$
(2) $\angle DAB > \angle DCB$

พิสูจน์ (๑) ดูกเส้นตรงแยงมุม BD
(๑.๒.๓) ใน $\triangle ABD$, $\because AB$ สั้นที่สุด (ตามโจทย์)

$\therefore AD$ ยาวกว่า AB
 $\therefore \angle ABD > \angle ADB$ (ท.๒.๑) (A)

และใน $\triangle BCD$, $\because CD$ ยาวที่สุด (ตามโจทย์)
 $\therefore CD$ ยาวกว่า BC

$\therefore \angle DBC > \angle BDC$ (ท.๒.๑) (B)

(A)+(B) จะได้ $\angle ABD + \angle DBC > \angle ADB + \angle BDC$

นั่นคือ $\angle ABC > \angle ADC$ (2)

(๒) ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราลาก AC ก็
สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\angle DAB > \angle DCB$ (1)

ช. ต. พ.

6/88 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC , ถ้า AC ไม่ยาวกว่า AB , จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากผ่านมุมยอด A ไปจุดฐาน BC , จะสั้นกว่า AB . (H & S 6/34)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี $AC < AB$

จาก A ลาก AX มาตัด BC ที่จุด X

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX < AB$

พิสูจน์ ใน $\triangle ACX$ มี $\angle AXB$ เป็นมุมภายนอก ไม่ว่าจุด X จะอยู่ที่ใด บน BC ทั้งสิ้น

$$\angle AXB > \angle ACX \text{ เสมอ} \quad (\text{ท.ป. 8})$$

$$\text{ใน } \triangle ABC \therefore AB > AC \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle ACB \text{ หรือ } \angle ACX > \angle ABC \quad (\text{ท.ป. 9})$$

$$\therefore \angle AXB > \angle ABC \text{ เสมอด้วย}$$

$$\therefore AB > AX \quad (\text{ท.ป. 10})$$

$$\text{หรือ } AX < AB$$

ช.ต.พ.

7/88 โจทย์ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง OB, OC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $AB > AC$ แล้ว $OB > OC$. (H & S 7/34)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี $AB > AC$, O แบ่ง

ครึ่ง $\angle ACB$ และ OC เป็น $\angle ACB$

จะต้องพิสูจน์ว่า $OB > OC$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$ $\therefore AB > AC$ (ตามโจทย์)

$$\therefore \angle ACB > \angle ABC \quad (\text{ท.ป.9})$$

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ ของ } \angle ACB > \frac{1}{2} \text{ ของ } \angle ABC \text{ ด้วย}$$

$$\text{นั่นคือ } \angle OCB > \angle OBC$$

$$\therefore OB > OC \quad (\text{ท.ป.10})$$

ช. ต. พ.

8/88 โจทย์ ผิดต่างของด้าน 2 ด้านของ $\triangle$ ใดๆ ย่อมสั้นกว่าด้านที่ 3 (H & S 8/34)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี AB เป็นด้านสั้นที่สุด

จะต้องพิสูจน์ว่า $(BC - AC) < AB$

$$\text{พิสูจน์ } \therefore BC < AB + AC \quad (\text{ท.ป.11})$$

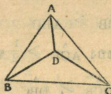
เอา AC หักออกเสียทั้งสองข้าง

$$\therefore (BC - AC) < (AB + AC - AC)$$

$$\text{นั่นคือ } (BC - AC) < AB$$

ช. ต. พ.

9/88 โจทย์ ผลบวกของระยะทางจากจุดๆ หนึ่ง ไปยังมุม
ทั้งสามของรูป $\triangle$ ย่อมยาวกว่าครึ่งหนึ่งของความยาว
ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกัน
(H & S 9/34)



กำหนดให้ D เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่ภายใน $\triangle ABC$,

ลาก AD , BD และ CD

จะต้องพิสูจน์ว่า $(AD + BD + CD) > \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ $\therefore AD + BD > AB$ (ท.ป.11) ... (1)

„ $\triangle BCD$ $\therefore BD + CD > BC$ („) ... (2)

„ $\triangle ACD$ $\therefore CD + AD > AC$ („) ... (3)

(1) + (2) + (3) $\therefore (AD + BD + BD + CD + CD + DA)$

$> (AB + BC + AC)$

$\therefore 2 (AD + BD + CD) > (AB + BC + AC)$

นั่นคือ $AD + BD + CD > \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$

ช.ต.พ.

10/88 โจทย์ ผลบวกของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ย่อม
 ยาวกว่าผลบวกของเส้นทแยงมุมทั้งสอง ของรูปสี่
 เหลี่ยมนั้น (H & S 10/34)

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง
 มี AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB+CB+CD+AD > (AC+BD)$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC$: $AB + AC > BC$ (ท. 1.11)....(1)

,, $\triangle ACD$: $AD + CD > AC$ (,,)....(2)

,, $\triangle BCD$: $CD + BC > BD$ (,,)....(3)

,, $\triangle ABC$: $AB + BC > AC$ (,,)....(4)

(1)+(2)+(3)+(4) : $(AB+AD+AD+CD+CD+BC+AB+BC) > (BD + AC + BD+AC)$

$\therefore 2 (AB+BC+CD+AD) > 2 (BD+AC)$

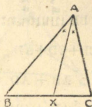
นั่นคือ $(AB+BC+CD+AD) > (BD + AC)$

ช.ต.พ.

11/88 โจทย์ ABC เป็นรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง AX แบ่งครึ่ง $\angle A$
 พบ BC ที่ X จงพิสูจน์ว่า

(1) $AB > BX$ และ $AC > CX$

- (2) ผลบวกของด้าน 2 ด้านของ $\triangle$ ยาวกว่า
ที่สาม (ท.บ.11)
(H & S 11/34)



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
 AX แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ พบ BC ที่ X

- จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $AB > BX$ และ $AC > CX$
(2) $AB + AC > BC$

พิสูจน์ (i) ใน $\triangle ACX$ $\therefore \angle AXB$ เป็นมุมภายนอก
 $\therefore \angle AXB > \angle XAC$ (ท.บ. 8)
แต่ $\angle BAX = \angle XAC$ (ตามโจทย์)
 $\therefore \angle AXB > \angle BAX$ ด้วย
ใน $\triangle ABX$ $\therefore AB > BX$ (ท.บ. 10)
โดยทำนองเดียวกัน ขาพิสูจน์ได้ว่า
 $AC > CX$

(ii) เขามัดได้รวมกัน

$$\therefore (AB + AC) > BX + CX$$

$$\text{นั่นคือ } (AB + AC) > BC$$

ช. ต. พ.

12/89 โจทย์ ผลบวกของระยะทางจากจุดๆหนึ่ง ไปยังมุม
ทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้าน
ทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม (H & S 12/34)
กำหนดให้ D เป็นจุดๆหนึ่ง ภายใน $\triangle ABC$

ลาก DA, BD และ CD.

จะต้องพิสูจน์ว่า $(AD + BD + CD) < (AB + BC + AC)$

พิสูจน์ $\therefore D$ เป็นจุด ภายใน $\triangle ABC$

$\therefore$ จากการพิสูจน์ในข้อ 3 เราจะได้ว่า

$$(DB + CD) < (AB + AC) \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{โดยทำนองเดียวกัน } (CD + AD) < (AB + BC) \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{และ } (AD + BD) < (BC + AC) \dots\dots\dots (2)$$

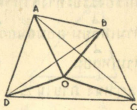
$$(1) + (2) + (3) \therefore 2AD + 2BD + 2CD < 2AB + 2BC + 2AC$$

$$2(AD + BD + CD) < 2(AB + BC + AC)$$

$$\text{นั่นคือ } (AD + BD + CD) < (AB + BC + AC)$$

ช. ต. พ.

13/89 โจทย์ ผลบวกของเส้นตรงแยงมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม ย่อมสั้นกว่าผลบวกของเส้นตรง 4 เส้นที่ลากจากจุดมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม ไปยังจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง. (H & S 13/34)



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง มี AC และ BD เป็นเส้นตรงแยงมุม O เป็นจุดหนึ่งอยู่ภายใน ลาก OA, OB, OC และ OD.

จะต้องพิสูจน์ว่า $(OA + OB + OC + OD) > (AC + DB)$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOC$ $\therefore (AO + OC) > AC$ (ท.บ.11)....(1)

,, $\triangle BOD$ $\therefore (OB + OD) > BD$ (,,)....(2)

(1) + (2) $\therefore (OA + OB + OC + OD) > AC + BD$

ช. ต. พ.

14/89 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าเอาด้านสองด้านรวมกันเข้าแล้ว ย่อมยาวกว่าสองเท่าเส้นที่แบ่งครึ่ง

ด้านที่เหลือ (คงต่อเส้นมีเดีย, และดำเนินการสร้าง
อย่างบทพิสูจน์ที่ 8) (H & S 14/34)

กำหนดให้ AO เป็นเส้นมีเดียของ $\triangle ABC$ ที่ลากจาก A
มาแบ่งครึ่ง BC ที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + AC > 2AO$

พิสูจน์ ต่อ AO ไปถึง D ทำให้ $AO = OD$

ลาก DC

ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle COD$.

$$\therefore \begin{cases} AO = OD & (\text{สร้าง}) \\ BO = OC & (\text{โจทย์}) \\ \angle AOB = \angle COD & (\text{ท.ป. 11}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB = \triangle COD \quad (\text{ท.ป. 4})$$

$$\therefore AB = CD$$

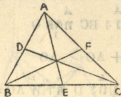
$$\text{ใน } \triangle ACD \therefore AC + CD > AD \quad (\text{ท.ป. 11})$$

$$\text{แต่ } AD = 2AO \quad (\text{สร้าง})$$

$$\therefore AC + CD > 2AO$$

$$\text{นั่นคือ } AB + AC > 2AO \quad (\because AB = CD)$$

15/89 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ผลบวกของเส้นมัธยฐาน
ทั้งสาม ย่อมสั้นกว่าผลบวกของด้านทั้งสามของรูป
สามเหลี่ยมนั้น (H & S 15/34)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง
AE, BF, และ CD เป็นเส้นมัธยฐานทั้งสาม

จะต้องพิสูจน์ว่า $(AB + BC + AC) > (AE + BF + CD)$

พิสูจน์ จากวิธีพิสูจน์ในข้อ 14 จะได้

$$(BA + AC) > 2 AE \quad (1)$$

$$(AB + BC) > 2 BF \quad (2)$$

$$\text{และ } (BC + AC) > 2 CD \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3)$$

$$\therefore 2 AB + 2 BC + 2 AC > 2 AE + 2 BF + 2 DC.$$

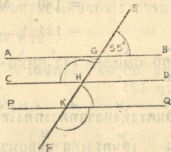
เอา 2 หายไป

$$\therefore (AB + BC + AC) > (AE + BF + CD)$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ -5

ว. - ร. หน้า 105

- 1/105 โจทย์ เส้นตรงสามเส้น คือ AB, CD, PQ ขนานกัน มีเส้น EF ตัดผ่านเส้นตรงทั้งสามที่จุด G, H, K. ตามลำดับ ถ้า $\angle EGB = 55^\circ$ จงหาว่า $\angle GHC$, $\angle HKQ$ และ $\angle QKF$ ทางมุมตรงของค่า (H & S 1/41)



กำหนดให้ เส้นตรง AB, CD, PQ ขนานกัน มีเส้นตรง EF ตัดผ่านที่จุด G, H, K. ตามลำดับ และทำให้ $\angle EGB = 55^\circ$

จะต้องหาว่า $\angle GHC$, $\angle HKQ$ และ $\angle QKF$ ทางมุมตรงของค่า

วิธีหา $\therefore \angle EGB = 55^\circ$
 $\therefore \angle GHD = 55^\circ$ ด้วย (ท.ป. 14)

$$\text{และ } \angle HKQ = 55^\circ \quad (\text{ท.ป.14}) \dots (2)$$

$$\text{แต่ } \angle GHD + \angle GHC = 180^\circ \quad (\text{ท.ป.1})$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle GHC &= 180^\circ - \angle GHD \\ &= 180^\circ - 55^\circ \\ &= 125^\circ \dots (1) \end{aligned}$$

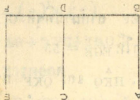
$$\text{และ } \therefore \angle HKQ + \angle QKF = 180^\circ \dots (\text{ท.ป.1})$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle QKF &= 180^\circ - \angle HKQ \\ &= 180^\circ - 55^\circ \\ &= 125^\circ \dots (1) \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \angle GHC = 125^\circ, \angle HKQ = 55^\circ \text{ และ}$$

$$\angle QKF = 125^\circ \quad \text{ตอบ}$$

2/105 โจทย์ เส้นตรงทั้งหลายที่ต่างกตั้งฉากกับเส้นตรง
เส้นเดียวกัน เส้นตรงเหล่านั้นย่อมขนานกันเองด้วย
(H & S 2/41)



กำหนดให้ เส้นตรง AB, CD และ EF ต่างตั้งฉากกับเส้น

ตรง BDF ที่จุด B, D และ F ตามลำดับ
 จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นตรง AB, CD และ EF ขนานกัน
 พิสูจน์ $\therefore$ AB กับ CD ต่างก็ตั้งฉากกับ DB

$$\therefore \angle ABD + \angle CDB = 2 \text{ มุมฉาก}$$

$$(\therefore \text{ต่าง} = 2 \text{ มุมฉาก})$$

$$\therefore AB \parallel DO \quad (\text{ท.ป.13})$$

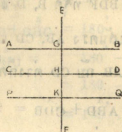
โดยทวนของเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า $CD \parallel$
 EF ด้วย

$$\therefore \text{เส้นตรง } AB, CD \text{ และ } EF \text{ ต่างก็ขนานกัน} \quad (\text{ท.ป.15})$$

ช. ต. พ.

3/105 โจทย์ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถูกไปพบกับเส้นขนาน
 หลายเส้น และปรากฏว่าตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง
 ในบรรดาเส้นขนานหลายเส้นนั้นแล้ว เส้นตรงเส้นนั้นจะ
 ตั้งฉากกับเส้นตรงอื่นๆ ทั้งหมดด้วย

(H & S 3/41)



กำหนดให้ เส้นตรง AB, CD และ PQ ขนานกัน มีเส้น
 ตรง EF ตัดผ่านที่จุด G, H และ K ตามลำดับ
 และ EF ตั้งฉากกับ AB ที่จุด G.

จะต้องพิสูจน์ว่า EF ตั้งฉากกับ CD และ PQ ด้วย

พิสูจน์

$\because AB \parallel CD$ และมี EF ตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\angle AGH = \angle GHD$ (ท.บ. 14)

แต่ $\angle AGH = 1$ มุมฉาก (ตามโจทย์)

$\therefore \angle GHD = 1$ มุมฉาก ด้วย

โดยทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

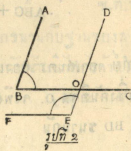
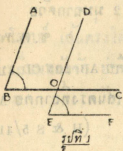
$\angle HKP = 1$ มุมฉาก

นั่นคือ EF ตั้งฉากกับ CD และ PQ ด้วย

ช.ต.พ.

4/105 โจทย์ มุมที่มุมตรงสองขนานกัน ย่อมโตเท่ากัน
หรือมีขนาดรวมกันเข้า = 2 มุมฉาก

(H & S 4/41)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ เป็นมุม 2 มุม ซึ่งมีเส้น
 $AB \parallel DE$ และเส้น $BC \parallel EF$ และให้ BC
กับ DE ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า ในรูป 1 $\angle ABC = \angle DEF$

หรือในรูป 2 $\angle ABC + \angle DEF = 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ในรูป 1 $\because AB \parallel DE$ มี BC ตัด

$\therefore \angle ABC = \angle DOC$ (ท.ป.14)

แต่ $\angle DOC = \angle DEF$ (")

$\therefore \angle ABC = \angle DEF$

ในรูป 2 $\because AB \parallel DE$ มี BC ตัด

นัยสำคัญน้อย $\therefore \angle ABC = \angle BOE$ (ท.ป.14)

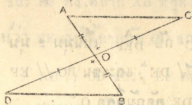
แต่ถ้า $BC \parallel EF$ มี DE ตัด

(ท.ป.8 ข ii) $\therefore \angle BOE + \angle DEF = 2$ มุมฉาก (ท.ป.14)

$\therefore \angle ABC + \angle DEF = 2$ มุมฉากด้วย

ช.ต.พ.

5/106 โจทย์ ถ้าเส้นตรงสองเส้น คือ AB และ CD แบ่งครึ่งซึ่งกันที่จุด O . จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากคือ AC และ BD ขนานกัน (H & S 5/41)



กำหนดให้ เส้นตรง AB กับ CD ต่างแบ่งครึ่งกันที่จุด O

ลาก AC และ BD

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC \parallel BD$.

พิสูจน์ ใน $\triangle AOC$ กับ $\triangle BOD$

$$\therefore \begin{cases} AO = OB & \text{(ตามโจทย์)} \\ CO = OD & \text{(")} \\ \angle AOC = \angle BOD & \text{(ท.ป. 3)} \end{cases}$$

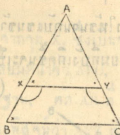
$$\therefore \triangle AOC = \triangle BOD \quad (\text{ท.ป. 4})$$

$$\therefore \angle ACO = \angle OBD \text{ และเป็นมุมแย้งกัน}$$

$$\therefore AC \parallel BD \quad (\text{ท.ป.13})$$

ช.ต.พ.

6/106 โจทย์ เส้นตรงใดๆ ที่ลากขนานกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมจะทำมุมกับด้านอีกสองด้านได้เท่ากัน (H & S 6/41)



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมี BC เป็นฐานลาก XY ตัด AB ที่ X และ AC ที่ Y โดยทำให้ $XY \parallel BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) $\angle AXY = \angle AYX$

(2) $\angle BXY = \angle CYX$

พิสูจน์ (i) $\therefore XY \parallel BC$ มี AB ตัด

$$\angle AXY = \angle ABC \quad (\text{ท.ป. 14})$$

(๑.๒.๓) ทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle YX = \triangle ACB$

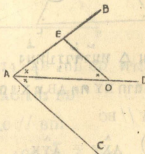
(๑.๒.๔) แต่ $\triangle ABC = \triangle ACB$ (ท.๒.๕)

$\therefore \triangle AXY = \triangle AXY$ ด้วย

(ii) $\therefore \triangle BXY = \triangle CXY$ (บทแทรก 1 ท.๒.๕)

ซ.ต.พ.

7/106 โจทย์ ถ้าจากจุดๆ หนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุมของมุมๆ หนึ่ง ตากเส้นตรงให้ขนานกับแขนข้างใดข้างหนึ่งของ มุมนั้น รูปสามเหลี่ยมที่บังเกิดขึ้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว (H & S 7/41)



กำหนดให้ O เป็นจุดๆ ภายในเส้นตรง AD ซึ่งแบ่งครึ่ง

$\angle BAC$ จาก O ตาก OE ให้ขนานกับ AC พบ

AB ที่ E

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle EAO$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\therefore EO \parallel AC$ มี AD ตัด (โจทย์)

$$\therefore \angle EOA = \angle OAC \quad (\text{ท.ป.14})$$

$$\text{แต่ } \angle OAC = \angle EAO \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle EOA = \angle EAO \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore EA = EO \quad (\text{ท.ป.6})$$

นั่นคือ $\triangle EAO$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ช.ค.พ.

