คู่มือเรขาคณิต

ภาคหนึ่ง

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ ๔ – ๖

และเป็นคู่มือของครู

ซึ่งทรงธรรมการอนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

ของ

นายฤหลาบ ประภาสะโนบล ป.ม. เนติบัณฑิต

ประกาศนียบัตรนิติศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ว่าความจังหวัดกาฬสินธุ์

เคยเป็นครูใหญ่โรงเรียนประจำจังหวัดชัยภูมิ และครูใหญ่

โรงเรียนประจำจังหวัดลำพูน "จักรคำคณาทร"

พิมพ์ครั้งแรก ๑๐๐๐ ฉะบับ

พ.ศ. ๒๔๗๔

ราคาเล่มละ ๗๐ สตางค์

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์ศรีหงส์ มุมถนนอุณากรรณ พระนคร

516
ก๗๔๑ค

ลิขสิทธิ์สงวน

ห้องสมุดแห่งชาติ
8 มี.ค. 2546
กรมศิลปากร

คู่มือเรขาคณิต

ภาคหนึ่ง

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ ๔ – ๖

และเป็นคู่มือของครู

กระทรวงธรรมการอนุญาตให้ใช้ในโรงเรียนได้

ของ

นายกุหลาบ ประภาสะโนบล ป.ม. เนติบัณฑิต

ประกาศนียบัตรนิติศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จ่าศาลจังหวัดกาฬสินธุ์

เคยเป็นครูใหญ่โรงเรียนประจำจังหวัดชัยภูมิ และครูใหญ่

โรงเรียนประจำจังหวัดลำพูน "จักรคำคณาทร"

พิมพ์ครั้งแรก ๑๐๐๐ ฉะบับ

พ.ศ. ๒๔๗๙

ราคาเล่มละ ๗๐ สตางค์

พิมพ์จำหน่ายที่โรงพิมพ์ศรีหงส์ มุมถนนอุณากรรณ พระนคร

ลิขสิทธิ์สงวน

บัญชีเรื่อง

แบบผูกหัดที่	๑	หน้า	๑
,, ,,	๒	,,	๔
,, ,,	๓	,,	๑๑
,, ,,	๔	,,	๑๕
,, ,,	๕	,,	๑๙
,, ,,	๖	,,	๒๗
,, ,,	๗	,,	๓๒
,, ,,	๘	,,	๔๒
,, ,,	๙	,,	๕๓
,, ,,	๑๐	,,	๖๘
,, ,,	๑๑	,,	๗๘
,, ,,	๑๒	,,	๘๑
,, ,,	๑๓	,,	๘๓
,, ,,	๑๔	,,	๑๐๕
,, ,,	๑๕	,,	๑๒๑
,, ,,	๑๖	,,	๑๒๖
,, ,,	๑๗	,,	๑๓๔
,, ,,	๑๘	,,	๑๔๘
,, ,,	๑๙	,,	๑๕๔
,, ,,	๒๐	,,	๑๗๒

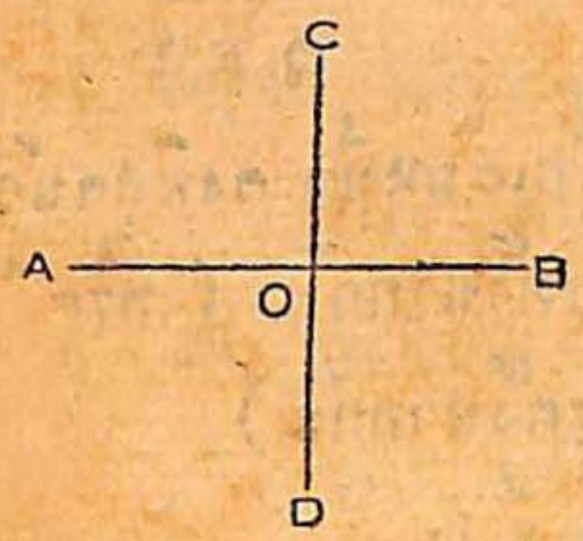
ประชุมเรื่องสร้างสรรค์

แบบฝึกหัดที่ ๑

เมื่อเรียนทฤษฎีบทที่ ๑–๒ แล้ว

๑ . ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันทำให้มุมเกิดขึ้นสี่มุม ถ้ามุมหนึ่งในจำพวกนี้เป็นมุมฉากแล้ว จงพิสูจน์ว่า มุมอื่นอีก ๓ มุมต่างก็เป็นมุมฉากด้วย

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O.