8/106 โจทย์ จากจุด X , ซึ่งเป็นจุด ๆ หนึ่งภายใน $\triangle ABC$ ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC , ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตั้งฉากกับฐาน, ตัด AB ที่ Y , และ CA ที่ตัดออกไปที่ Z : จงพิสูจน์ว่า AYZ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(H & S 8/41)

กำหนดให้ X เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่บนฐาน BC ของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC จาก X ถ้าลากเส้นตั้งฉากกับ BC ให้ตัด AB ที่ Y และพบส่วนต่อของ CA ที่ Z

จะต้องพิสูจน์ว่า AYZ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ถ้า AD แบ่งครึ่ง BC ถ้ามาพบ BC ที่ D ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & \text{(ตามโจทย์)} \\ AD \text{ ด้านร่วม} \\ \angle BAD = \angle CAD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC$$

$$\text{แต่ } \angle ADB + \angle ADC = 2\angle \text{น ตาม ท.ป. 1}$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 1\angle \text{น}$$

$$\therefore \angle ADB + \angle ZXD = 2\angle \text{น}$$

$$\therefore ZX \parallel AD \quad (\text{ท.ป. 13})$$

$$\therefore ZX \parallel AD \text{ มี } AY \text{ ตัด}$$

$$\therefore \angle AYZ = \angle YAD \quad (\text{ท.ป. 14})$$

$$\therefore ZX \parallel AD \text{ มี } ZC \text{ ตัด}$$

$$\therefore \angle AZY = \angle DAC \quad (\text{ท.ป. 14})$$

$$\text{แต่ } \angle DAC = \angle BAD \text{ หรือ } \angle YAD \text{ (ตามสรีรัง)}$$

$$\therefore \angle AYZ = \angle AZY$$

$$\therefore AZ = AY \quad (\text{ท.ป. 6})$$

นั่นคือ $\triangle AYZ$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

9/106 โจทย์ ถ้าเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมภายนอก ของรูป
 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งขนานกับด้านที่อยู่ตรงข้ามแล้ว จง
 พิสูจน์ว่าด้านเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(H & S 9/41)

กำหนดให้ $\triangle BAD$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle ABC$

EA เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\triangle BAD$ ภายนอก และขนาน
 กับ BC ด้วย

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\therefore BC \parallel EA$ และ CO ตัด

$$\therefore \angle BCA = \angle EAD = \angle CAD \quad (\text{ท.ป.4})$$

โดยทำนองเดียวกัน $\angle ABC = \angle BAE$ ด้วย

$$\therefore \angle BAE = \angle EAD \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore AB = AC \quad (\text{ท.ป.6})$$

นั่นคือ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ช.ต.พ.

10/106 โจทย์ ถ้าลากเส้นตรงจากจุดๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่บน

เส้นแบ่งครึ่งมุมๆ หนึ่งให้ขนานกับแขนทั้งสองและไปจด

กับแขนนั้นด้วยแล้ว, รูปที่บังเกิดขึ้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยม
ที่มีด้านทุกด้านเท่ากันหมด | (H & S 10/41)

กำหนดให้ A เป็นจุดๆ หนึ่งบนเส้น CO ซึ่งบนเส้นแบ่ง
ครึ่ง ECF จาก A ตาก $AB \parallel CF$ พบ EC ที่
 B และตากร $AD \parallel EC$ พบ CF ที่ D

จะต้องพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็น $\square$ ที่มีด้านทุกด้านเท่ากัน
พิสูจน์ $\because AB \parallel CD$ มี CA ตากตัด

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD \quad (\text{ท.ป.14})$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\angle CAD = \angle BCA \quad (,,)$$

$$\text{แต่ } \angle BCA = \angle ACD \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \text{และมุมทั้งสองจะเท่ากัน}$$

ทุกมุม

$$\therefore AB = BC \quad (\text{ท.ป.6})$$

$$\text{และ } AD = CD \quad (\text{ท.ป.6})$$

ถ้าพิจารณาตามเหลี่ยม BAC และ CAD ตามเส้น
 AC แล้ว

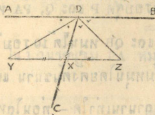
$$\therefore \angle BAC = \angle CAD \quad (\text{พิสูจน์มาแล้ว})$$

$$\therefore \text{เส้น } AB \text{ จะเท่ากับ } AD$$

เช่นเดียวกัน $\therefore \triangle BCA \cong \triangle ACD$
 $\therefore$ แขน CB จะทับ CD
 $\therefore B$ และ D ซึ่งเป็นจุดตัดของแขนทั้งสี่ทับ
 กันจะต้องทับกันด้วย
 $\therefore \triangle ABC$ ทับ $\triangle ACD$ ดังนั้น
 $\therefore AB$, ทับ AD , DC ดังนั้น
 $\therefore AB = AD$ และ $CD = CB$
 แต่ $AB = BC$ และ $AD = CD$ (พิสูจน์แล้ว)
 $\therefore ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมทึมด้านทุกด้านเท่า
 กันหมด

ช.ต.พ.

11/11/107 โจทย์ AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่
 จุด D , และมุมประชิดทั้งสองต้องถูกแบ่งครึ่ง ถ้าเขียน
 เส้นตรง YXZ ให้ผ่านจุด X ซึ่งเป็นจุดหนึ่งในบน DC ให้
 ขนานกับ AB และพบกับเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองที่จุด Y
 และ Z , จงพิสูจน์ว่า $XY = XZ$ (H & S 11/41)



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงตัดกันที่ D DY, DY, DZ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle ADC, \angle BDC$ ตามลำดับ YZ เป็นเส้นขนานกับ AB ที่ลากผ่าน X บน CD ตัด DY, DZ ที่ Y และ Z ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = XZ$

พิสูจน์ $AB \parallel YZ$ และมี DY ตัด

$$\therefore \angle ADY = \angle DYX = \angle BDX \quad (\text{ท.บ. 14})$$

$$\text{แต่ } \angle ADY = \angle YDX \quad (\text{ตามโจทย์})$$

$$\therefore \angle YDX = \angle BDX \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore YX = DX \quad (\text{ท.บ. 6})$$

ท่อนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $DX = XZ$

$$\therefore YX = XZ$$

ช.ต.พ.

12/107 โจทย์ PA และ QB เป็นท่อนโลหะตรงและยาวสอง

ท่อน หมุนได้รอบจุด P และ Q, PA หมุนครบ 12 รอบ

ในหนึ่งนาที, และ QB หมุนได้ 10 รอบในหนึ่งนาที. ถ้า

ท่อนโลหะเริ่มหมุนโดยตั้งคนขนาน และไปทางเดียวกัน

กัน, จะกินเวลานานเท่าใด - ท่อนโลหะทั้งสองจะ

จนกันอีก โดย (ก) ขไปทิศตรงข้าม, (ข) ขไป
ในทิศเดียวกัน

กำหนดให้ PA, QB เป็นท่อนโลหะตรงต่อท่อนหมุนรอบ
จุด P และ Q ด้วย ความเร็ว 12 รอบ และ 10
รอบใน 1 วินาทีตามลำดับ และให้ PA, QB เมื่อ
เริ่มหมุนขนานและชี้ไปทางเดียวกัน

จะต้องการหาจำนวนเวลาที่ PA, QB หมุนไปจนกลับมา
ชนกันอีก แต่

(ก) ^๕ไปในทางทิศตรงกันข้าม

(๓) ขไปในทิศเดียวกัน

วิธีหา (ก) ใน 60 วันหาที่เริ่ม PA หมุนได้ 12 รอบ หรือ -
(12×360) องศา

“ 1 ” “ หมุนได้ = $(\frac{12 \times 360}{60})$ ”

068 = 72

เชนเคียวกัน

ใน 1 วินาทีเริ่ม QB หมุนได้ = $\left(\frac{10 \times 360}{60}\right)$ องศา

$$469 = 60$$

ใน 1 วินาที PA หันมากกว่า QB

$$(72 - 60) \text{ องศา}$$

$$= 12 \text{ องศา}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 16

ว-ร หน้า 111

1/111 โจทย์ มุมทุกมุมของรูป $\triangle$ ด้านเท่าต่าง ๆ = 60°
(H & S 1/43)

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ ด้านเท่ารูปหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า แต่ละมุมของ $\triangle ABC = 60^\circ$

พิสูจน์ $\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$$\therefore AB = BC = CA$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C \quad (\text{บทแทรก 2 ท.บ.5})$$

$$\text{แต่ } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{ท.บ. 16})$$

$$\therefore 3\angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A = \frac{180^\circ}{3}$$

$$= 60^\circ$$

$$\text{แต่ } \angle B = \angle C = \angle A \text{ ย่อม } = 60^\circ \text{ ด้วย}$$

$$\therefore \text{นั่นคือ แต่ละมุมของ } \triangle \text{ ด้านเท่า } = 60^\circ$$

ช.ต.พ.

2/111 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเป็นหน้าจั่ว มุม
คู่ที่เท่ากันย่อมมีขนาดมุมละ 45° (H & S 2/43)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง มี $\angle BAC$ เป็นมุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ต่างก็ $= 45^\circ$

พิสูจน์
$$\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ \quad (\text{ท.บ.16})$$

แต่ $\angle A = 90^\circ \quad (\text{ตามโจทย์})$

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ$

แต่ $\angle B = \angle C \therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$

3/111 โจทย์ กำหนดมุมของมุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งคือ

36° และ 123° ตามลำดับแล้ว จงหาว่า มุมที่สามคือ

เท่าใด? จงตอบผลตัพธ์โดยการวัดด้วย

(H & S 3/43)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมมุม B และ C กาง

36° , 123° ตามลำดับ

จะต้องการหา $\angle A$

วิธีหา
$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{ท.บ.16})$$

$\therefore \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$

$= 180^\circ - 159^\circ$

$= 21^\circ$

ถ้าสร้างรูปและวัดดูแล้วจะได้ $\angle A$ ทาง 21°
 4/111 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC, ถ้า $\angle B = 111^\circ, \angle C = 42^\circ$; จงหา $\angle A$, และตอบด้วยการวัด

(H & S 4/43)

คำตอบ (โดยย่อ)

$$\begin{aligned}\therefore \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \quad (\text{ท.ป.16}) \\ \therefore \angle A &= 180 - (\angle B + \angle C) \\ &= 180 - 153 \\ &= 27^\circ\end{aligned}$$

5/111 โจทย์ ถ้าตัดด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ไปถึงจุด D. และปรากฏว่ามุมภายนอก $\angle ACD$ คือ 134° ; และมุม $\angle BAC$ คือ 42° ; จงหาว่ามุมภายในที่เหลือคือเท่าใด?

(H & S 5/43)

คำตอบ (โดยย่อ)

$$\begin{aligned}\therefore \angle ACD &= \angle ABC + \angle BAC \quad (\text{ท.ป.16 ข้อดังกล่าว}) \\ \therefore 134 &= \angle ABC + 42 \\ \therefore \angle ABC &= 92^\circ \\ \therefore \angle ACB + \angle ACD &= 180^\circ\end{aligned}$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 134^\circ$$

$$= 46^\circ$$

$$\text{ตอบ } \angle B = 92^\circ, \angle C = 46^\circ$$

6/111 โจทย์ ในรูปของบทพิสูจน์ที่ 16, ถ้า $\angle ACD = 118^\circ$,

และ $\angle B = 51^\circ$, จงหามุม A และ C; จงตอบคำศัพท์

หาได้โดยการวัด (H & S 6/43).

คำตอบ (โดยย่อ)

$$\text{วิธีหา } \therefore \angle ACD = \angle B + \angle A \quad (\text{ท.ป. 16})$$

$$\text{แต่ } \angle B = 51^\circ \quad (\text{โจทย์})$$

$$\text{และ } \angle ACD = 118^\circ \quad (,,)$$

$$\therefore 118^\circ = 51^\circ + \angle A$$

$$\therefore \angle A = 67^\circ$$

$$\text{และ } \angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$$

$$= 62^\circ$$

และจากรูปถ้าวัดจะเห็นว่า $\angle A$ และ $\angle C$ กาง 67

$$\text{และ } 62^\circ \text{ จึง } \angle A + \angle C = 129^\circ$$

$$\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ \quad \text{ช. ต. พ.}$$

7/112 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
 เหลี่ยมรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก โดยการสร้าง
 เส้นตรงให้ผ่านมุมยอดและขนานกับฐาน.

(H & S 7/43)

กำหนดให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง มี BAC เป็นมุมยอด

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle D$

พิสูจน์ ดึงเส้นตรง DAE ผ่าน A ให้ขนานกับ BC

$\therefore AE \parallel BC$ มี AC ตัด

$$\therefore \angle ACB = \angle CAE \quad (1) \quad (\text{ท.ป. 14})$$

และ $AD \parallel BC$ มี AB ตัด

$$\therefore \angle ABC = \angle BAD \quad (2) \quad (\text{ท.ป. 14})$$

$(1) + (2) + \angle BAC$ จะได้

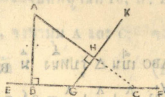
$(\angle A + \angle B + \angle C)$

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAD + \angle BAC$$

$$= 2\angle D \quad (\text{มุมตรง})$$

8/112 โจทย์ ถ้าเส้นตรงสองเส้น ตัดกันฉากกับเส้นตรงอีก
สองเส้น, เส้นต่อเส้น, มุมแหลมในระหว่างเส้นตรงคู่
แรกจะเท่ากับมุมแหลมในระหว่างคู่ที่สอง:

(H & S 8/43)



กำหนดให้ เส้นตรง AB กับ AH ตากกตั้งฉากกับเส้นตรง
EF และ GK ที่จุด B และ H ตามลำดับ GH

(M. U. N) พบ EF ที่ G

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมแหลม BAH = มุมแหลม KGF

พิสูจน์ ต่อ AH ไปพบ EF ที่ C

(M. U. N) ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle GCH$

$\therefore \angle ABC = \angle GCH$ (ต่าง = $1L$)

และ $\angle ACB = \angle HCG$ (เป็นมุมเดียวกัน)

(เหตุผล) $\therefore$ มุมที่เหลือน $\angle BAH =$ มุมที่เหลือน $\angle KGF$ (ท.ป-16)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 16

ว-ร หน้า 115

(๔๓) (๔๔) (๔๕) (๔๖) (๔๗) (๔๘) (๔๙) (๕๐) (๕๑) (๕๒) (๕๓) (๕๔) (๕๕) (๕๖) (๕๗) (๕๘) (๕๙) (๖๐) (๖๑) (๖๒) (๖๓) (๖๔) (๖๕) (๖๖) (๖๗) (๖๘) (๖๙) (๗๐) (๗๑) (๗๒) (๗๓) (๗๔) (๗๕) (๗๖) (๗๗) (๗๘) (๗๙) (๘๐) (๘๑) (๘๒) (๘๓) (๘๔) (๘๕) (๘๖) (๘๗) (๘๘) (๘๙) (๙๐) (๙๑) (๙๒) (๙๓) (๙๔) (๙๕) (๙๖) (๙๗) (๙๘) (๙๙) (๑๐๐)

(โจทย์ให้ด้านโดยมากง่าย จึงขอให้แต่เพียงคำแนะนำไว้เท่านั้น)

1/115 โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมหนึ่ง ซึ่งมี $\angle B$ และ

$\angle C$ เป็น 2 เท่า และ 3 เท่ามุม A จงหาขนาดของมุมทั้งสามเป็นฟังก์ชันค่า (H & S 1/45)

วิธีทำ ใน $\triangle ABC \therefore \angle B = 2 \angle A$ และ $C = 3 \angle A$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^\circ$$

$$\therefore 6 \angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle B = 2 \angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \angle C = 3 \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ$$

ช.ด.พ.

2/115 โจทย์ จงหาขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
หน้าจว ซึ่ง i มุมฐานแต่ละมุมเป็นสองเท่าของมุม
ยอด ii มุมฐานแต่ละมุมเป็นสี่เท่าของมุมยอด

(H & S 2/45)

วิธีทำ ก. ให้ $\angle A$ เป็นมุมยอด $\angle B$ และ $\angle C$ เป็นมุมฐาน

$$\therefore \angle B = \angle C = 2\angle A$$

$$\therefore \angle A + 2\angle A + 2\angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{\angle A}{A} = 36$$

$$\therefore \frac{\angle B}{B} = \frac{\angle C}{C} = 2\frac{\angle A}{A} = 72^\circ$$

$$\text{ข. } \therefore \frac{\angle B}{B} = \frac{\angle C}{C} = 4\frac{\angle A}{A}$$

$$\therefore \angle A + 4\angle A + 4\angle A = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{\angle A}{A} = 20$$

$$\therefore \frac{\angle B}{B} = \frac{\angle C}{C} = 4\frac{\angle A}{A} = 80^\circ$$

ข.ต.พ.

3/115 โจทย์ ถ้าค่าฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งออกไป
ทั้งสองข้าง และปรากฏว่ามุมภายนอกทั้งสามเกิดขนาด
94° และ 126° จงหาขนาดของมุมยอด และสร้างรูป
สามเหลี่ยมกับข้อมูลคำตอบที่ได้โดยการวัดว่า

จริงหรือไม่

(H & S 5/29)

แนะนำ ตรีศักรูปสามเหลี่ยม ให้ทำดังนี้

(1) ตากเส้น AB ให้ยาวพอควร จาก P ซึ่งเป็นจุด

(2) บน AB ทำมุม APK ให้เท่ากับ 94° และจุด Q

บน BP ทำมุม $BQL = 126^\circ$ ถ้า PK และ QL

ตัดกันที่ R แล้ว PQR จะเป็นสามเหลี่ยมที่

ต้องการ

..... มุมภายนอกที่ P + มุมภายในที่ P = 180°

..... " + $94^\circ = 180^\circ$

..... มุมภายนอกที่ P = 86°

เช่นเดียวกันหาจุด Q

มุมภายนอกที่ Q = 54°

..... มุมยอด R = $180^\circ - (86^\circ + 54^\circ)$

..... = $180^\circ - (86^\circ + 54^\circ)$

..... = 40°

..... ช.ต.พ.

4/115 โจทย์ ผลบวกของมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

เท่ากับ 162° และผลต่างเป็น 60° จงหาขนาดมุมทั้งสามของรูป

สามเหลี่ยมนี้ ((H & S 4/45))

วิธีทำ ให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ มี $\angle A$ เป็นมุมยอด

$$\therefore \text{มุมฐาน } \angle B + \angle C = 162^\circ \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ } \angle B - \angle C = 60^\circ \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2\angle B = 222^\circ$$

$$\therefore \angle B = 111^\circ$$

$$\text{จาก } (2) \quad \angle C = \angle B - 60^\circ$$

$$= 51^\circ$$

ช.ต.พ.

5/116 โจทย์ มุมฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งคือ 84° และ 62° ; ตามลำดับ จงหา (i) มุมยอด, (ii) มุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองของฐาน. และจงตอบค่าคบบทใดบนหลักของเพียงใดโดยการวัดด้วย.

(H & S 5/45)

$$\text{วิธีทำ } (i) \text{ ตามรูป } \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$$

$$= 180^\circ - (62^\circ + 84^\circ)$$

$$= 34^\circ$$

$$(ii) \text{ ให้ BO กับ CO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม } \angle B \text{ และ } \angle C$$

$$\therefore \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \left(\frac{62}{2} + \frac{82}{2} \text{ องศา} \right)$$

$$(31 + 41 \text{ องศา})$$

๕๓)

$$= 73 \quad "$$

$$\therefore \angle BOC = 180 - \frac{(\angle A + \angle B + \angle C)}{2} \quad "$$

$$= 180 - 73 \quad "$$

$$= 180 \quad "$$

ช.ต.พ.

๐/116 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC, ถ้ามุม B และ C คือ 74° และ 62°, ตามลำดับแล้ว: ถ้าต่อ AB และ AC ออกไปทาง B และ C, จงหาขนาดของมุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกทั้งสอง. และตอบค่าตอบที่หาได้โดยการวัด (H & S 6/45)

วิธีทำ ต่อให้ด้าน AB, AC ออกไปถึง P และ Q ตามลำดับ และให้เส้นแบ่งครึ่งมุม CBP และ BCQ ตัดกันที่ K

$$\therefore \angle PCB = 180 - 74 = 106$$

$$\therefore \angle KBC = \frac{106}{2} = 53$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\angle KCB = 59$

$$\therefore \angle K = 180 - (53 + 59)$$

$$= 68$$

ช.ต.พ.

7/116 โจทย์ ถ้ามุม 3 มุม ของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มีขนาด $114\frac{1}{2}^{\circ}$, 50° , และ $75\frac{1}{2}^{\circ}$ ตามลำดับแล้ว; จงหามุมที่ 4.

(H & S 7/16)

วิธีทำ สมมติว่า มุมที่ 4 ทาง X

$\therefore$ มุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมรวมกัน เท่ากับ $4L_n$

$$\therefore 114\frac{1}{2} + 50 + 75\frac{1}{2} + X = 4L_n = (4 \times 330)^{\circ}$$

$$\therefore X = 120^{\circ}$$

ช.ต.พ.

8/116 โจทย์ ในรูปสามเหลี่ยม ABCD ถ้ามุม B, C และ D ต่างก็เท่ากับ $2A$, $3A$ และ $4A$ ตามลำดับแล้ว; จงหาว่า มุมทั้งหมดจะโตเท่าใด? (H & S 8/45)

วิธีทำ มุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมรวมกันเข้า เท่ากับ $4L_n$ (ดูหน้า 110 ข้อ 5)

$$\therefore A + B + C + D = 360^{\circ}$$

$$\text{แต่ } A, B, C, D = A, 2A, 3A, 4A$$

ตามลำดับ

$$\therefore A + 2A + 3A + 4A = 360^{\circ}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \hat{A} &= 36^\circ \\
 \therefore \hat{B} &= 2 \hat{A} = 72^\circ \\
 \therefore \hat{C} &= 3 \hat{A} = 108^\circ \\
 \therefore \hat{D} &= 4 \hat{A} = 144^\circ
 \end{aligned}$$

ช.ต.พ.

9/116 โจทย์ถามมุม 4 มุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่มีขนาด 40° , 78° , 112° , และ 135° ตามลำดับแล้ว; จงหามุมที่ห้า.

(H & S 9/116)

วิธีทำ $\therefore$ มุมภายในทั้งหมด $+ 4 \text{ L.น.} = 2n \text{ L.น.}$
(บทแทรก 1 หน้า 113)

$$\therefore (40^\circ + 78^\circ + 112^\circ + 135^\circ + X) + 4 \text{ L.น.} = 10 \text{ L.น.}$$

$$\therefore X + 375^\circ = 6 \text{ L.น.}$$

$$\therefore X = 162^\circ$$

ช.ต.พ.

10/116 โจทย์ ในรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีด้าน n ด้าน
จงพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาด $\frac{2(n-2)}{n}$ มุมฉากโดย

(i) ใช้บทแทรกที่ 1 ของบทแทรกที่ 16

(ii) พิสูจน์เอาใหม่ โดยลากเส้นตรงจาก A

A ไปยังจุดมุมทุกมุม (ยกเว้นมุมประชิดกับ A ต้อง
มุม), ซึ่งจะแบ่งรูปหลายเหลี่ยมออกเป็นด้านเหลี่ยม

$n-2$ รูป. (H & S 10/45)

วิธีพิสูจน์ (i) ตามบทแทรกที่ 1 ของบ.พ. 16

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้าน n ด้าน

มุมเท่ากัน n มุม $+ 4$ มุมฉาก $= 2n$ มุมฉาก

(๑) $(๑๘๐ \times ๕ + ๓๖๐)$, n มุม $= 2n$ มุมฉาก -

$๑๘๐ \times ๕ = ๑๘๐ \times ๕ + ๓๖๐$ มุมฉาก

(๒) $(๑๘๐ \times ๔ + ๓๖๐)$ n ,, $= 2(n-2)$

$๑๘๐ \times ๔ = ๑๘๐ \times ๔ + ๓๖๐$ มุมฉาก

,, 1 ,, $= \frac{2(n-2)}{n} \times n$

(ii) ตามรูป รูป Δ รูปหนึ่งมุมหนึ่งมุมรวม

กัน $= 2$ มุมฉาก (ท.บ. 16)

รูปหลายเหลี่ยมแบ่งออกเป็น Δ ได้ $(n-2)$ รูป

∴ จำนวนมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมทั้ง

หมดมี $2(n-2)$ มุมฉาก

รูปหลายเหลี่ยมมี n ด้านจะต้องมี n มุม

$$\therefore \text{มุมๆ หนึ่งกาง} = \frac{2(n-2)}{n} L_n$$

ช.ต.พ.

11/117 โจทย์ จงหาว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าคือไปนม
กดาน

(i) มุมมุมใดมุมละ 180° ,

(ii) มุมมุมใดมุมละ 156° ?

(H & S 11/45)

วิธีหา

(1) โดยใช้สูตรกบของบทแทรกที่ 1 ท.ป.16

ให้เป็นจำนวนด้าน

D เป็นจำนวนของค่าของมุมหนึ่ง

$$n \cdot D = 108^\circ$$

$$n \times D + 360^\circ = (n \times 180^\circ) \text{ (ดูจ.รหน้า 114)}$$

$$n \times 108^\circ + 360^\circ = n \times 180^\circ$$

$$180n + 360 = 180n$$

$$360 = 180n - 180n$$

$$\frac{360}{n} = 72n$$

$$\frac{360}{72} = 5$$

รูปหลายเหลี่ยมมุม 5 ด้าน

ข้อ 2 ทำตามแบบเดียวกันข้อ 1

ช.ต.พ.

12/117 โจทย์ จงแสดงให้เห็นว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

ที่มาเรียงติดต่อกันเข้าแล้ว จะทำให้เกิดเป็นพหุรูป

ได้ดังนี้ทุกตัว:-

- (i) รูปด้านเหลี่ยมด้านเท่า,
- (ii) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส,
- (iii) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่าเท่านั้น.

(H & S 12/45)

วิธีทำ รูปเหลี่ยมที่จะต่อกันได้นั้น จะต่อกัน
ตาม มุมประชิดที่เกิดขึ้นต้องรวมกันได้ 4

มุมฉาก (360°) เท่านั้น

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าจะต่อกันได้นั้น

คือเมื่อมุมหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยมหาร 4 มุม

ฉากได้ลงตัวเท่านั้น

ก. รูป Δ ด้านเท่า มุมหนึ่ง = $\frac{(2n-2)}{n}$ มุมฉาก

$= \frac{2(3-2)}{3}$ มุมฉาก (ข้อ 10)

๑. สามเหลี่ยมมุมฉาก = $\frac{2}{3}$ มุมฉาก

$$= 60^\circ$$

$\therefore \Delta$ ด้านเท่าต่อกันได้ฉันทะ 360 $\div$ 60

ได้ดังตัว

๒. รูป $\square$ จตุรัส มุมหนึ่ง = 90

$\therefore \square$ จตุรัสต่อกันได้ฉันทะ 360 $\div$ 90

ได้ดังตัว

๓. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมหนึ่ง = $\frac{2(n-2)}{n} =$

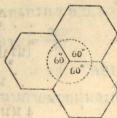
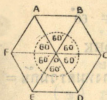
$$\frac{2(6-2)}{6} = 1\frac{1}{3} \text{ มุมฉาก}$$

$$= 120^\circ$$

$\therefore$ รูปหกเหลี่ยมด้านเท่าต่อกันได้ฉันทะ

360 $\div$ 120 ได้ดังตัว

๒.๓.๖.



รูป ๓.

รูป ๒.

รูป ๑.

แบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ 16

ว. - ร. หน้า 121

1/121 โจทย์ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปหกเหลี่ยมตรง
ออกไป, จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่บังเกิดขึ้นจะเท่ากับ
มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (H & S 1/47)
กำหนดให้ ABC เป็น Δ ด้านเท่ารูปหนึ่ง และ $DEFGHK$
เป็นรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่า รูปหนึ่งมีด้าน DE ถูก
ต่อออกไปถึงจุด P

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมภายนอก $FEP =$ มุม BAC

พิสูจน์ ใน Δ ด้านเท่า ABC

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{ท.บ. 16})$$

$$\therefore 3\angle A = 180^\circ \quad (\text{บทแทรก 2 ท.บ. 5})$$

$$\therefore \angle A = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

ในรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่า $DEFGHK$

$$\therefore \text{มุมภายนอกทางเดียวกันทั้งหมดรวมกัน} = 4 \text{ มุมฉาก} \quad (\text{บทแทรก 2 ท.บ. 5})$$

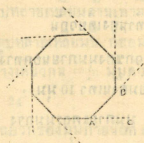
$$\therefore 6 \angle FEP = 360^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle FEP &= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \\ \text{นั่นคือ } \angle FEP &= \angle BAC \end{aligned}$$

ชัดพ.

2/212 โจทย์ จงหาว่ามุมภายนอกของ (i) รูปแปดเหลี่ยม
ด้านเท่า, (ii) รูปสิบเหลี่ยมด้านเท่า มีค่าเท่าไร?

(H & S 2/47)



วิธีคำนวณ $\therefore$ ผลบวกของมุมภายนอกทางเดียวกันของ
รูป 8 เหลี่ยมด้านเท่า 8 มุม

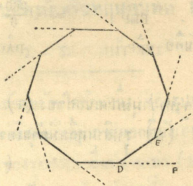
$$= 360^\circ \quad (\text{บทแทรก 2 ท.ป.16})$$

$$\therefore \text{มุมภายนอกแต่ละมุม} = \frac{360^\circ}{8}$$

$$= 45^\circ \quad \text{ตอบ}$$

(ข) รูป 10 เหลี่ยมด้านเท่า มุมภายนอกมุมใด
ของค่า

๑๐๖



วิธีคำนวณ โดยทำนองเดียวกัน

ผลบวกของมุมภายนอกทางเดียวกันของรูป 10

เหลี่ยมด้านเท่า 10 มุม $= 360^\circ$

$\therefore$ มุมภายนอกแต่ละมุม $= \frac{360^\circ}{10}$

$= 36^\circ$ ตอบ

3/121 โจทย์ รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีมุมภายนอกใดมุม

ละ (i) 30° , (ii) 24° จะมีกี่ด้าน?

(H & S 53/47)

วิธีคำนวณ ก. $\therefore$ ผลบวกของมุมภายนอกทางเดียวกัน

ของรูปหลายเหลี่ยม

$= 360^\circ$ (บททบทวน 2 ท.บ. 16)

แต่มุมภายนอกทางมุมละ $= 30^\circ$

$\therefore$ รูปหลายเหลี่ยม มีจำนวนมุมภายนอก

$$= \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12 \text{ มุม}$$

นั่นคือ รูปหลายเหลี่ยมมีจำนวนด้าน $= 12$

ตามด้วย

ตอบ

วิธีคำนวณ ข. นอกจากจะทำตามข้อ ก แล้วจะได้ดังนี้คือ-

สมมติว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามีทั้งหมด $= n$ ด้าน

$\therefore$ รูปหลายเหลี่ยม ก้อยมีจำนวนมุมภายนอกทางเดียวกัน $= n$ มุมด้วย แต่มุมภายใน

มุมละ 24°

$\therefore$ ผลบวกของมุมภายนอก n มุมนั้น $= (24n)^\circ$

$\therefore (24n)^\circ = 360^\circ$ (บทแทรก 2 ท.บ. 16)

$$\text{ดังนั้น } n = \frac{360^\circ}{24}$$

$$= 15$$

นั่นคือรูปหลายเหลี่ยมมีจำนวนด้าน $= 15$ ด้าน

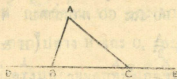
ตอบ

4 / 121 โจทย์ ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งลากไปพบเส้นขนานสอง

เส้นละมุมภายในบนข้างเดียวกันทั้งสองมุม ถูกแบ่ง

5/121 โจทย์ ถ้าต่อฐานของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ออกไปทั้ง
สองข้างแล้ว, เขามุมยอดไปดบออกจากผลบวกของ
มุมภายนอกทั้งสองด้านจะได้เท่ากับ 2 มุมฉาก

(H & S 5/47)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี BC เป็นฐาน

ต่อ BC ออกไปทั้ง D และ E

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABD + \angle ACE - \angle BAC = 2$ มุมฉาก

พิสูจน์ $\therefore$ มุมภายนอก $\angle ABD = \angle BAC + \angle ACB$

(ผลของ ท.บ. 16) (1)

และมุมภายนอก $\angle ACE = \angle BAC + \angle ABC$

(ผลของ ท.บ. 16) (2)

(1) + (2) $\therefore \angle ABD + \angle ACE = \angle BAC + \angle ACB$

$+ \angle BAC + \angle ABC$

เขา $\angle BAC$ ดบทั้ง $\angle$ ของข้าง

ครึ่ง, จึงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมจะพบกันเป็นมุม
ฉาก. (H & S 4/47)

กำหนดให้ เส้นตรง $AB \parallel CD$ มี EF ตากตั้งที่จุด G, H ตาม
ลำดับ ให้เส้น GK, HK , ซึ่งเป็นเส้นแบ่งครึ่ง
 $\angle AGH$ และ $\angle CHG$ พบกันที่จุด K

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle GKH$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because AB \parallel CD$ และมี EF ผ่าน

$$\therefore \angle AGH + \angle GHC = 180^\circ \quad (\text{ท.ป.14})$$

$$\text{แต่ } \angle KGH = \frac{\angle AGH}{2} \text{ และ } \angle KHG = \frac{\angle GHC}{2} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \angle KGH + \angle KHG = \frac{180^\circ}{2}$$

$$= 90^\circ$$

$$\text{แต่ } \angle KGH + \angle KHG + \angle GKH = 180^\circ \quad (\text{ท.ป.16})$$

$$\therefore \angle GKH = 180^\circ - 90^\circ$$

$$= 90^\circ$$

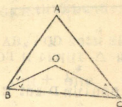
นั่นคือ $\angle GKH$ เป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle ABD + \angle ACE - \angle ABC = \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC$$

$$= 2 \text{ มุมฉาก}$$

ข.ต.พ.

6/121 โจทย์ ถ้าในรูปสามเหลี่ยม ABC มุม B และ C ถูกแบ่งครึ่งโดยเส้น BO และ CO ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
 มุม $\angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ (H & S 6/47)



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี OB และ OC แบ่งครึ่ง
 $\angle B$ และ $\angle C$ ตามลำดับ และตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

พิสูจน์ $\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB$ (ท.1.16)

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \left(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} \right)$$

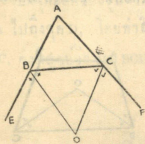
$$= 180^\circ - \left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{\angle A}{2} \right) \left(\because \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \right)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{A}{2}$$

$$= 90^\circ + \frac{A}{2}$$

ช.ต.พ.

7/121 โจทย์ กำหนดด้าน AB และ AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกไปทาง B และ C, และถ้า BO และ CO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของทั้งสองมุม จงพิสูจน์ว่ามุม $BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$. (H & S 6/47)



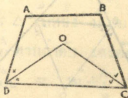
กำหนดให้ ABC เป็น Δ รูปหนึ่ง ต่อด้าน AB ไปที่ E และ AC ไปที่ F แบ่งครึ่งมุมภายในของ $\angle B$ และ $\angle C$ ด้วย BO และ CO และให้ BO กับ CO พบกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BOC = 90^\circ - \frac{A}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์ } \angle BOC &= 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB \\
 &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) \\
 &= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) \\
 &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) \\
 &= 90^\circ - \frac{\angle A}{2}
 \end{aligned}$$

ช.ต.พ.

8/127 โจทย์ มุมที่บังเกิดด้วยเส้นแบ่งครึ่งมุมประชิดทั้ง
สองของรูปสี่เหลี่ยม ย่อมเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวก
ของมุมที่เหลือ (H & S 8/47)



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง DO แบ่งครึ่ง $\angle D$ และ

CO แบ่งครึ่ง $\angle C$ บรรจบกันเป็นมุม $\angle DOC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle DOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

พิสูจน์ ใน $\triangle ODC$, $\angle DOC = 180^\circ - (\frac{\angle D}{2} + \frac{\angle C}{2})$

$$\therefore \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 360^\circ$$

$$\therefore \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DOC = \left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) - \left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2} \right)$$

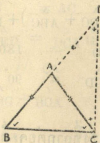
$$= \frac{A}{2} + \frac{A}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} - \frac{A}{2} - \frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (C + D)$$

ช. ต. พ.

9/121 โจทย์ A เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC
และต่อ BA ไปถึงจุด D, โดยทำให้ AD=BA; ถ้าถาก
เส้นต่อ DC, จงพิสูจน์ว่า มุม BCD เป็นมุมฉาก

(H & S 9/47)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว คือ BA ออกไปตัด D
 ทำให้ $AD=AB$ ตาก DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BCD = 90^\circ$

พิสูจน์ $\therefore AD = AB$ (ตามโจทย์)

แต่ $AB = AC$ (")

$\therefore AC = AD$ ด้วย

ดังนั้น $\triangle ADC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$ (ท.ป.5).....(1)

และโดยทำนองเดียวกัน ใน $\triangle$ หน้าจั่ว ABC

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ ด้วย.....(2)

$$(1)+(2) \quad \angle ADC + \angle ABC = \angle ACD + \angle ACB \\ = \angle BCD$$

แต่ว่า $(\angle ADC + \angle ABC) + \angle BCD = 180^\circ$ (ท.ป.16)

$$\therefore 2\angle BCD = 180^\circ$$

$$\text{นั่นคือ } \angle BCD = 90^\circ$$

ช. ต. พ.