และให้ $A\hat{O}D$ เป็นมุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ ∴ $A\hat{O}D$ เป็นมุมฉาก

∴ $A\hat{O}C$ ซึ่งเป็นมุมประชิดก็เป็นมุมฉากด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑)

และ $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ ต่างก็เป็นมุมประชิดของ $A\hat{O}C$, $A\hat{O}D$

∴ $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ ต่างก็เป็นมุมฉากด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑)

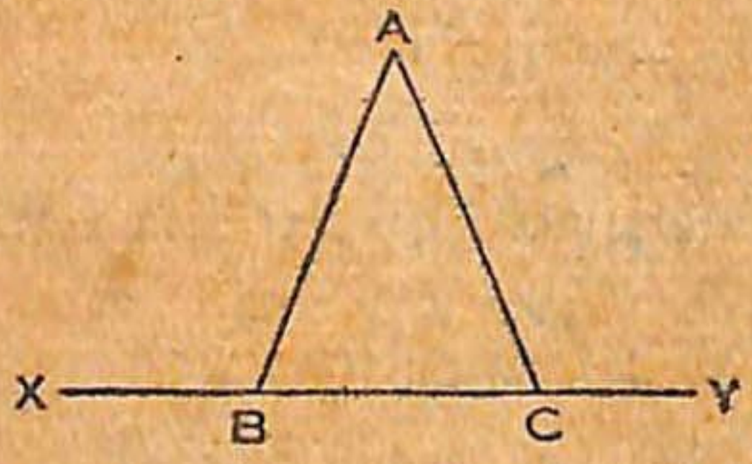
Q. E. D.

๒. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ ถ้าต่อด้าน BC ตรงออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่เกิดขึ้นนั้นเท่ากัน.

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง, ซึ่งมี $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

และต่อ BC ตรงไปทั้งสองข้างถึงจุด X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}X = A\hat{C}Y$

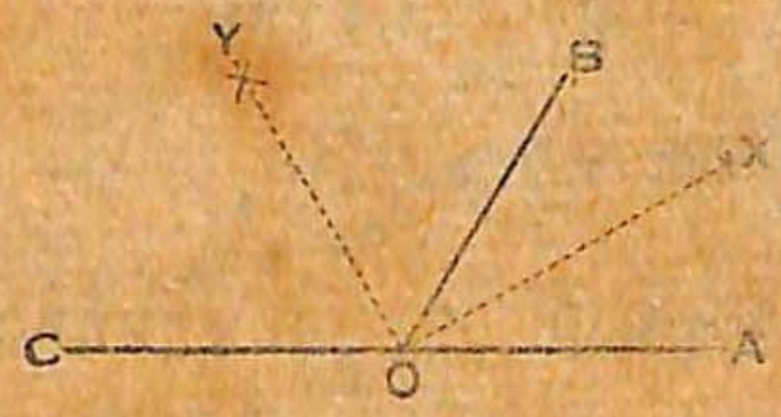


พิสูจน์ $\therefore$ $A\hat{B}X$ เป็นมุมประกอบ
สองมุมฉากของ $A\hat{B}C$
และ $A\hat{C}Y$ เป็นมุมประกอบสองมุม
ฉากของ $A\hat{C}B$
แต่ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (โดยโจทย์)
$\therefore A\hat{B}X = A\hat{C}Y$

Q.E.D.

๓. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสองเส้นซึ่งแบ่งครึ่งมุมประชิดทั้งสองจะตั้งฉากกัน (หรืออีกนัยหนึ่ง เส้นแบ่งครึ่งภายในและภายนอกจะตั้งฉากกัน)

กำหนดให้ BO ตั้งอยู่บนเส้นตรง AC ที่ O.



OX, OY เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมประชิด $A\hat{O}B$ กับ $B\hat{O}C$
จะต้องพิสูจน์ว่า OX กับ OY ตั้งได้ฉากกันที่จุด O.

พิสูจน์ $\therefore B\hat{O}X = \frac{1}{2} B\hat{O}A$

และ $B\hat{O}Y = \frac{1}{2} B\hat{O}C$

$\therefore B\hat{O}X + B\hat{O}Y = \frac{1}{2}(B\hat{O}A + B\hat{O}C)$

$\therefore X\hat{O}Y = \frac{1}{2}$ ของสองมุมฉาก

= หนึ่งมุมฉาก

นั่นคือ XO กับ YO ตั้งได้ฉากกันที่จุด O.

หรือถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก $B\hat{O}A$

และ OY ,, ,, ภายใน $B\hat{O}C$

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกและภายในนั้นจะตั้งได้ฉากกัน

Q. E. D

๔. จงพิสูจน์ว่า $A\hat{O}X$ และ $B\hat{O}Y$ ในรูปข้อ ๓. เป็นมุมประกอบมุมฉากซึ่งกันและกัน (ดูรูปข้อ ๓.)

พิสูจน์ $X\hat{O}Y$ เป็นมุมฉาก (พิสูจน์แล้วในข้อ ๓.)