10 / 121 โจทย์ เส้นตรงที่ลากต่อจุดกึ่งกลาง ของด้านตรง
 ข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ไปยังมุมฉาก

ย่อมยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉากนั้น

(H & S 10/47)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉากที่ C M เป็นจุดกึ่งกลาง

ของด้าน AB D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $DE = \frac{1}{2} AB$

พิสูจน์ $\triangle CDE$ ไปที่ E ทำให้ $DE = DC$ ตาม BE

ใน $\triangle BDE$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} BD = DA & (\text{โจทย์}) \\ ED = DC & (\text{สร้าง}) \\ \angle EDB = \angle ADC & (\text{ท.ป.3}) \end{cases} \text{ จะเป็นมุมใน}$$

ระหว่างด้านเท่า

$$\therefore \triangle BDE = \triangle ACD \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore BE = AC$$

และ $\angle BED = \angle CAD$ เป็นมุมแย้งกัน

$$\therefore BE \parallel CA \quad (\text{ท.ป.13})$$

$$\text{และ } \angle EBC + \angle BCA = 2 \text{ มุมฉาก} \quad (\text{ท.ป.14})$$

$$\text{แต่ } \angle BCA = 1 \text{ มุมฉาก (ตามโจทย์)}$$

$$\therefore \angle EBC = 1 \text{ มุมฉาก}$$

ใน $\triangle BCE$ กับ $\triangle BAC$

$$\therefore \begin{cases} BE = CA & (\text{พิสูจน์มาแล้ว}) \\ BC \text{ ด้านร่วม} \\ \angle EBC = \angle ACB & (\text{พิสูจน์มาแล้ว}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE = \triangle BAC$ ทุกประการ (ท.บ.4)

$$\therefore CE = AB$$

$$\therefore 2 CD = AB$$

$$\text{นั่นคือ } CD = \frac{1}{2} AB$$

ช.ต.พ.

แบบฝึกหัดท้าย ท.บ. 17

ว. - ร. หน้า 127

(ว่าด้วยสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ)

1/127 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากที่ลากจากปลาย
 ทงของของฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปยังด้านตรง
 ข้ามจะยาวเท่ากัน (H & S 1/49)

กำหนดให้ ABC เป็น Δ สามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง BC เป็น
 ฐาน จาก B ลาก BD ตัดได้ฉากกับ AC ที่ D
 และจาก C ลาก CE ตัดได้ฉากกับ AB ที่ E

จะต้องพิสูจน์ว่า $BD = CE$

พิสูจน์ ใน ΔABD กับ ΔACE

$$\therefore \begin{cases} \angle ADB = \angle AEC & (\text{โจทย์}) \\ \angle BAD = \angle CAE & (\because \text{เป็นมุมร่วม}) \\ AB = AC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \Delta ABD = \Delta ACE \quad (\text{ท.บ. 17})$$

ช.ต.พ.

2/127 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่ง
 มุม มุมจะมีระยะทางห่างจากแขนทั้งสองข้างเท่ากัน

(H & S 2/49)

กำหนดให้ OC แบ่งครึ่ง $\triangle AOB$ D เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่บน OC
 ตลาก DE ให้ตั้งฉากกับ OA ที่จุด E และตลาก DF
 ตั้งฉากกับ OB ที่ F

จะต้องพิสูจน์ว่า $DE = DF$

พิสูจน์ ใน $\triangle EOD$ กับ $\triangle ODF$

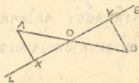
$$\begin{cases} \angle EOD = \angle DOF & (\text{โจทย์}) \\ \angle OED = \angle OFD & (\text{ตั้งฉาก}) \\ OD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EOD = \triangle ODF \quad (\text{ท.ป.17})$$

$$\therefore DE = DF$$

ช.ต.พ.

3/127 โจทย์ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB , เขียน
 เส้นตรงเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด O , และตลากเส้น AX กับ BY
 ให้ตั้งฉากกับเส้นที่วาง: จงพิสูจน์ว่า AX กับ BY เท่า
 กัน (H & S 3/49)



กำหนดให้ เส้นตรง EF ผ่าน O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ
 เส้นตรง AB ถ้า AX ตั้งฉากกับ EF และ
 BY ตั้งฉากกับ EF ที่จุด X และ Y ตามลำดับ
 จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = BY$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOX$ กับ $\triangle BOY$

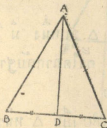
$$\therefore \begin{cases} \angle AOX = \angle BOY & (\text{ท.ป. 3}) \\ \angle AXO = \angle BYO & (\text{โจทย์}) \\ AO = OB & (\text{ " }) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOX = \triangle BOY \quad (\text{ท.ป. 17})$$

$$\therefore AX = BY$$

ช.ต.พ.

1/127 โจทย์ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมรูป
 หนึ่งตั้งฉากกับฐานแล้ว, สามเหลี่ยมรูปนั้นจะเป็น
 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว (H & S 4/49)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง A เป็นมุมยอด เหนือ
 ตรง AD แบ่งครึ่ง $\angle A$ และตั้งฉากกับ BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} \angle BAD = \angle DAC & (\text{โจทย์}) \\ \angle ADB = \angle ADC & (") \\ AD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad (\text{ท.ป.17})$$

$$\therefore AB = AC$$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ช.ต.พ.

5/127 โจทย์ ถ้าในรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เหนือตรงฉากที่
 ตกจากมุมยอดแบ่งครึ่งฐานแล้ว, สามเหลี่ยมนั้นจะ
 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(H & S 5/49)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี A เป็นมุมยอด เหนือ
 ตรง AD ตั้งฉากกับฐาน BC และทำให้

$$BD = DC$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์

ใน $\triangle ABD$ กับ $\triangle ACD$

$$\therefore \begin{cases} BD = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD \text{ ด้านร่วม} \\ \angle ADB = \angle ADC & (\because \text{ต่าง } 1\text{L} \text{ ตามโจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD \quad (\text{ท.ม.4})$$

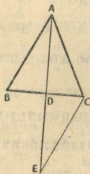
$$\therefore AB = AC$$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ช. ต. พ.

6/128 โจทย์ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม รูป
หนึ่งตกไปแบ่งครึ่งฐานด้วยแล้ว สามเหลี่ยมรูปนั้น
จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (จงคือเส้นแบ่งครึ่งมุม
ออกไป, แล้วดำเนินการสร้างแบบบทพิสูจน์ที่ 8)

(H & S 6/49)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มี $\angle A$ เป็นมุมยอด
 เส้นตรง AD แบ่งครึ่ง $\angle A$ แบ่งครึ่ง BC ด้วย

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าที่

พิสูจน์ ต่อ AD ไปที่ E ทำให้ $DE = AD$ และ CE

$$\therefore \begin{cases} BD = DC & (\text{โจทย์}) \\ AD = DE & (\text{สร้าง}) \\ \angle ADB = \angle CDE & (\text{ท.ป.3}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle CDE \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore \triangle AB = CE$$

$$\text{และ } \angle CED = \angle BAD$$

$$\text{แต่ } \angle BAD = \angle DAC \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \angle CED = \angle DAC \quad \text{ด้วย}$$

$$\therefore AC = CE \quad (\text{ท.ป.6})$$

$$\therefore AC = AB \quad \text{ด้วย}$$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าที่

ช.ต.พ.

7/127 โจทย์ จุดกึ่งกลางของเส้นตรง ซึ่งปลายทั้งสอง
 ข้างจุดเส้นตรงต้องเส้นขนานกัน ย่อมอยู่ห่างจาก
 เส้นขนานคู่กันเท่ากัน (H & S 7/49)

กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ซึ่งมีปลาย A และ B จุดเส้นตรงขนาน CD และ EF ความดำดัดจาก O ตาก OP ตั้งฉากกับ CD และต่อเลยไปพบ EF ที่ Q

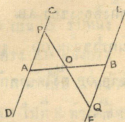
จะต้องพิสูจน์ว่า $OP = OQ$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOP$ กับ $\triangle BOQ$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} \angle AOP = \angle BOQ & (\text{ท.บ. 3}) \\ \angle APO = \angle BQO & (\text{สร้าง}) \\ AO = BO & (\text{โจทย์}) \end{cases} \\ \therefore \triangle AOP = \triangle BOQ & (\text{ท.บ. 17}) \\ \therefore OP = OQ \end{aligned}$$

ช. ต. พ.

8/128 โจทย์ เส้นตรงเส้นหนึ่ง อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง และปลายทั้งสองจุดเส้นขนานคู่หนึ่ง และเส้นนั้นถูกแบ่งครึ่ง จึงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากผ่านจุดแบ่งครึ่งนั้น และปลายทั้งสองจุดกับเส้นขนานคู่หนึ่ง จะถูกแบ่งครึ่งโดยจุดกึ่งกลางของเส้นตรงเส้นแรก



กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง มี O เป็นจุดกึ่งกลาง
 ปลาย A และ B จุดกับเส้นขนาน CD กับ EF
 P เป็นจุดๆ หนึ่งอยู่ใน CD ตลากเส้น PQ ให้ผ่าน
 จุด O พบ EF ที่ Q

จะต้องพิสูจน์ว่า O แบ่งครึ่ง PQ

พิสูจน์ ใน $\triangle AOP$ กับ BOQ

$$\therefore \begin{cases} \angle AOP = \angle BOQ & (\text{ท.ป.3}) \\ \angle PAO = \angle QBO & (\text{ท.ป. 14}) \\ AO = BO & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOP = \triangle BOQ$ (ท.ป. 17)

$\therefore OP = OQ$

นั่นคือจุด O แบ่งครึ่งเส้นตรง PQ

ข.ต.พ.

9/128 โจทย์ ใดๆ หนึ่งมีระยะทางห่างจากเส้นขนานคู่หนึ่ง
 เท่ากัน, ถ้าลากเส้นตรงสองเส้นให้ผ่านจุดนี้ และ

ไปตัดกับเส้นขนานกันแล้ว, ส่วนของเส้นตรงทั้งสอง
ที่ถูกตัดและอยู่ระหว่างเส้นขนานจะเท่ากัน

(H & S 9/49)

กำหนดให้ $AB \parallel CD$ O เป็นจุดๆหนึ่ง ห่างจาก AB กับ
 CD เท่ากัน คือ $OE = OF$ เส้นตรง GH ตัด AB
ที่ G ผ่านจุด O และตัด CD ที่ H เส้นตรง KL
ตัด AB ที่ K ผ่านจุด O และตัด CD ที่ L

จะต้องพิสูจน์ว่า $GK = LH$

พิสูจน์ ใน $\triangle GOE$ กับ $\triangle OFH$

$$\therefore \begin{cases} \angle OGE = \angle OHF & (\text{ท.ป. 14}) \\ \angle GOE = \angle FOH & (\text{ท.ป. 3}) \\ OE = OF & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GOE = \triangle OFH \quad (\text{ท.ป. 17})$$

$$\therefore GE = HF \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ทำนองเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า } EK = FL \dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \therefore GE + EK = HF + FL$$

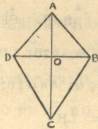
$$\text{นั่นคือ } GK = LH$$

10/129 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$, ถ้า $AB=AD$, และ

$BC=DC$: จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม AC แบ่งครึ่งมุม

ทั้งต้อง: และเส้นทแยงมุม AC จะตั้งฉากกับ BD

(H & S 10/49)



กำหนดให้ $ABCD$ เป็น $\square$ รูปหนึ่ง $AD=AB$ และ $BC=DC$
ลากเส้นทแยงมุม AC , BD และให้ตัดกันที่

จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า (1) AC แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ กับ $\angle BCD$

(2) AC ตั้งฉากกับ BD

พิสูจน์ ใน $\triangle ADC$ กับ $\triangle ABC$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ BC = DC & (,,) \\ AC & \text{ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC = \triangle ABC \quad (\text{ท.ป.7})$$

๑๒๓)

$$\therefore \angle DAC = \angle CAB$$

$$\text{และ } \angle DCA = \angle BCA$$

นั่นคือ AC แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ กับ $\angle BCD$ (1)

และใน $\triangle DAO$ กับ $\triangle BAO$

$$\therefore \begin{cases} AD = AB & (\text{โจทย์}) \\ AO \text{ ด้านร่วม} \\ \angle DAO = \angle BAO & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAO = \triangle BAO \quad (\text{ท.บ. 4})$$

$$\therefore \angle AOD = \angle AOB$$

$$\text{แต่ } \angle AOD + \angle AOB = 2 \text{ มุมฉาก} \quad (\text{ท.บ.1})$$

$$\therefore \text{แต่ละมุมคือ} = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore AC \text{ ตั้งฉากกับ } BD \quad \text{ซ.ต.พ.}$$

11/129 โจทย์ นายช่างวิศวกรรมโยธาผู้หนึ่ง ต้องการ

ทราบส่วนกว้างของแม่น้ำจะสร้างสะพานข้าม. เขา
ยืนอยู่ที่จุด A บนฝั่ง, ตั้งเขตรวดตวัด B ท้ายบนฝั่ง
ตรงข้ามพอดตรงกับ A. แล้วจึงวางแนวเส้น AC บน
ฝั่งที่เขาอยู่นายให้เป็นแนวตั้งฉากกับ AB แล้วแล้ว, เขา
ปักหลักที่จุด O อันเป็นจุดกึ่งกลางของ AC. จากจุด C
เขาเดินไปในแนวที่ตั้งฉากกับ AC เมื่อถึงตำบล D

ปรากฏว่าหลัก O กับจุด B และตัวเขาอยู่ในแนวเส้นตรงอันเดียวกัน. แล้วก็วัดระยะ CD: จึงพิสูจน์ว่า CD น้อยกว่าครึ่งของแม่น้ำ. (H & S 11/49)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมของแม่น้ำ ถ้า AC ตั้งฉากกับ AB O เป็นจุดกึ่งกลางของ AC ถ้า BO จาก C ถ้า CD ตั้งฉากกับ AC และพบส่วนของ BO ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า $CD = AB$

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle COD$

$$\therefore \begin{cases} \angle BAO = \angle OCD & (\because \text{ต่าง } 90^\circ) \\ \angle AOB = \angle COD & (\text{ท.ป.3}) \\ AO = OC & (\text{โจทย์}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB = \triangle COD \quad (\text{ท.ป.17})$$

$$\therefore CD = AB$$

ช.ต.พ.

คำตอบ

แบบฝึกหัดทวนเรื่องรูปสามเหลี่ยม

ว - ร หน้า 141-145

(Page 54 in H & S)

ข้อ 1/141 คชน 1 คบตแทรก 1 ของ ท.บ. 16 หน้า 112-113

คชน 2 คบตแทรก 2 ของ ท.บ. 16 หน้า 118

ข้อ 2/141 คชอ 8 หน้า 43

ข้อ 3/141 ต.ท.บ. 5 หน้า 52 และ ท.บ. 9 หน้า 78

วิธีพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม
ให้ทำดังนี้ คือ.

$$\therefore A = C = 3.6$$

$$\therefore A = C \quad (\text{ท.บ. 5})$$

$\therefore$ มุมหนึ่งๆ ต่างเป็นมุมแหลม เพราะถ้า
เป็นมุมบาน $A + C > 2$ มุมฉาก ซึ่งเป็นไป
ไม่ได้ (ท.บ. 16)

$$\therefore B = 2.8 \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore B < A < C \quad (\text{ท.บ. 9})$$

แต่ $\hat{A}$ และ $\hat{C}$ เป็นมุมแหลม

$\therefore \hat{B}$,, ,, ,, ด้วย

$\therefore ABC$ เป็น Δ มุมแหลม

ข้อ 4/141 บทพิสูจน์ที่อ้างคือ ท.บ.6 และ 10 (ดูหน้า 57 และ 80)

(i) ใน ΔABC

$$\therefore \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad (\text{ท.บ.16})$$

$$\therefore \hat{C} = 180^\circ - (48^\circ + 51^\circ)$$

$$= 81^\circ$$

$\hat{C}$ เป็นมุมใหญ่ที่สุด (ตามจำนวนของค่า
เมื่อเทียบกับ $\hat{B}$ และ $\hat{A}$)

$\therefore C$ เป็นด้านยาวที่สุด (ท.บ.10)

$$(ค.บ.๙) \quad (ii) \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (62\frac{1}{2}^\circ + 62\frac{1}{2}^\circ)$$

$$= 55^\circ$$

แต่ $\hat{A} > 62^\circ$ (โจทย์)

$$(ค.บ.๙) \quad \therefore \hat{A} > \hat{C}$$

$$(บท.๑) \quad \therefore a > c \quad (\text{ท.บ. 10})$$

ข้อ 5/142 (i) เท่ากันทุกประการ (ท.บ 17)

(ii) ,, ,, (ท.บ.14)

(iii) อาจไม่เท่ากันได้ ดูข้อ 1 หน้า 131

(iv) เท่ากันทุกประการ (ท.บ. 7)

(v) ดูกรณี 2 นัย (ambiguous Case) ข้อ 2 หน้า 131

(vi) เท่ากันทุกประการ (iii) (ท.บ. 18)

ข้อ 6/143 ดูข้อ 1 และข้อ 2 หน้า 131

ข้อ 7/143 สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสามมุม อาจไม่
เท่ากันทุกประการได้สร้างรูป

เช่น ABC, $\triangle DEF$, เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปมี

$$\overset{\Delta}{A} = \overset{\Delta}{D}, \overset{\Delta}{B} = \overset{\Delta}{E}, \overset{\Delta}{C} = \overset{\Delta}{F}$$

แต่ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ ไม่เท่ากันทุกประการเลย

รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้ เรียกว่ารูป $\triangle$ คล้าย

กัน (Similar Triangles)

หมายเหตุ ดูข้อท้าย “การใช้ทฤษฎีที่ 17” ในเล่มนี้

คำตอบ โจทย์ระคน ว.-ร. หน้า 143.

ข้อ 8/143 (i) ดูท.บ. 12 หน้า 84

(ii) จากรูป ท.บ. 12 ให้ OQ เป็นเส้นเฉียงที่

$$\text{ทำให้ } \overset{\Delta}{COQ} = \overset{\Delta}{COP}$$

$$\therefore \overset{\wedge}{OQA} + \overset{\wedge}{OQC} = \overset{\wedge}{OPB} + \overset{\wedge}{OPC} = 2\angle n$$

$$\text{J.ก) แต่ } \overset{\wedge}{COQ} = \overset{\wedge}{COP}$$

$$\therefore \overset{\wedge}{OQC} = \overset{\wedge}{OPC} \quad (\text{ท.ป.16})$$

$$\therefore OP = OQ$$

ก) J.ก) (iii) ให้ OR, OP เป็นเส้นเฉียดฉากจาก O มา
ยัง AB ทำให้ $\overset{\wedge}{ROC} > \overset{\wedge}{POC}$

$$\therefore \overset{\wedge}{ORC} + \overset{\wedge}{ROC} + \overset{\wedge}{OCR} = 2 \text{ มุมฉาก} = \overset{\wedge}{OPC} + \overset{\wedge}{POC} + \overset{\wedge}{OCP} \quad (\text{ท.ป. 16})$$

$$\text{แต่ } \overset{\wedge}{OCR} = \overset{\wedge}{OCP} \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore \overset{\wedge}{ORC} + \overset{\wedge}{COR} = \overset{\wedge}{OPC} + \overset{\wedge}{POC}$$

$$\text{แต่ } \overset{\wedge}{ROC} > \overset{\wedge}{POC}$$

$$\therefore \overset{\wedge}{ORC} < \overset{\wedge}{OPC}$$

$$\therefore OR > OP$$

ข้อ 9/143 ข้อ 2 ท้าย “การใช้ทฤษฎีบท 17” ในเล่มนี้ หน้า...

ข้อ 10 และ 11 ในหน้า 144 นี้ เป็นโจทย์เกี่ยวกับมุมการ
สร้างรูปง่าย ๆ โดยมากครูผู้สอนมักให้นักเรียนไปทำทำให้ใน
กระดาษ ใน “กฎแวกเรชันคณิตศาสตร์”

ข้อ 12/144 วิธีสร้าง ลาก CD ให้ยาว 2.7 ซม. (27 ฟุต)

ต่อ DC ออกไปภายนอกที่ C ทำมุม BCA ให้

เท่ากับ 65° และที่ปลาย D ทำมุม $\angle BDA = 40^\circ$
ให้ CD, DA ตัดกันที่จุด และจาก A ถาก AB
ตั้งได้ฉากกับ CD ตัด DC ออกไปที่ B

ถ้าวัดความยาวของ AB จะได้ $= 1.8$ ซม.
แต่รูปนี้ย่อมาเป็นหนึ่งในสอง

$\therefore AB$ ตามมาตราส่วน $= 1.8 \times 2 = 3.6$ ซม.

$\therefore$ ความยาวจริง $= 3.6 \times 10$ ฟุต
 $= 36$ "

ข้อ 13/144 วิธีสร้าง [รูปนี้ย่อลงอีกครั้งหนึ่ง]

ครั้งแรกเขียนกระโจมไฟ PQ ให้ยาว 1.26 "

จาก Q ถาก QR ตั้งได้ฉากกับ PQ

$\therefore A$ และ B ซึ่งแทนเรือกลไฟจะอยู่บน QR
นั่นเอง

$\therefore \angle PAQ = 57^\circ \therefore \angle QPA = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$

จาก P ถาก PA ทำมุม $\angle QPA = 33^\circ$ ให้ PA
ตัด QR ที่ A

$\therefore A$ เป็นเรือกลไฟตำแหน่งแรก

เช่นเดียวกัน $\therefore \angle PBQ = 33^\circ \therefore \angle QPB = 90^\circ - 33^\circ$
 $= 57^\circ$

∴ ที่ P ทำมุม $\angle QPB = 57^\circ$ ให้เส้น PB ตัด
 QR ที่ B ถ้าวัดจะได้ AB ยาว .56"

∴ ถ้าใช้มาตราส่วน 1" แทน 100" AB จะ
 ยาว 1.12"

∴ ระยะทางระหว่างเรือกลไฟทั้งสอง (AB)

ตามจริง = 112 ฟุต

ข้อ 14/145 ให้ D เป็นประภาคาร A และ B เป็นเรือรบ ถ้า
 วิธีสร้าง

ลาก AB ให้ไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ ให้
 ยาว 3" เพื่อแทนความยาวจริง 600 หลา

∴ เรือ A อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ของ
 ประภาคาร (โจทย์)

หรือพูดเสียใหม่ได้ว่า กระโjoinไฟ D อยู่ทาง
 ทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A

∴ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ระหว่างทิศเหนือ
 และตะวันออกเฉียงเหนือ ณ จุด A

เช่นเดียวกัน เรือรบ B เมื่อมองจากประภา
 คาร D ทำมุม 15° กับทิศใต้ หรือพูดเสียใหม่

ได้ว่า ประภาคาร D ทำมุม 15° กับทิศเหนือ
 ณ จุด B

∴ ที่ B ถาก BD ให้ทำมุมกับเส้นทึบ หนึ่ง ณ

จุด B ทาง 15°

ผลจากการวัด $DA = 1.73''$ (ค่าใกล้เคียง)

และ $DB = 3.46''$ (,)

∴ ระยะทางจากประการ ไปยัง เว็รรม A

และ B เป็น 346 หลา และ 693 หลาตามลำดับ

โจทย์แบบฝึกหัดท้ายทฤษฎีบทที่ 2C - 21

ว.-ร. หน้า 156

1/156 โจทย์ ถ้าด้านที่ต่อตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใดๆยาว
เท่ากันแล้ว, รูปสี่เหลี่ยมนั้นย่อมเป็นรูปสี่เหลี่ยมคาง

ขนาน (H & S 1/59)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางด้าน AB = CD และ

$$AD = BC$$

จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางขนาน

พิสูจน์ ถ้าก AC ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC \quad (\text{ท.ป.7})$$

$$\text{ดังนั้น } \angle ACB = \angle DAC$$

$$\therefore BC \parallel AD$$

$$\therefore BC \text{ ขนานและเท่ากับ } AD$$

$$\text{ดังนั้น } AB \text{ ขนานกับและเท่ากับ } DC \quad (\text{ท.ป.20})$$

$$\therefore \square ABCD \text{ เป็น } \square \text{ ด้านขนาน}$$

ช. ต. พ.

2/156 โจทย์ กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ
เท่ากัน, รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

(H & S 2/59)

กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\angle A = \angle C$ และ $\angle B = \angle D$

จะต้องพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\text{พิสูจน์ } \therefore \angle A = \angle C$$

$$\angle B = \angle D$$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4 \text{ มุมฉาก (โดย}$$

ความจริงที่ตกจาก ท.ป. 16)

$$\text{ดังนั้น } \angle A + \angle B = 2 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore BC \text{ ขนานกับ } AD \quad (\text{ท.ป. 11})$$

โดยทำนองเดียวกันเราพิสูจน์ได้ว่า

AB ขนานกับ DC

$\therefore \square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ช.ต.พ.

3 / 156 โจทย์ ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ แบ่ง
ครึ่งซึ่งกันและกันแล้ว รูปสี่เหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยม
ด้านขนาน (H & S 3/59)

กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม AC และ BD เป็นเส้น
ทแยงมุม และให้ $AO = OC$ และ $BO = OD$
จะต้องพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB$, $\triangle COD$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \\ \angle AOB = \angle DOC \end{cases} \quad (\text{ท.ป.3})$$

$$\therefore \triangle AOB = \triangle COD \quad (\text{ท.ป.4})$$

$$\therefore AB = DC$$

$$\angle BAO = \angle DCO$$

$$\therefore AB \parallel DC \quad (\text{ท.ป.13})$$

$$\therefore ABCD \text{ เป็น } \square \text{ ด้านขนาน} \quad \text{ช.ต.พ.}$$

4/156 โจทย์ เส้นตรงยาวมมทั้งดอง ของรูปสี่เหลี่ยมขนม
 เบี่ยงป่นจะแบ่งครึ่งซีกกันและกัน และตัดกันเป็นมุมฉาก
 (H & S 4/59)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเบี่ยงป่น
 จะต้องพิสูจน์ว่า ก. $AO = OC$ และ $BO = OD$

ข. BD ตั้งฉากกับ AC

พิสูจน์ ก. ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle BCD$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \text{ (ใช้กฎสี่เหลี่ยมขนมเบี่ยงป่น)} \\ \therefore AD = BC \text{ (" ")} \\ BD \text{ ด้านร่วม} \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle BCD \quad (\text{ท.ป.7})$$

$$\therefore \hat{ABD} = \hat{BDC}$$

$$\therefore AB \parallel CD \quad (\text{ท.ป.13})$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $AD \parallel BC$

$\therefore ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยม

$$\therefore AO = OC \text{ และ } BO = OD$$

พิสูจน์ ข. ใน $\triangle AOD$, $\triangle COD$

$$\left\{ \begin{array}{l} AO = OC \quad (\text{บทแทรก 1 ท.ป.12}) \\ \therefore AD = DC \quad (\text{โจทย์}) \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle ADO = \triangle DOC \quad (\text{ท.ป.7})$$

$$\text{ดังนั้น } \angle AOD = \angle DOC$$

$$\text{แต่ } \angle AOD + \angle DOC = 2 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore \angle AOD \text{ หรือ } \angle DOC = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\therefore AC \text{ กับ } BD \text{ ตัดแบ่งครึ่งเป็นมุมฉากกันที่}$$

จุด O

ช.ต.พ.

5/156 โจทย์ ถ้าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้าน

(ขนานยาวเท่ากันแล้ว, มุมทุกมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้าน

ขนานจะเป็นมุมฉาก (H & S 5/59)

กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมี AC=BD

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมทุกมุมของ ABCD ต่างเป็นมุมฉาก

พิสูจน์

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ AC = BD \\ DC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC = \triangle BDC \quad (\text{ท.ป.7})$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BCD$$

$$\text{แต่ } \angle ADC + \angle BCD = 2 \text{ มุมฉาก } (\text{ท.ป.14})$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BCD = 1 \text{ มุมฉาก}$$

$$\text{เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า } \angle BAD = \angle ABC$$

$$= 1 \text{ มุมฉาก}$$

ช.ต.พ.

6/156 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า
เส้นทแยงมุมทั้งสองจะยาวไม่เท่ากัน (H & S 6/59)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งไม่มีมุมใด
เป็นมุมฉากเลย (ไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า)

จะต้องพิสูจน์ว่า AC ไม่เท่ากับ BD

พิสูจน์ $\therefore AB \parallel CD$ (โจทย์)

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 2 \text{ มุมฉาก}$ (ท.บ. 14)

แต่มุมทั้งสองนี้ไม่เท่ากับ 1 มุมฉาก (โจทย์)

$\therefore \angle ABC$ ไม่เท่ากับ $\angle BCD$

ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle BCD$

$\therefore \begin{cases} AB = CD \\ BC \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$ (บ.พ. 21)

$\begin{cases} \text{แต่ } \angle ABC \text{ ไม่เท่ากับ } \angle BCD \end{cases}$

$\therefore AC$ ไม่เท่ากับ BD ข.ต.พ.

โจทย์ฝึกหัดว่าด้วยสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ท้ายทฤษฎีบทที่ 21 ว.-ร. 157

1/157 โจทย์ จงแสดงให้เห็นว่า ถ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียก

ปูนตามรอยเส้นทแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่งแล้ว รูปสาม

เหลี่ยมทั้งต้องย่อมทับกันสนิท นั่นคือจะพิสูจน์ว่าเส้น
 ทแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่ง ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 ย่อมเป็นเส้นซิมเมตริก (H & S 1/60)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 จะต้องพิสูจน์ว่า AC หรือ BD เป็นเส้นซิมเมตริก

พิสูจน์ ถ้า AC เป็นเส้นทแยงมุม เราอาจพิสูจน์ได้ว่า
 $\triangle ABC = \triangle ADC$ (ท.ป. 7)

$$\therefore \angle CAB = \angle CAD$$

$$\text{และ } \angle ACB = \angle ACD$$

ฉะนั้นรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตามเส้นทแยง
 มุม AC แล้ว AD จะทับ AB และ CD จะทับ CB

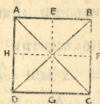
$\therefore$ D ซึ่งเป็นจุดตัดของ AD, CD จะต้องทับ
 B ซึ่งเป็นจุดตัดของ AB, BC

$\therefore \triangle ACD$ ทับ $\triangle ABC$ สนิท

$\therefore$ AC เป็นเส้นซิมเมตริก

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า BD เป็นเส้นซิม
 เมตริก

2/157 โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสต่างก็เป็นเส้นซิมเมตริก จงหาเส้นตรงอีกสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่เป็นเส้นซิมเมตริก และมีใช้เส้นทแยงมุม (H & S 2/60)



กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส
 จะต้องพิสูจน์ว่า ก. AC และ BD เป็นเส้นซิมเมตริก
 และ ข. ให้เส้นซิมเมตริกอื่นๆ อีกสองเส้น
 พิสูจน์ ก. โดยพิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 1 เราจะได้
 AC หรือ DB เป็นเส้น Symmetry
 ข. ให้ E, F, G, H, เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน
 AB, BC, CD และ AD ตามลำดับ
 $\therefore$ เมื่อพับตามรอย HF ให้ AH ทับ HD จุด
 A จะทับจุด D
 $\therefore \angle A = \angle D$

∴ AB ทับ DC

∴ AB = DC

ดังนั้นจุด B ทับจุด C

รูป □ ABFH ทับ □ HFDC ดังนี้

∴ HF เป็นเส้น Symmetry

โดยทำนองเดียวกัน EG เป็นเส้น Symmetry

∴ เส้นซิมเมตริกของสี่เหลี่ยมคือ เส้นทแยง

ตัดกันที่จุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

ช.ต.พ.

3/157 โจทย์ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเส้นหนึ่งๆ

จะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

ที่เท่ากันนั้นหมายความว่าเส้นทแยงมุม เป็นเส้นซิม

เมตริกซ์หรือไม่ และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเส้นอะไร

เป็นเส้นซิมเมตริกของสี่เหลี่ยม (H & S 3/60)

คำตอบ ไม่ใช่ เพราะถ้า AC เป็นเส้น Symmetry เมื่อ

พับรูปตาม AC แล้ว $\triangle ABC$ จะทับ $\triangle ACD$

ดังนี้

นั่นคือ $AB = AD = BC = DC$ แต่โจทย์บอก.

ว่า $\square ABCD$ เป็น $\square$ เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น นั่น
คือที่สมมติไม่จริง

$\therefore AC$ ไม่ใช่เส้น Symmetry (1)

โดยทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

BD ไม่ใช่เส้น Symmetry

ถ้าให้ E, F, G, H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน

AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ

เราอาจพิสูจน์ได้โดยวิธีในข้อ 2 ว่า รอยพับ

EG หรือ FH เป็นเส้น Symmetry

ช.ค.พ.

4/158 โจทย์ เส้นเชื่อมแตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานไข่ม้ง

หรือไม่? ให้อ้างเหตุผลมาด้วย

(H & S 4/60)

คำตอบ ไม่มีเส้น Symmetry ในรูป $\square$ ด้านขนานไข่ม้ง

$\therefore$ รูปที่เป็น Symmetry นั้นตรงเส้น Symmetry

ต้องมีมุมประชิดเท่ากันเป็นอันดับแรก รูป $\triangle$ ทั้ง

สองเมื่อพับแล้วจึงจะเท่ากัน

$\therefore$ เส้นทะแยงมุม หรือเส้นที่ลากต่อจุดกึ่ง

กลางของด้านตรงข้าม ย่อมไม่ทำให้เกิดผล

ดังข้อ 1 หรือ ข้อ 3 ได้

และถึงแม้ว่าเราจะพับรูปปลายด้านไหนๆก็ตาม

รูปทั้งสองข้างของรอยพับจะไม่ทับกันเลย

∴ เส้นซิมเมตริกของ $\square$ เหลี่ยมด้านขนาน

ใช้จึงไม่มีเลย

5/158 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD, ด้าน $AB=AD$

และด้าน $CB = CD$, แต่ด้านทั้งหมดยี่ไม่เท่ากัน. เส้นทะ

แยงมุมเส้นไหนบ้าง (หรือทั้งสองเส้น) เป็นเส้นซิม

เมตริก? (H & S 5/60)

คำตอบ เส้น AC เป็นเส้น Symmetry แต่ BD ไม่ใช่

เส้น Symmetry

พิสูจน์ $\triangle ADC = \triangle ABC$ (ท.บ. 7)

$\angle DAC = \angle CAB$

เมื่อพับรูป $\square ABCD$ ตามรอย AC โดยวิธี

ในข้อ 2

$\triangle ADC$ จะทับ $\triangle ABC$ ดังนี้

6/158 โจทย์ จงพิสูจน์โดยการยกรูปทับกันว่า

(i) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูปจะเท่ากัน
ทุกประการ ถ้าด้านประชิดหนึ่งของรูปหนึ่งเท่ากับ
ด้านประชิดของอีกรูปหนึ่ง, ด้านต่อด้าน, และมุมใน
ระหว่างด้านประชิดดังกล่าวเท่ากัน

(ii) รูปเหลี่ยมผืนผ้าสองรูปจะเท่ากันทุกประ
การได้ ถ้าด้านประชิดหนึ่งของรูปหนึ่งเท่ากับด้าน
ประชิดหนึ่งของอีกรูปหนึ่งด้านต่อด้าน

กำหนดให้ $ABCD, EFGH$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูปมี

$$\hat{D} = \hat{H}$$

$$AD = EH$$

$$DC = HG$$

จะต้องพิสูจน์ว่า สี่เหลี่ยมทั้งสองเท่าๆ กัน โดยการยกทับ
พิสูจน์

จาก AC, EG

$$\therefore \triangle ACD = \triangle EHG \quad (\text{ท.บ.4})$$

$\therefore$ เราอาจยก $\triangle ACD$ ไปทับ $\triangle EHG$ ได้สนิท

$\therefore AC$ ทับ EG สนิท

$\therefore ABCD$ และ $EFGH$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\therefore AB = CD \quad (\text{ท.บ.21})$$

$$\text{และ } EF = HG \quad (,,)$$

$$\text{แต่ } CD = HG \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore AB = EF$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $BC = FG$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle EFG \quad (\text{ท.บ. 7})$$

$\therefore$ เราอาจยก $\triangle ABC$ ไปทับ $\triangle EFG$ ได้สนิท

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ทับ $EFGH$ สนิท

$\therefore$ รูปสี่เหลี่ยมทั้งสองย่อมเท่ากันทุกประการ

ตอน 2

ถ้า $ABCD, EFGH$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$\angle D = \angle H = 90^\circ$$

$$\text{และ } AD = EH, CD = HG$$

$\therefore$ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\square ABCD = \square EFGH$ ทุกประการ โดย

ทำซ้ำเดียวกันกับตอน 1

7/158 โจทย์ รูปสี่เหลี่ยมสองรูป คือ $ABCD, EFGH$ มีด้าน

AB, BC และ DA เท่ากับด้าน EF, FG, GH, HE ตาม

ลำดับ และมี $\angle BAD = \angle FEH$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า รูปสี่

เหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันสนิท (H & S 7/60)

กำหนดให้ $ABCD, EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีด้าน $AB = EF, BC = FG, CD = GH, DA = HE$ และ

$$\angle BAD = \angle FEH$$

จะต้องพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมทั้งสองนี้ทับกันสนิท

พิสูจน์ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\triangle ABD = \triangle EFH \quad \text{โดยท.ป. 7}$$

$$\therefore BD = FH$$

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle BDC = \triangle FHG$ (ท.ป. 7)

$\therefore$ โดยผลแห่งการพิสูจน์แล้ว เราได้

$$\angle ADB = \angle EHF, \angle ABD = \angle EFH$$

$$\angle BDC = \angle FHC, \angle DBO = \angle HFG$$

$$\therefore \angle ADC = \angle EHG \text{ และ } \angle ABC = \angle EFG$$

ยก $\square ABCD$ ทับ $\square EFGH$ สนิทโดยวิธีการ

อย่างข้อ 6 ช.ด.พ.