$\therefore$ $B\hat{O}X$ กับ $B\hat{O}Y$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกัน.

แต่ $B\hat{O}X = A\hat{O}X$ และ $B\hat{O}Y = C\hat{O}Y$

$\therefore$ $A\hat{O}X$, $C\hat{O}Y$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉาก

Q. E. D

๕. ในรูปข้อ ๓. จงพิสูจน์ว่า $B\hat{O}X$ และ $C\hat{O}X$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน และพิสูจน์ว่า $A\hat{O}Y$, $B\hat{O}Y$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

พิสูจน์ $\therefore$ $C\hat{O}X$ และ $X\hat{O}A$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

แต่ $X\hat{O}A = B\hat{O}X$

$\therefore$ $C\hat{O}X$ กับ $B\hat{O}X$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

และ $A\hat{O}Y$ กับ $C\hat{O}Y$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

แต่ $C\hat{O}Y = B\hat{O}Y$

$\therefore$ $A\hat{O}Y$ กับ $B\hat{O}Y$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากด้วย

Q. E. D.

๖. ถ้า $A\hat{O}B = ๓๕^\circ$ จงหาว่า $C\hat{O}Y$ กางเท่าไร (ดูรูปข้อ ๓)

$A\hat{O}B + B\hat{O}C = ๒$ ฉาก

$= ๑๘๐^\circ$

และ $A\hat{O}B = ๓๕^\circ$

$\therefore B\hat{O}C = ๑๘๐^\circ - ๓๕^\circ$

$= ๑๔๕^\circ$

แต่ $C\hat{O}Y = \frac{๑}{๓} B\hat{O}C$

$\therefore C\hat{O}Y = \frac{๑}{๓}$ ของ ๑๔๕°

$= ๗๒\frac{๑}{๒}$ ตอบ

แบบฝึกหัดที่ ๒๓

เมื่อเรียนทฤษฎีบทที่ ๓ แล้ว

๑. เข็มยาวของนาฬิกาเรือนหนึ่งจะหมุนไปกี่องศา ถ้าเดินไปได้ (ก) ๕ นาที (ข) ๒๑ นาที (ค) ๔๓$\frac{๑}{๒}$ นาที (ง) ๑๖ นาทีกับ ๑๐ วินาที และเข็มยาวจะใช้เวลานานเท่าไรจึงจะหมุนไป (จ) ๖๖°, (ฉ) ๒๒๒°.

เวลา ๑ ชั่วโมง เข็มยาวหมุนได้ ๓๖๐°

,, ๖๐ นาที ,, ,, ๓๖๐°

(ก) ๕ ,, ,, ,, $\frac{๓๖๐^\circ}{๖๐} \times ๕ = ๓๐^\circ$

(ข) ๒๑ ,, ,, ,, $\frac{๓๖๐^\circ}{๖๐} \times ๒๑ = ๑๒๖^\circ$

(ค) ๔๓ $\frac{๑}{๒}$ นาฑิ เข็มยาวหมุนได้ ๖×๔๓ $\frac{๑}{๒}$ = ๒๖๐

(ง) ๑๖ $\frac{๑}{๖๐}$,, ,, ,, ๖×๑๖ $\frac{๑}{๖๐}$ = ๙๗

และ ๖๐ หมุนนาน ๑ นาฑิ

(จ) ๖๖๐ ,, ,, $\frac{๖๖}{๖}$ ×๑ = ๑๑ ,,

(ฉ) ๒๒๒๐ ,, ,, $\frac{๒๒๒}{๖}$ ×๑ = ๓๗ ,,

๒. นาฬิกาเรือนหนึ่งเริ่มเดินเมื่อเที่ยง ถามว่าเข็มสั้นจะเดินไปได้กี่องศา ถ้านาฬิกานั้นเดินไปได้ (๑) ๓ ชั่วโมงกับ ๔๕ นาฑิ (๒) ๕ ชั่วโมงกับ ๑๐ นาฑิ และถ้าเข็มสั้นเดินไปได้ ๑๗๒ $\frac{๑}{๒}$° จะเป็นเวลานานเท่าไร.

ใน ๑๒ ชั่วโมง เข็มชั่วโมงหมุนได้ ๓๖๐

,, ๑ ,, ,, ,, ๓๐°

(๑) ๓ $\frac{๓}{๔}$,, ,, ,, ๓๐×๓ $\frac{๓}{๔}$ = ๑๑๒ $\frac{๑}{๒}$°

(๒) ๕ $\frac{๑}{๖}$,, ,, ,, ๓๐×๕ $\frac{๑}{๖}$ = ๑๕๕°

และ(๓) ถ้าเข็มสั้นหมุนได้ ๑๗๒ $\frac{๑}{๒}$° เวลานาน $\frac{๑๗๒\frac{๑}{๒}}{๓๐} = \frac{๓๔๕}{๖๐} = ๕\frac{๓}{๔}$ ชม.