8/159 โจทย์ เส้นตรงใดๆ ที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้น
ทะแยงมุมเส้นหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ปลายทั้ง
สองข้าง จากด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น
แล้ว เส้นทะแยงมุมจะแบ่งเส้นตรงนั้นออกเป็นสองส่วน
เท่าๆ กันทุกจุดนั้น (H & S 8/60)

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม BD
 E, F ลากจากจุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $EO = OF$

พิสูจน์ $\left\{ \begin{array}{l} \angle EDO = \angle OBF \quad (\text{ท.ป. 14}) \\ \therefore \left\{ \begin{array}{l} \angle EOD = \angle BOF \quad (\text{ท.ป. 3}) \\ OD = OB \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\triangle OED = \triangle BOF$$

$$EO = OF \quad \text{ซ.ค.พ.}$$

9/159 โจทย์ ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นตรงลากจาก
 จากมุมที่อยู่ตรงข้ามคู่หนึ่ง ไปยังเส้นทแยงมุม ยังลาก
 ต่อมุมตรงข้ามอีกคู่หนึ่งย่อมยาวเท่ากัน (H & S 9/60)

กำหนดให้ AE และ CF ตัดฉากกับ AC ซึ่งเป็นเส้นทแยง
 มุมของ $\square$ ด้านขนาน $ABCD$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AE = CF$

พิสูจน์ $\left\{ \begin{array}{l} AD = BC \quad (\text{ท.ป. 21}) \\ \therefore \left\{ \begin{array}{l} \angle ADE = \angle FBC \quad (\text{ท.ป. 14}) \\ \angle AED = \angle BFC \quad \text{โดยกำหนดให้} \end{array} \right. \end{array} \right.$

$$\therefore \triangle ABD = \triangle BCD$$

$$\therefore AE = CF \quad \text{ซ.ต.พ.}$$

10/159 โจทย์ ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง และ X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC จงพิสูจน์ว่า AYCX เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (H & S 10/60)

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ BC ตามลำดับ จะต้องพิสูจน์ว่า AYCX เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\text{พิสูจน์} \quad AX = \frac{1}{2} AD \quad (\text{โจทย์})$$

$$CY = \frac{1}{2} BC \quad (,,)$$

$$\therefore AX \text{ จะเท่าและขนานกับ } CY$$

$$\therefore AY \quad ,, \quad CX \text{ ด้วย (ท.ป.20)}$$

$$\therefore AYCX \text{ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน}$$

ซ.ต.พ.

11/159 โจทย์ ABC และ DEF เป็นสามเหลี่ยมดิ่งรูป มีด้าน AB, BC เท่า และขนานกับ DE, EF ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AC และ DF จะเท่ากันและขนานกันด้วย

(H & S 11/60)

พิสูจน์

ลาก AD, EF และ BE

 $\therefore AB$ ขนานกับและเท่ากับ DF $\therefore AD$ เท่ากับและขนานกับ BE (ท.ป.20)

โดยทำนองเดียวกันเราได้ BE เท่ากับและขนานกับ CF

ดังนั้น AD เท่ากับและขนานกับ CF

 $\therefore AC$ เท่ากับ DF และขนานกันด้วย

ช. ต. พ.

12/160 โจทย์ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี AB ขนาน
กับ DC และ AD เท่ากับ BC แต่ไม่ขนานกัน จงพิสูจน์ว่า

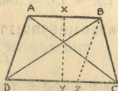
(i) มุม A + มุม C = 180° = มุม B + มุม D

(ii) เส้นทแยงมุม AC = เส้นทแยงมุม BD

(iii) เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลาง ของด้าน AB และ

CD จะเป็นเส้นซิมเมตริก.

(H & S 12/61)



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีด้าน AB // DC
มีด้าน AD เท่าแต่ไม่ขนานกับ BC, X และ Y

เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, CD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ (i) $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{B} + \hat{D}$

(ii) $AC = BD$

(iii) XY เป็นเส้นทแยงมุม

พิสูจน์ (i) ถ้า $BZ \parallel AD$

$\therefore \square ABZD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน มี $AD = BZ$
(ท.ป. 21)

ดังนั้น $\triangle BZC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

$\therefore \angle BZC = \angle BZD$ (ป.ป. 5)

แต่ $AD \parallel BZ$ มี CD ตัด

$\therefore \angle ADC = \angle BZC$ (ท.ป. 14)

$\therefore \angle D = \angle C$

แต่ $\angle DAB + \angle ADC = 180^\circ$ (ท.ป. 14)

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$

โดยทำนองเดียวกันเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ = \angle B + \angle D$

(ii) เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle ADC = \triangle BDC$ (ท.ป. 4)

$$AC = DB$$

(iii) พับ $\square ABCD$ ตรง Y ให้จุด C ทับจุด D

$\therefore \angle C = \angle D$ และ $BC = AD$

$\therefore BC$ ทับ AD ดังนั้นจุด B ทับจุด A

และ AX จะทับ BX ดังนั้นตรงจุด X ซึ่งเป็น

จุดกึ่งกลางของ ABD

$\therefore$ ถ้าพับ $ABCD$ ตามรอย XY แล้วรูปทั้ง

สองจะทับกันสนิท

$\therefore XY$ เป็นเส้น Symmetry ช.ต.พ.

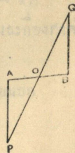
13/160 โจทย์ AP และ PQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากัน

และต่างหมุนรอบ A และ B ซึ่งตรงอยู่ทับกันได้ด้วยความเร็วเท่ากันและหมุนไปทางเดียวกัน ถ้าเส้นตรงคู่ขนานกันอยู่แล้ว แต่ปลายเส้นจะไปตรงกันข้าม จึงแสดงให้เห็นว่า เมื่อเส้นตรงคู่ขนานไปเส้นตรงคู่ขนาน

(i) ขนานกันเสมอ

(ii) เส้นตรงที่ลากต่อจุด P

ถึงจุด Q ต้องผ่านจุด ๆ หนึ่ง
ที่เคลื่อนที่ไม่ได้ (H&S13/67)



กำหนดให้ AP, BQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากัน ต่าง
 หมุนรอบจุด A และ B ซึ่งตรงอยู่กบที่ด้วย
 ความเร็วเท่ากันและหมุนไปทางเดียวกัน และ
 ให้เส้นตรงทั้งสองในเวลาตรงกันหมุนขนานกัน
 แต่ไปในทางตรงกันข้าม

จะต้องพิสูจน์ว่า (i) $AP \parallel BQ$ เสมอ
 (ii) PQ ต้องผ่าน O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลาง AB

พิสูจน์ (i) เพราะว่า AP กับ BQ หมุนไปด้วยอัตราความ
 เร็วเท่ากันเสมอ

$\therefore \angle A$ มีขนาดเท่ากับ $\angle B$ เสมอ

แต่มุมทั้งสองนี้เป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AP \parallel BQ$ เสมอ

(ii) ถ้า PQ ให้ผ่าน AB ที่จุด O (ซึ่งอาจอยู่ที่
 ใดๆ บน AB)

เมื่อ AP กับ BQ หมุนไป

$\begin{cases} \angle A = \angle B \text{ เสมอ} & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \angle AOP = \angle QOB \text{ เสมอ} & (\text{ท.บ. 3}) \end{cases}$

$\begin{cases} AP = BQ \text{ เสมอ} & (\text{โจทย์}) \end{cases}$

$$\therefore \triangle AOP = \triangle BOQ \quad (\text{ท.ป. 17})$$

ดังนั้น $AO = OB$ เสมอ

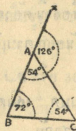
$\therefore PQ$ จะต้องผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลาง

ของ AB เสมอ ช.ต.พ.

14/161 โจทย์ จงคำนวณหา มุมทั้งสาม ของรูป สามเหลี่ยม

ABC โดยกำหนดให้มุมภายใน $A = \frac{3}{4}$ ของมุม A ภาย

ภายนอก; $3B = 4C$. (H & S 14/61)



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่งมุมภายใน $A = \frac{3}{4}$

ของมุมภายนอก และให้ $3B = 4C$

จะต้องหา $\angle BAC$, $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ทางมุมจะกองค่าคือ

ด้าน AB ออกไปถึงจุด X

วิธีหา $\therefore$ มุมภายใน $A = \frac{3}{4}$ มุมภายนอก

$$\therefore \angle A = \frac{3}{4} (180^\circ - \angle A)$$

$$\therefore \angle A = 54$$

$$\text{แต่ } \frac{\Lambda}{A} + \frac{\Lambda}{B} + \frac{\Lambda}{C} = 180^\circ \quad (\text{ท.ป.16})$$

$$\therefore \frac{\Lambda}{B} + \frac{\Lambda}{C} = 180^\circ - \frac{\Lambda}{A} = 126^\circ$$

$$\text{แต่ } B = \frac{4}{3}C \text{ แทนค่า } \frac{7\Lambda}{3}C = 126^\circ$$

$$\therefore \frac{\Lambda}{C} = 54^\circ \quad \frac{\Lambda}{B} = 72^\circ \quad \text{ช.ต.พ.}$$

15/161 โจทย์ เรือรบ ลำหนึ่ง แล่นไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้
เปลี่ยนทิศไปจากทิศเดิมที่เรือกำลังแล่นอยู่เป็นมุม 63° ,
(15) 78° , 119° และ 64° ตามลำดับ ทวนเพื่อจะแล่นรอบ
เกาะ ๆ หนึ่ง ถ้าเรือดำน้ำ ต้องการเปลี่ยนทางเดิน โดย
แล่นไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ตามเดิม จะต้อง หัน ทำมุม
เท่าใด ? (H & S 15/61)

วิธีหาของต้นมต แล่นตรงขึ้น เป็นแนวทิศเหนือ

ทิศตะวันออกเฉียงใต้ให้เป็นมุมฉากกัน

กำหนดให้ ให้ $A'P$ เป็นแนวเดินเรือมุ่งทิศตะวันออกเฉียงใต้

B เป็นจุดทางเดินครั้งที่ 1

BQ เป็นแนวทางทำมุม 63° กับ AP

ให้ C เป็นจุดเปลี่ยนทางครั้งที่ 2

CR เป็นแนวทางทำมุม 78° กับ CQ

D เป็นจุดเปลี่ยนทิศทางครั้งที่ 3

DS เป็นแนวทางทำมุม 119° กับ DR

๑๕๓

ให้ E เป็นจุดเปลี่ยนทางครั้งที่ 4

ET เป็นแนวทางทำมุม 64° กับ ES

และตัดแนว AP ที่จุด A เรือจะค่อยเปลี่ยน

ใช้ทาง AP ตามเดิม

จะต้องหาว่า BAT กางกึ่งกลาง

การหา แนวทางเดินเรือที่เปลี่ยนไปจนครบดัดโค้งจะมี

5 แนวแต่ละในครั้งที่ 6 ใช้แนวเดิม ปรากฏ

แนวเป็นรูป 5 เหลี่ยม ABCDE

$$\therefore \overset{\wedge}{TAP} + \overset{\wedge}{PBQ} + \overset{\wedge}{QCR} + \overset{\wedge}{RDS} + \overset{\wedge}{SET}$$

$$= 4 \text{ L หรือ } 360^\circ \text{ (บทแทรก 2 ท.บ. 16)}$$

$$\text{แต่ } \overset{\wedge}{PBQ} + \overset{\wedge}{QCR} + \overset{\wedge}{RDS} + \overset{\wedge}{SET}$$

$$= 63^\circ + 78^\circ + 119^\circ + 64^\circ$$

$$= 324^\circ$$

$$\therefore \overset{\wedge}{TAP} = 360^\circ - 324^\circ$$

$$\text{นั่นคือ } \overset{\wedge}{BAT} = 180^\circ - 144^\circ$$

$$= 36^\circ$$

ช.ต.พ.

16/161 โจทย์ ถ้าผลบวกของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม

ซึ่งมีด้าน เป็นเส้นตรงเท่ากับผลบวกของมุมภายนอก

รูปนั้นจะมีกี่ด้าน เพราะเหตุใด? (H & S 16/61)

วิธีทำ ผลบวกของมุมภายในของ รูปเหลี่ยมด้านตรงน
 ต้องเท่ากับ 4 มุมฉาก ไม่ว่ารูปนั้นจะมีกี่เหลี่ยม
 (บทแทรก 2 ท.บ. 16)

และผลบวกของมุมภายใน ของรูป ที่กำหนดให้ มี
 $= 4$ มุมฉาก (บทแทรก 1 ท.บ. 16)

มุมภายใน + มุมภายนอกทั้งหมด $= 8$ L.น
 แต่ มุมภายใน + มุมภายนอก ของ สาม เหลี่ยม
 รูปหนึ่ง $= 2$ L.น

$\therefore$ รูปนี้ต้องมี $\frac{8 \text{ L.น}}{4 \text{ L.น}} = 4$ มุมยอด หรือ 4 ด้าน

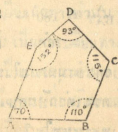
ช.ต.พ.

17/161 โจทย์ จงเขียนรูปห้าเหลี่ยม ABCDE, ใช้ไม้โปร-
 แทรกเตอร์กำหนดมุม $B = 110^\circ$, มุม $C = 115^\circ$ มุม
 $D = 93^\circ$, มุม $E = 152^\circ$ จงใช้ไม้บรรทัดและวงเวียน
 ดึงจุดว่า AE

พ. และ พิสูจน์ว่า

ขนานกับ BC หรือไม่
 ก็ได้ด้วย

(H & S 17/61)



วิธีคิด มุมภายใน ทั้งหมด ของรูป 5 เหลี่ยม รวมกันเข้า

$$= (2 \times 5) - 4 = 6 \text{ มุม (บทแทรก 1 ท.บ. 16)}$$

$$\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 470^\circ$$

$$\therefore \angle A = 540^\circ - 470^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore \angle EAB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\therefore AE \parallel BC \quad (\text{ท.บ. 13})$$

18/162 โจทย์ A กับ B เป็นจุดสองจุดที่เคลื่อนที่ไปได้ BP กับ

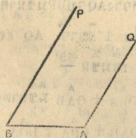
AQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวเท่าไรก็ได้ เส้นตรงสอง

เส้นหมุนได้รอบจุด A และ B เส้น AQ ตั้งต้นหมุนจาก

เส้น AB ไปทางเดียวกันกับเข็มนาฬิกาด้วยความเร็ว

วินาทีละ $7\frac{1}{2}^\circ$ และ BP ตั้งต้นหมุนพร้อมกับ AQ จาก

BA แต่ไปทางตรงกันข้ามกับเข็มนาฬิกาได้วินาทีละ $3\frac{3}{4}^\circ$



(1) จะกินเวลาเท่าไร AQ กับ BP จึงจะขนานกัน

(2) จงวัดและคำนวณว่า AQ และ BP จะทำมุม

เท่าใด? เมื่อหมุนไปได้ 12 วินาที

(3) มุมในข้อ (2) จะลดลงวินาทีละกี่องศา?

(H & S 18/61)

วิธีทำ (1) ใน 1 วินาที $\angle AQ$ และ $\angle BP$ หมุนได้มุมรวมกัน

$$= 7\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4} = \frac{45}{4}^{\circ}$$

$\angle AQ$ และ $\angle BP$ หมุนไปได้มุมรวมกัน $\frac{45}{4}^{\circ}$ ต่อวินาที

$\angle AQ$ และ $\angle BP$ หมุนไปได้มุมรวมกัน 180° คือ

$$\frac{4}{45} \times 180 = 16 \text{ วินาที} \dots\dots\dots (1)$$

(2) ใน 12 วินาที $\angle AP$ หมุนได้มุม

$$= \frac{15}{2} \times 12 = 90^{\circ}$$

ใน 12 วินาทีหมุนได้มุม $= \frac{15}{4} \times 12 = 45^{\circ}$

ให้ $\angle AQ$ กับ $\angle BP$ ตัดกันที่จุด O , $\angle BOA$ เป็นมุม

ในระหว่าง $\angle AQ$ กับ $\angle BP$ มีขนาด 45° (ท.ป.16) .. (2)

(3) $\therefore$ ใน 1 วินาที $\angle AQ$ และ $\angle BP$ หมุนได้มุม

$$\text{เพิ่มขึ้น } \frac{45}{4}^{\circ}$$

$\therefore \angle OBA + \angle OAB$ มีขนาดเพิ่มขึ้นวินาทีละ $\frac{45}{4}^{\circ}$

$\therefore \angle OAB + \angle OBA + \angle BOA = 180^{\circ}$ คงที่ (ท.ป.16)

$\therefore \angle BOA$ ต้องลดลงวินาทีละ $= \frac{45}{4}^{\circ}$

$$= 11\frac{1}{4} \frac{45}{4}^{\circ} \dots\dots\dots (3) \quad \text{ช.ต.พ.}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 22

ว-ร หน้า 167

การทำแบบฝึกหัดชุดนี้ในข้อต่อๆ ไป ถ้าจำดังที่พิสูจน์
แล้วในข้อก่อนๆ ได้ จะทำให้การพิสูจน์ในข้อต่อๆ ไปสะดวก
ขึ้นมาก เพราะเราอาจอ้างข้อความเพียงย่อๆ ได้.

1/167 โจทย์ เส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของ
รูปสามเหลี่ยม ขนานไปกับฐานแล้ว จะแบ่งครึ่ง
ด้านที่เหลือ บทนี้เป็นบทสำคัญหนึ่งของบทพิสูจน์
ที่ 22. (H & S 1/64)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง X เป็นจุดกึ่งกลางของ
ด้าน AB เส้นตรง $XY \parallel BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AY = YC$

พิสูจน์ ถ้า $YZ \parallel AB$ และมี AC ตากัด

$$\therefore \angle XAY = \angle ZYC$$

และ $\because XY \parallel BC$ มี AC ตากัด

$$\therefore \angle AYX = \angle YCZ$$

∴ $\triangle XAY \cong \triangle ZYC$ (บทที่ 11)

∴ $AY = YC$

โดยกำหนดให้ $XY \parallel BC$ และโดยการสร้าง

$$YE \parallel AB$$

$\therefore \square XYZB$ เป็นรูป $\square$ ด้านขนาน

$$\therefore YZ = BX = AX$$

ใน $\triangle AXY, \triangle YZO$

$$\therefore \begin{cases} AX = YZ \\ \angle XAY = \angle ZYC \\ \angle AYX = \angle YCZ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AXY = \triangle YZO \text{ ทุกประการ}$$

$$\therefore AY = YO$$

ข.ต.พ.

2/168 โจทย์ เส้นตรงซึ่งลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสอง
ด้านของรูปสามเหลี่ยม จะขนานกับด้านที่สาม

(H & S 2/64)

กำหนดให้ ให้ X เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ Y เป็น
จุดกึ่งกลางของด้าน AC

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY \parallel BC$

พิสูจน์

จาก C ลาก CZ ให้ขนานกับ AB

ให้พบ XY ที่ตัดออกไปที่จุด Z

$\therefore AB \parallel CZ$ มี AO ตากัด

$\therefore \hat{XAY} = \hat{YCZ}$

ใน $\triangle AXY$ กับ $\triangle YCZ$

$$\therefore \begin{cases} AY = YC \\ \hat{AYX} = \hat{ZYC} \\ \hat{XAY} = \hat{YCZ} \end{cases} \quad (\text{ท.บ.3})$$

$\therefore \triangle AXY = \triangle YCZ$ (โดยท.บ.1)

$\therefore CZ = AX$

$\therefore AX = BX$ (โจทย์)

$\therefore CZ = BX$

เมื่อ CZ เท่ากันและขนานกับ BX

ดังนั้น $XZ \parallel BC$ และเท่ากับ BC ด้วย

$\therefore XY \parallel BC$ ข.ต.พ.

3/169 โจทย์ เส้นตรงที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้าน

ของรูปสามเหลี่ยมย่อมยาวครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

(H & S 3/64)

กำหนดให้ และ สร้าง เพิ่มเติมเหมือนข้อ 2

พิสูจน์ จากการพิสูจน์ในข้อ 2 เราได้

$$\triangle AXY = \triangle YCZ$$

$$\therefore XY = YZ$$

$$\text{ดังนั้น } XY = \frac{1}{2} XZ$$

จากการพิสูจน์ในข้อ 2

$$\therefore XZCB \text{ เป็น } \square \text{ ด้านขนาน}$$

$$\therefore XZ = BC$$

$$\therefore XY = \frac{1}{2} BC \text{ ด้วย}$$

ช.ต.พ.

4/169 โจทย์ จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสามเส้น ที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งสามเหลี่ยมนั้นออกเป็นสามเหลี่ยมสี่รูปที่เท่ากันทุกประการ

(H & S 4/64)



กำหนดให้ ให้ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, AC, BC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AXY = \triangle YCZ = \triangle BZX = \triangle XYZ$

พิสูจน์ โดยการพิสูจน์แล้วในข้อ 2 และข้อ 3

เราได้ $XY = BZ$ และ $YZ = BX$

ใน $\triangle XYZ$ กับ $\triangle BXZ$

$$\therefore \begin{cases} XY = BZ \\ YZ = BX \\ XZ \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle XYZ = \triangle BXZ \quad (\text{ท.บ. 7})$$

โดยทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\triangle XYZ = \triangle AXY \quad (\text{โดยท.บ.17})$$

$$\triangle XYZ = \triangle YCZ$$

$$\therefore \triangle AXY = \triangle YCZ = \triangle BXZ = \triangle XYZ$$

ช.ท.พ.

5/169 โจทย์ เส้นตรงที่ลากต่อจุดกึ่งกลาง ของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมเทศยม จะแบ่งครึ่งเส้นตรงที่ลากจากมุมยอดของรูปสี่เหลี่ยมไปยังฐาน (H & S 5/64)

กำหนดให้ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AC ตามลำดับ ตาก AZ ให้ตัด XY ที่จุด O

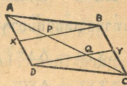
จะต้องพิสูจน์ว่า $AO = OZ$

พิสูจน์ $XY \parallel BC$ โดยพิสูจน์แล้วในข้อ 2

ดังนั้น $XO \parallel BZ$

$\therefore AO = OZ$ (พิสูจน์มาแล้วในข้อ 1) ช.ท.พ.

6/169 โจทย์ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูขนานรูปหนึ่ง X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ซึ่งอยู่ตรงข้าม จงพิสูจน์ว่า BX และ DY จะแบ่งเส้นทแยงมุมออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (H & S 6/64)



กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ BC ตาก BX, DY, AC จะต้องพิสูจน์ว่า $AP = PQ = QO$

พิสูจน์ โจทย์บอกว่า $AX = XD = \frac{AD}{2}$

และ $BY = YC = \frac{BC}{2}$

แต่ $AD \parallel$ และ BC

$\therefore DX \parallel$ และ BY (ท.ป.20)

$\therefore BX \parallel DY$

ใน $\triangle ADQ$, XP ตากจากจุดกึ่งกลางขนานกับ DQ

$\therefore AP = PQ$ (ข้อ 1)

โดยทำนองเดียวกันเราพิสูจน์ได้ว่า $PQ = QC$

$\therefore AP = PQ = QC$ ข.ค.พ.

7/169 โจทย์ ถ้าลากเส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางของด้านประชิด
ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แล้ว รูปที่เกิดขึ้น จะเป็นรูปสี่
เหลี่ยมด้านขนาน (H & S 7/64)

กำหนดให้ P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD
 DA ของ $ABCD$ ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $\square PQRS$ เป็น $\square$ ด้านขนาน



พิสูจน์ จาก BD $\therefore P$ และ S เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AD
(โจทย์)

$\therefore PS$ ขนานและเท่ากับ $\frac{1}{2}BD$ (ข้อ 2,3)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า RQ ขนานและ
(ข้อ 2,3) เท่ากับครึ่งหนึ่งของ BD

∴ PS ขนานและเท่ากับ RQ

∴ PQ RS ด้วย (ท.ป. 20)

∴ PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ข.ต.พ.

8/170 โจทย์ จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของ
ด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามของรูปเหลี่ยมใดๆ จะแบ่งครึ่งซึ่งกัน
และกัน (H & S 8/64)

กำหนดให้ และจะตั้งพิสูจน์เหมือนข้อ 7

พิสูจน์ ลาก VX, XY, YZ และ ZV

□VXYZ เป็น □ ด้านขนาน (พิสูจน์แล้วในข้อ 7)

VY กับ XZ เป็นเส้นทแยงมุมของ □ ด้านขนาน

∴ VY กับ XZ ตัดแบ่งครึ่งกันที่จุด O

(บทแทรก 3 ท.ป. 21)

9/170 โจทย์ จากจุด 2 จุดคือ A และ B และจากจุด O ซึ่งเป็น
จุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดนี้ ลากเส้น AP, BQ, OX ให้
ไปตัดไดนาภกับเส้นตรง CD ถ้า AP และ BQ ยาว 4.2 ซม.
และ 5.8 ซม. จงหาว่า OX ยาวเท่าใด ?

(1.5 ข้อ) แล้วจงพิสูจน์ว่า $OX = \frac{1}{2} (AP + BQ)$ หรือ $\frac{1}{2}$

$(AP + BQ)$ ตัดแล้วแต่จุด A และ B จะอยู่บนข้าง
เดียวกันหรือคนละข้างกับ CD (H & S 9/65)

จะต้องพิสูจน์ว่า ก. ถ้าจุด A กับจุด B อยู่ข้างเดียวกันกับ CD

$$\text{แล้ว เส้นตรง } OX = \frac{1}{2} (AP + BQ)$$

ข. ถ้าจุด A กับจุด B อยู่คนละข้างกันกับ AB

$$\text{แล้ว เส้นตรง } OX = \frac{1}{2} (AP - BQ)$$

และ ค. จงหาว่า OX ยาวเท่าใด

พิสูจน์ ก. ตาก BP ตัด OX ที่จุด R

$\therefore AP, OX, BQ$ ต่างก็ตั้งฉากกับ AB

$\therefore AP, OX, BQ$ ขนานกัน

จากการพิสูจน์ในข้อ 3 เราได้

$$OR = \frac{1}{2} AP$$

$$\text{และ } RX = \frac{1}{2} BQ$$

$$\therefore OR + RX = \frac{1}{2} AP + \frac{1}{2} BQ$$

$$\therefore OX = \frac{1}{2} (AP + BQ)$$

ซ.ต.พ.

พิสูจน์ ข. ตาก PB และต่อ OX ออกไปพบ PB ที่จุด R

จากข้อ 3 ที่พิสูจน์มาแล้ว เราจะได้

$$OR = \frac{1}{2} AP$$

$$RX = \frac{1}{2} BQ$$

$$\therefore OR - RX = \frac{1}{2} AP - \frac{1}{2} BQ$$

$$\therefore OX = \frac{1}{2} (AP - BQ) \quad \text{ช.ต.พ.}$$

ค. วิธีหา ถ้า $AP \parallel CD$ พบ OX ที่จุด R และ BQ ที่จุด S

$$\therefore AP, OX, BQ \text{ ต่างก็ขนานกับ } CD$$

$$\therefore AP, OX, BQ \text{ ขนานกัน}$$

$$\text{ดังนั้น } AP = RX = SQ = 4.2 \quad (\text{ท.ป. 21})$$

และจากพิสัยในข้อ 1 กับข้อ 3 ได้ว่า $OR = \frac{1}{2} BS$

$$\text{แต่ } BS = (BQ - SQ) = (BQ - AP) = (5.8 - 4.2) \\ = 1.6$$

$$\text{ดังนั้น } OR = \frac{1}{2} BS = 0.8$$

$$\therefore OX = OR + RX = 4.2 + 0.8 = 5 \text{ ซม.}$$

ช.ต.พ.

10/170 โจทย์ GH และ XY เป็นเส้นตรงสองเส้น ตากไป

ตัดเส้น AB, CD และ EF ซึ่งขนานกัน ที่จุด K, M, N

และ P, Q, R ตามลำดับ และถ้า $KM = MN$ และ $PQ = QR$

$$\text{แล้ว จงพิสูจน์ว่า } MQ = \frac{1}{2} (KP + NR) \quad (\text{H \& S 10/65})$$

กำหนดให้ GH, XY ตากตัดเส้นขนานสามเส้นที่ K, M, N

และ P, Q, R และให้ $KM = MN, PQ = QR$

จะต้องพิสูจน์ว่า $MQ = \frac{1}{2} (KP + NR)$

พิสูจน์ ถ้า PN ตัด MQ ที่จุด O

ใน $\triangle KPN$ โดยวิธีของข้อ 3 ได้ $MO = \frac{1}{2} KP$

ใน $\triangle PNR$ โดยวิธีของข้อ 3 ได้ $OQ = \frac{1}{2} NR$

$$\therefore MO + OQ = \frac{1}{2} KP + \frac{1}{2} NR$$

$$\therefore MQ = \frac{1}{2} (KP + NR)$$

11/170 โจทย์ ถ้าด้านคู่ขนานกัน ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
รูปหนึ่งยาว a และ b เซนติเมตร ตามลำดับ จงพิสูจน์
ว่าเส้นตรงที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านเอน (คือด้าน
ที่ไม่ขนานกัน) จะขนานกับด้านคู่ขนานกัน มีความยาว
 $= \frac{1}{2} (a + b)$ เซนติเมตร (H & S 11/65)

กำหนดให้ $KPRN$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู มี $KP = a$
 $NR = b$ และ M และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ
 KN, PR ตามลำดับ

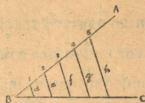
จะต้องพิสูจน์ว่า MQ ขนานและเท่ากับ $\frac{1}{2} (a + b)$

พิสูจน์ วิธีเดียวกับข้อ 10

12/170 โจทย์ AB กับ BC เป็นเส้นตรงต่อเนื่องกัน
ที่จุด B บน AB มีจุด 1, 2, 3, 4, 5 ซึ่งระยะทางห่าง

เท่า ๆ กัน ตากเส้นขนานจากจุดเหล่านี้ ไปยังเส้น AC
จึงวัดความยาวของเส้นขนานทุกเส้น แล้วเฉลี่ย (เอา 5
หาร) จะเห็นว่าส่วนเฉลี่ยที่ได้เท่ากับความยาวของเส้น
ที่ 3 ให้พิสูจน์ประกอบด้วย

ถ้าหวั่นการวัดและการคำนวณให้นักเรียนทำเอง
เพราะง่ายมาก จะขอแนะนำแต่ละเพราะวิธีพิสูจน์เท่านั้น



วิธีพิสูจน์ โดยวิธีพิสูจน์ในข้อ 10 เราได้ให้เส้น 1 ยาว d
เส้น 2 ยาว e เส้น 3 ยาว f เส้น 4 ยาว h

ตามข้อ 10 เราได้ $e + g = 2f$

$$\text{และ } e = \frac{1}{2}(d+f)$$

$$g = \frac{1}{2}(f+h)$$

$$e + g = \frac{1}{2}(d+f) + \frac{1}{2}(f+h)$$

$$= \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}h$$

$$= \frac{1}{2}d + f + \frac{1}{2}h \text{ แต่ } e + g = 2f$$

$$2f = \frac{1}{2}d + f + \frac{1}{2}h$$

$$\therefore f = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}g + \frac{1}{4}h$$

เอา $\frac{1}{4}f$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$f + \frac{1}{4}f = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}f + \frac{1}{4}g + \frac{1}{4}h$$

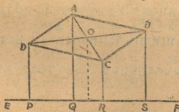
$$\frac{5}{4}f = \frac{1}{4}(d + e + f + g + h)$$

$$f = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}(d + e + f + g + h)$$

$$f = \frac{1}{5}(d + e + f + g + h) \text{ ข.ต.พ.}$$

13/171 โจทย์ จากมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้าลากเส้นตรงไปตัดฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งอยู่นอกรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้ จงพิสูจน์ว่าเส้นตัดฉากของมุมที่อยู่ตรงข้ามคู่หนึ่งรวมกันเข้า ย่อมเท่ากับผลบวกของเส้นตัดฉากของมุมที่อยู่ตรงข้ามอีกเส้นหนึ่ง

(H & S 13/171)



กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และให้ AQ, CR, BS และ DP ตั้งฉากกับ EF

จะต้องพิสูจน์ว่า $AQ + CR = BS + DP$

พิสูจน์ ถ้ากึ่งเส้นตรง AC กับ BD ตัดกันที่จุด O
 $\therefore O$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AC กับ BD

ถ้า OX ตั้งฉากกับ EF

โดยวิธีพิสูจน์ในข้อ ๑ เราจะได้

$$OX = \frac{1}{2} AQ + CR$$

$$\text{หรือ } OX = \frac{1}{2} BS + DP$$

$$\therefore AQ + CR = BS + DP \quad \text{จ.ต.พ.}$$

14/171 โจทย์ ผลบวกของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดหนึ่ง ซึ่ง
 อยู่บนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ไปยังด้านคู่เท่า
 กัน จะยาวเท่ากับเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดปลายฐานไป
 ยังด้านตรงข้าม (หมายความว่า ผลบวกของระยะ
 ทางจากจุดหนึ่งจุดใดบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 ไปยังด้านคู่เท่ากันจะมีค่าคงที่ (ย่อมเท่ากันเสมอ)
 ไม่ว่าจุดนั้นจะอยู่บนส่วนไหนของฐานของสามเหลี่ยม
 นั้น)

ถ้าจุด ๆ นั้น อยู่บนฐานที่ต่อออกไป ผลบวกของ
 ระยะทางจะเป็นอย่างไรบ้าง? (H & S 14/65)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว P เป็นจุดบน BC
 และให้ PH, PN ตั้งฉาก AB, AC และให้
 CO ตั้งฉากกับ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า $PM + PN = CO$

พิสูจน์ ถ้า P อยู่บน BC ถลาก $PR \parallel AB$ พบ CO ที่จุด R
 $\therefore CO \parallel PM$ และ $PR \parallel AB$
 ดังนั้น $\square PROM$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$$\therefore PM = OR \quad (\text{ท.บ. 21})$$

$$\therefore \angle RPC = \angle ABC \quad (\text{ท.บ. 14})$$

$$\text{และ } \angle ABC = \angle NCP \quad (\text{ท.บ. 5})$$

$$\therefore \angle RPC = \angle NCP$$

$$\therefore \angle PRC = \angle BOC \quad (\text{ท.บ. 14})$$

และ $\angle BOC = \angle PNC$ เพราะต่างเป็นมุมฉาก

$$\therefore \angle PRC = \angle PNC$$

ใน $\triangle PRC$ กับ $\triangle PNC$

$$\therefore \begin{cases} \angle RPC = \angle NCP \\ \angle PRC = \angle PNC \\ PC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \Delta$ ทั้งสองเท่ากันทุกประการ

$$\therefore RC = PN$$

$$\text{ดังนั้น } PM + PN = OR + RC$$

$$= OC \quad \text{ช. ต. พ.}$$

พิสูจน์

ลาก $PR \parallel AB$ ที่ตัดออกไปที่จุด R

$\therefore \square RPMO$ เป็น $\square$ ผืนผ้า

$$\therefore PM = OR$$

$$\therefore \angle OBC = \angle CPR \quad (\text{ท.ป. 14})$$

$$\therefore \angle ACB = \angle PCN \quad (\text{ท.ป. 3})$$

$$\therefore \angle PCN = \angle OBC = \angle CPR$$

ใน $\triangle ARC$ กับ $\triangle PNC$

$$\therefore \begin{cases} \angle CPR = \angle PCN \\ \angle PRO = \angle CNP \text{ (เพราะต่างเป็นมุมฉาก)} \\ PC \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

Δ ทั้งสองเท่ากัน (โดยท.ป. 17)

$$\therefore CR = PN$$

$$\text{ดังนั้น } PM - PN = OR - CR$$

$\therefore$ ผลลบของเส้นตั้งฉาก ที่ลากจากจุดหนึ่ง

บนฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ ต่อออก
ไปยังด้านคู่เท่า ย่อมเท่ากับ เส้นตั้งฉาก
ที่ลากจากจุดมุมที่ฐานจุดหนึ่ง ไปยังด้าน
ตรงข้าม ช. ต. พ.

15/172 โจทย์ ผลบวกของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด ๆ หนึ่ง
ซึ่งอยู่ภายใน รูปสามเหลี่ยม ด้านเท่า ไปยังด้านทั้งสาม
ของรูปสามเหลี่ยม จะเท่ากับ ความยาวของเส้นตั้งฉาก
ที่ลากจากมุมใดมุมหนึ่งไปยังด้านตรงข้ามและมีค่าคงที่
(คือยาวคงเดิม) H & S 15/65

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า O เป็นจุดภายใน
 OX, OY และ OZ ลากตั้งฉากกับ AC, BC
และ AB ตามลำดับ AD ตั้งฉากกับ BC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX + OY + OZ = AD$

พิสูจน์ ลาก EF ให้ผ่าน O และขนานกับ BC

จาก A ลาก $AH \perp EF$ ตั้งฉากกับ EF และ BC

,, F ,, FG ,, ,, AE

$\therefore EF \parallel BC$ (สร้าง)

$$\therefore \overset{\Delta}{AEF} = \overset{\Delta}{B} \text{ และ } \overset{\Delta}{AFE} = \overset{\Delta}{C} \text{ (ท.ป.14)}$$

$\therefore \triangle AEF$ และ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุม
มุมทั้งสามเท่ากัน

$\therefore \triangle AEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมเท่า

$$\therefore OX + OZ = FG \quad (\text{ข้อ 14})$$

$$= AH \quad (\because FG=AH)$$

$$\therefore \overset{\Delta}{OYD} + \overset{\Delta}{ODY} = 2\angle D \quad (\text{โจทย์})$$

$$\therefore OY \parallel HD$$

$\therefore OHDY$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\therefore OY = YD \quad (\text{ท.ป. 21})$$

$$\therefore OX + OY + OZ = AH + OY$$

$$= AH + HD = AD \quad \text{ซ.ต.พ.}$$

16/172 โจทย์ เส้นตรงที่ยาวเท่ากันและขนานกันย่อมมีโปร
เจกชัน บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งยาวเท่ากัน

(H & S 16/65)

กำหนดให้ AB กับ CD เป็นเส้นขนานคู่หนึ่งเท่ากัน

XY เป็นโปรเจกชันของ AB บน PQ

และ RS เป็นโปรเจกชันของ CD บน PQ

(ดูคำอธิบายเรื่องโปรเจกชัน)

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = RS$

พิสูจน์

ลาก AC และ BD

$\therefore AB$ เท่าและขนานกับ CD (โจทย์)

$\therefore AC = BD$ และขนานกัน (ท.บ.20)

$\therefore \square ABCD$ เป็น $\square$ ด้านขนาน

ลากเส้นทแยงมุม AD และ BC ตัดกันที่จุด O

$\therefore AO = OD$ และ $CO = OB$

(โดยบทแทรก ท.บ.21)

$\therefore$ เส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับเส้นตรงเดียวกัน
ก็ขนานกัน

$\therefore AX, OM$ และ DS ขนานกัน

เส้นตรงที่ตัด AD ออกเป็นสองส่วน $AO = OD$

$\therefore XM = MS$ (โดย ท.บ. 22)

และ CR, OM กับ BY ขนานกัน

และเพราะว่า OM ตัด CB ออกเป็นสองส่วน $CO = OB$

$\therefore RM = MY$ (โดย ท.บ. 22)

ดังนั้น $XM + MY = MS + MY$

$\therefore XY = RS$

ช.ต.พ.

แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการวัดเส้นตรง

จ. - ร. หน้า 177

1/177 โจทย์ จงลากเส้นตรงยาว 1.25 นิ้ว 2.72 นิ้ว และ
3.08 นิ้ว (H & S 1/68)

วิธีเขียนใช้มาตราส่วนนี้ ดูหน้า 174 ในหนังสือ
พระวรพากย์พจนานุกรม

2/177 โจทย์ จงลากเส้นตรงยาว 2.68 นิ้ว แล้ววัดความ
ยาวของเส้นตรงนั้นว่า ยาวกี่เซ็นต์ติเมตร และคิดให้ใกล้
มิลลิเมตรที่สุด (H & S 2/68)

วิธีทำ ทำแบบเดียวกันกับข้อ 1.

3/177 โจทย์ ดากเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว 5.7 ซม. แล้ววัด
ว่ายาวกี่นิ้ว (ทศนิยมสองตำแหน่ง) จงตอบผลที่ได้
ด้วยวิธีคำนวณ กำหนดให้ 1 ซม. = 0.3934 นิ้ว

(H & S 3/68)

คำเฉลย ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ลากเส้นตรงยาว 5.7 ซม.
ใช้วงเวียน ทางระหว่าง จุดปลาย ของ เส้นตรง
และนำมาวัดลงบนมาตราส่วนนี้จะได้อาว 2.24

โดยวิธีคำนวณ $1 \text{ ซม.} = 0.3937''$

$$\therefore 5.7 \text{ ,,} = 0.3937'' \times 5.7'' \\ = 2.244''$$

4/177 โจทย์ จงหาโดยการวัดว่า 3.15 นิ้ว จะยาวกี่เซ็นติเมตร และจงคำนวณดูว่า 1 ซม. จะเป็นทศนิยมเท่าใดของ 1 นิ้ว (ทศนิยมต้องตำแหน่ง) (H & S 4/68)

คำตอบ ถ้าวัดดูตามวิธี "มาตราส่วนเย้" จะได้

$$3.15'' = 8.0 \text{ ซม.}$$

$$\therefore 1 \text{ ซม.} = 3.15'' \div 8$$

$$= 0.39'' \text{ (กดทศนิยมต้องตำแหน่ง)}$$

5/177 โจทย์ ดาถเส้นตรงสองเส้นให้ยาว 2.9 ซม. และ

6.2 ซม. ตามลำดับ แล้ววัดว่ายาวกี่นิ้ว จงหาผลหาค่า

ได้นี้ คำนวณว่า นิ้วหนึ่งมีกี่เซ็นติเมตร กับกี่มิลลิเมตร

และหารายเฉลี่ยของผลพิพาทวัดได้ (H & S 5/68)

คำตอบ ถ้าวัดดูจะได้ $2.9 \text{ ซม.} = 1.14''$

$$\therefore 1'' = 2.9 \div 1.14 = 2.543 \text{ ซม.}$$

ถ้าวัดดูจะได้ $6.2 \text{ ซม.} = 2.44''$

$$\therefore 1'' = 6.2 \div 2.44 = 2.541 \text{ ซม.}$$

∴ ถ้าคิดรายเฉียดของความยาว 1" ทัดได้
ต้องกว้างบนจะได้ความยาว 1' มีค่าอยู่
ระหว่าง 2.543 และ 2.541

∴ ถ้าคิดทศนิยมต้องตำแหน่งจะได้ 1" = 2.54 ซม.
6/178 โจทย์ ในแผนที่ฉบับหนึ่ง ใช้มาตราส่วน 1 นิ้ว ต่อ
100 ไมล์ จงลากเส้นตรงแทนระยะทาง 336 ไมล์ และ
408 ไมล์ (H & S 6/68)

คำตอบ ∴ ระยะทางจริง 100 ไมล์ในมาตรา ส่วนเขียน
แทนด้วยความยาว 1 นิ้ว

∴ ระยะทางจริง 336 ไมล์ในมาตราส่วนเขียน
แทนด้วยความยาว 3.36 นิ้ว

และเช่นเดียวกันระยะทาง 408 ไมล์ ในมาตรา
ส่วนเขียนแทนด้วยความยาว 4.08 นิ้ว

วิธีเขียนเส้นตรงยาว 3.36" และ 4.08" นั้น ใช้
มาตราส่วนเย็เหมือนที่แถว ๆ มา

7/178 โจทย์ ถ้าระยะ 1 นิ้วในแผนที่แทน 100 ก.ม. จงเขียน
เส้นตรงแทนระยะทาง 850 เมตร 2980 เมตร และ
1010 เมตร (H & S 7/68)

ค่าเฉลี่ย $\therefore 1'' = 100 \text{ ก.ม. หรือ } 10000 \text{ ม.}$
 $\therefore$ เส้นตรงที่เขียนต้องยาว $0.85'', 2.98'', 1.01''$

ต่อไปใช้มาตราส่วนเขียนเส้นตรงเหล่านี้

8/178 โจทย์ แผนผังอันหนึ่ง เขียนใช้มาตราส่วน $1''$ แทน
 100 วา ถ้าระยะทาง 417 วา จะต้องเขียนเส้นตรงยาว
 กี่ ซ.ม. และกี่ ม.ม. แทน (H & S 8/68)

ค่าเฉลี่ย $\therefore 100 \text{ วา} = 1''$
 $\therefore 417 \text{ ,,} = 4.17''$
 ถ้าวัดได้ $4.17''$ ยาวเท่ากับ 10.6 ซ.ม.

9/178 โจทย์ แผนผังอันหนึ่งใช้มาตราส่วน 1 ซ.ม. แทน
 5 ก.ม. จงหาว่าระยะทาง 42.5 ก.ม. จะต้องเขียน
 แทนด้วยเส้นตรงยาวกี่ม. (H & S 9/68)

ค่าเฉลี่ย $\therefore 5 \text{ ก.ม. เท่ากับความยาวในมาตราส่วน}$
 1 ซ.ม.

$\therefore 42.5 \text{ ก.ม. ,, ,, } 8.5 \text{ ซ.ม.}$
 และถ้าวัดตามวิธีมาตราส่วนนี้จะได้

$8.5 \text{ ซ.ม. ยาวเท่ากับ } 3.35''$

10/178 โจทย์ ระยะทางจากกรุง لندن จนถึงเมืองออกส์-
 ฟোর্ด ถ้าวัดระยะทางตรงแล้วได้ไกล 55 ไมล์ และใน

แผนที่วัดได้ 2.75 ไมล์ จงหาว่าแผนที่ใช้มาตราส่วนเท่าไร? คือ 1" แทนกิโลเมตร 1 ซม. แทนกิโลเมตร?
 (1 ซม. = 0.3937 ไมล์ 1 ก.ม. = $\frac{5}{8}$ ไมล์)

(H & S 10/68)

ถ้าเฉลี่ย $\therefore 2.75''$ แทนความยาวจริง 55 ไมล์
 $\therefore 1''$,, ,, $\frac{55}{2.75}$,,
 $= 20$ ไมล์ (โดยประมาณ)

$\therefore 1$ ซม. หรือ 0.3937 แทนความยาวจริง
 (20×0.3937) ไมล์
 $= 20 \times 0.3937 \times \frac{8}{5}$ ก.ม.
 ($20 \times 0.3937 \times \frac{8}{5} = 12.6$,, (คิดค่าใกล้เคียง)

11/179 โจทย์ แผนที่ฝรั่งใช้มาตราส่วน 1" ต่อ 35 ไมล์
 ถ้าในแผนที่ระยะทางจากกรุงปารีสถึงเมืองกาเดซ ยาว 4.2 ไมล์ จงหาระยะทางจริงว่าห่างกันกี่ไมล์? และหาด้วยว่าห่างกันกี่ ก.ม. โดยใกล้เคียง ให้บอกมาตราส่วนเป็นมาตราเมตริกด้วย (1 ก.ม. = $\frac{5}{8}$ ไมล์)

(H & S 11/68)

$$\begin{aligned}
 \text{ค่าเฉลี่ย} & \cdot 1'' \text{ แทนความยาวจริง} & 35 & \text{ไมล์} \\
 & \cdot 4.2 & (35 \times 4.2) & \\
 & & = 147 & \\
 & \cdot \frac{5}{8} \text{ ไมล์} & = 1 & \text{ก.ม.} \\
 & \cdot 147 & = 147 \times \frac{8}{5} & \\
 & & = 235 &
 \end{aligned}$$

วิธีแก้ความยาวจริงเป็นมาตราเมอริค

$$\begin{aligned}
 (1 \text{ ช.ม.} & = 1 \text{ ก.ม.}) \text{ ให้ทำดังนี้คือ} \\
 \text{ระยะ } 4.2'' & \text{ ถ้าวัดเป็น ช.ม. จะได้ } 10.7 \text{ ช.ม.} \\
 \cdot 10.7 \text{ ช.ม.} & \text{ คือความยาวจริง} & 235 & , \\
 \cdot 1 & , & \frac{235}{10.7} & \\
 & & = 22 & ,
 \end{aligned}$$

12/179 โจทย์ ระยะทางจากเมืองเซกซ์เคอร์ไปยังเมืองพลัมช
ยาว $37\frac{1}{2}$ ไมล์ ถ้าดูในแผนที่ฉบับหนึ่ง จะยาว $2\frac{1}{2}$ ไมล์
และ ระยะทางจริง จากเมืองดินคอตน์ ไปยัง เมืองยอร์ก
88 ก.ม. แต่ดูในแผนที่ปรากฏว่าห่างกัน 7 ช.ม. จึง
เปรียบเทียบมาตรวจดูของแผนที่ 2 แผ่นดูว่า หนึ่ง
ใช้แทนกี่ไมล์ (H & S 12/68)

ค่าเฉลี่ย ในแผนที่แผ่นแรก $2\frac{1}{2}''$ แทนความยาวจริง $37\frac{1}{2}$ ไมล์
 " " $1''$ " " $(37\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2})$,,
 = 15 " ,,

ในแผนที่แผ่นที่ 2, 7 ซม. แทนความยาวจริง

88 ก.ม.

∴ " " (7×0.3937) " " $(88 \times \frac{5}{8})$ ไมล์
 " " $1''$ " " $\frac{55}{2.7559}$;,
 = 20 ไมล์

∴ มาตราส่วนที่ใช้ในแผนที่ 1 และที่ 2

$1'' = 15$ และ 20 ไมล์ ตามลำดับ

13/179 โจทย์ จงสร้างมาตราส่วนเย้าใช้ ๒ ซม. แทน 1 หด
 กันให้รูปนั้นใช้อ่านจำนวนฟุตและนิ้วได้ด้วย

(H & S 13/68)

ค่าเฉลี่ย ถากเส้นระดับ OX และแบ่งออกเป็น 4 ช่อง ๆ หนึ่ง

ยาว 2 ซม.

ให้ช่องหนึ่ง ๆ ที่ยาว ๒ ซม. แทนความยาว 1 หด
 ที่ 0 ถาก OY ให้ตั้งฉากกับ OX ให้ยาวพอควร

แบ่ง OY และ OZ ออกเป็น 12 ส่วน และ 3 ส่วน
ตามลำดับ (บ.ด. 7)

จากจุดแบ่งลากเส้นขนานกันไป
แล้วรูปที่เกิดขึ้นจะเป็นมาตราส่วนแยกของการ
มาตราส่วนข้างบนให้อ่านได้ถึงฟุตและนิ้ว เช่น
ระยะทางระหว่างจุด A และ B บนมาตราส่วนนี้
2 ฟุต 1 นิ้ว 8

แบบฝึกหัดวาดด้วยเส้นและมุม

ว - ร. 157 หน้า 206 H & S หน้า 79

(แบบฝึกหัดสำหรับสร้าง)

ข้อสังเกต แบบฝึกหัดเหล่านี้นี้เกี่ยวกับการสร้างรูป จะขอให้
แต่ละข้อคำแนะนำเท่านั้น สำหรับการสร้างรูป
นั้นจะทิ้งไว้ให้นักเรียนสร้างรูปเอาเอง โดยอาศัย
พิจารณาจากคำแนะนำที่ให้ต่อไปนี้

คำแนะนำในการสร้าง

ข้อ 1 สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC (วิธีสร้างครั้งแรก
ลาก BC ให้ยาวพอควร แล้วเอา B และ C เป็น
จุดศูนย์กลางวงรีศึ้เท่ากับ BC เขียนส่วนโค้งตัดกัน
ที่ A แล้ว ABC จะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า)

$\therefore \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่มีด้าน $AB = AC$

$\therefore \angle B = \angle C$ (ท.ป. 5)

เช่นเดียวกัน $\therefore AB = BC$

$\therefore \angle A = \angle C$ (ท.ป. 5)

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C$

ดังนั้นทั้งสามมุมกัน $= 180^\circ$

มุมหนึ่ง ๆ ทาง 60

แบ่ง $\triangle ABC$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน (บ.ต.1)

แบ่งครึ่งมุมเล็ก ๆ ออก (,)

ข้อ 2 วิธีแบ่งมุมฉากให้ทำดังนี้ คือ

ให้ ABC เป็นมุมฉาก

บน BC สร้าง $\triangle$ ด้านเท่า DBC

$\therefore \angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

แบ่งครึ่ง $\angle DBC$ ด้วยเส้นตรง BE

$\therefore \angle DBE = \angle CBE = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\therefore BD, BE$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมฉากที่ต้องการ

วิธีแบ่ง 45° ให้ทำดังนี้ คือ

ให้ PQR เป็นมุม 45°

ลาก QS ทำมุม 60° กับ QR

แบ่งครึ่ง $\angle SQR$ ด้วยเส้น QX (บ.ต.1)

แบ่งครึ่ง $\angle XQR$,, QY (บ.ต.1)

แล้ว QX, QY จะแบ่ง $\angle PQR$ ออกเป็นสามส่วน

เท่า ๆ กันตามต้องการ

ข้อ 3 แบ่งเส้นตรงยาว 6.7 ซม. ออกเป็น 5 ส่วน ตาม

บทสร้างที่ 7

$$\begin{aligned}
 &\text{ถ้าคำนวณดูจะได้ส่วนหนึ่งๆยาว} \quad \frac{6.7}{5} \text{ ซม.} \\
 &= \frac{1}{5} \times 6.7 \times 0.3937 \text{ นิ้ว} \\
 &= 0.53''
 \end{aligned}$$

ข้อ 4 ใช้บทสร้างที่ 7 แบ่งเส้นตรงยาว 3.72'' ออก
เป็น 7 ส่วนเท่าๆกัน

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ถ้าคำนวณดูจะได้ส่วนหนึ่งยาว} \quad &\frac{3.72}{7} \text{ นิ้ว} \\
 &= \frac{3.72}{7 \times 0.3937} \text{ ซม.} \\
 &= 1.349''
 \end{aligned}$$

ข้อ 5 ใช้บทสร้างที่ 3 ตาก XP ให้ตั้งฉากกับ AB ที่ X
ทำ XP = 1.8''

เอา P เป็นจุดศูนย์กลางวงรัศมี 3.0'' เขียนส่วนโค้ง
ตัด AB ที่ Q

แล้ว PQ จะเป็นเส้นเส้นขนานยาว 3.0''

ให้นักเรียนสร้างรูปและวัดระยะ XQ ดูเอง

ข้อ 6 ให้ A และ B เป็นจุดสองจุด XY เป็นเส้นตรง

จะต้องหา จุดบน XY ให้ห่างจาก A และ B เท่ากัน

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ C (บ.ส. 2)

จาก C ตาก CD ตั้งฉาก AB ไปตัด XY ที่ D

แล้ว D ๑ เป็นจุดบน XY ที่ระยะทางจาก A
และ B เท่า ๆ กัน

วิธีพิสูจน์ ถ้า DA, DB เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\triangle ACD = \triangle BCD \quad (\text{ท.บ.4})$$

$$\therefore DA = DB$$

ข้อสังเกต ถ้า AB ตั้งฉากกับ XY

CD จะขนานกับ XY และไม่ตัด XY เลย

$\therefore$ จึงหา D หรือสร้างรูปไม่ได้

ข้อ 7 ให้ AB, AC เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกัน
XY เป็นเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง

จะต้องการหา D บน XY ซึ่งห่างจาก AB, AC เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง ถ้า AD ให้แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ (บ.๑.1)

ให้ AD ตัด XY ที่ D แล้ว D จะเป็นจุดที่ต้องการ

วิธีพิสูจน์ จาก D ถ้า DP, DQ ให้ตั้งฉากกับ AB, AC

อาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle ADP = \triangle ADQ$ (ท.บ.17)

$$\therefore DP = DQ$$

$\therefore$ D เป็นจุดบน XY ที่ห่างจาก AB, AC เท่า ๆ กัน

ข้อสังเกต ถ้า AD // XY จะสร้างรูปไม่ได้

ข้อ 8 ให้ R เป็นมุม ๆ หนึ่ง P เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AB

จะต้องการสร้าง PQ ให้ตัด AB และทำมุมกับ AB เท่ากับ $\hat{R}$

วิธีสร้าง ให้ C เป็นจุดบน AB ทำมุม $\hat{BCD} = \hat{R}$

จาก P ตาก PQ // AB ตัด AB ที่ Q (ม.๕.6)

แล้ว $\hat{PQB}$ จะเป็นมุมที่ตรงกัน

พิสูจน์ $\therefore PQ // CD$ มี AB ตากตัด

$$\therefore \hat{PQB} = \hat{DCB} = R$$

ข้อ 9 วิธีสร้างปรากฏอยู่ที่ข้อ 9 แล้ว

ข้อ 10 ให้ P, A, B เป็นจุดสามจุด

จะต้องการ ตากเส้นตรงให้ผ่าน P โดยให้เส้นตั้งฉากที่

ตากลาก A และ B มายัง CD ยาวเท่ากัน

วิธีสร้าง ตาก AB

ตากลาก CD ให้ผ่าน P ขนานกับ AB

แล้ว CD จะเป็นเส้นตรงที่ตรงกัน

พิสูจน์ จาก A และ B ตาก AQ, BR ให้ตั้งฉากกับ CD

$$\therefore \hat{AQP} = \hat{BRP} = 2\text{L}$$

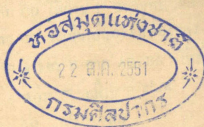
$$\therefore AQ // BR \quad (\text{ท.ป.12})$$

$$\therefore ABRQ \text{ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า}$$

$$\therefore AQ = BR \quad (\text{ท.ป. 13})$$

ข้อสังเกต ถ้า P, A, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะสร้างรูปไม่ได้

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ศึกษานุกูล
๓๓๒.๔ ถนนบำรุงเมือง พระนคร
ถันฟอง อ. สกุล ผู้พิมพ์โฆษณา ๒๔๙๑





คุณพ่อ! หนสอได้ทีดี
เพราะใช้แบบเรียนของ
ประชาข้าง
เข่นนนเทียวหรือ?
ดีมาก

ประชาข้าง