หรือ ๕ ชั่วโมง ๔๕ นาฑิ

๓. โลกหมุนรอบตัวเองหนึ่งรอบกินเวลา ๒๔ ชั่วโมง ถามว่าถ้าหมุนนาน ๓ ชั่วโมง ๒๐ นาฑิจะได้มุมกี่องศา และถ้าหมุนได้ ๑๓๐° จะกินเวลานานเท่าไร ?

โลกหมุน ๑ รอบ คือ ๓๖๐° ในเวลา ๒๔ ชม.

หรือในเวลา ๑ ชม. หมุนได้ ๑๕°

(ก) ∴ ,, $๓\frac{๑}{๓}$ ชม. ,, $๑๕° \times ๓\frac{๑}{๓} = ๕๐°$

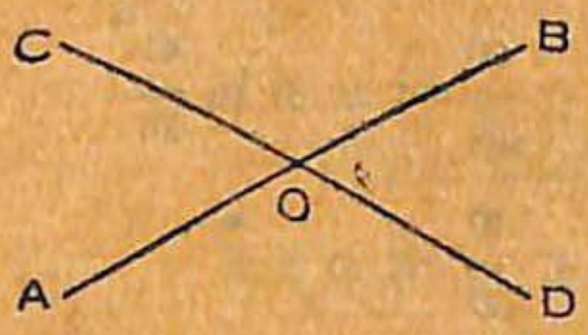
และ (ข) หมุน ๑๓๐° กินเวลานาน $\frac{๑๓๐}{๑๕} = ๘$ ชม. ๔๐ น.ฑ.

๔. ในรูปทฤษฎีบทที่ ๓

(ก) ถ้า $A\hat{O}C = ๓๕°$ จงหาว่า $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$, $D\hat{O}A$ กางมุมละเท่าไร ? (โดยไม่ต้องวัด)

(ข) ถ้า $C\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ รวมกันได้ ๒๕๐° จงหาว่า $C\hat{O}A$, $B\hat{O}D$ กางมุมละเท่าไร ?

(ค) ถ้า $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ รวมกันได้ ๒๗๔° จงหาว่า มุมทั้ง ๔ ที่จุด O กางมุมละเท่าไร ?



(ก) ถ้า $A\hat{O}C = ๓๕°$

∴ $B\hat{O}C = ๑๘๐° - ๓๕° = ๑๔๕°$ ๔๕° ๐

(เพราะเป็นมุมประกอบสองมุม ๔๔๕

ฉากกับ $A\hat{O}C$)

$B\hat{O}D = ๓๕°$ เพราะเท่ากับ $A\hat{O}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๓)

$D\hat{O}A = ๑๔๕°$ เพราะเท่ากับ $B\hat{O}C$

(ข) ถ้า $C\hat{O}B + A\hat{O}D = ๒๕๐°$

$C\hat{O}B = A\hat{O}D$

∴ $C\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ ต่างก็เป็น $\frac{๑}{๒}$ ของ ๒๕๐° = ๑๒๕°

$C\hat{O}A$ กับ $C\hat{O}B$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

$\therefore C\hat{O}A = ๑๘๐^\circ - ๑๒๕^\circ = ๕๕^\circ$

$B\hat{O}D = C\hat{O}A = ๕๕^\circ$

(ค) ถ้า $A\hat{O}C + C\hat{O}B + B\hat{O}D = ๒๗๔^\circ$

$\therefore A\hat{O}C + C\hat{O}B = ๑๘๐^\circ$

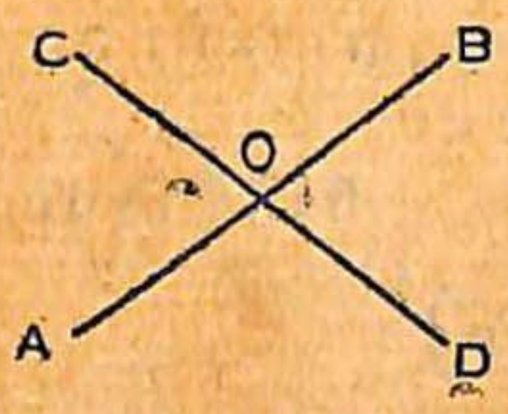
$\therefore B\hat{O}D = ๒๗๔^\circ - ๑๘๐^\circ = ๙๔^\circ$

$\therefore A\hat{O}D$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก กับ $B\hat{O}D$

$\therefore A\hat{O}D = ๑๘๐^\circ - ๙๔^\circ = ๘๖^\circ$

คือ $A\hat{O}C = B\hat{O}D = ๙๔^\circ$; $B\hat{O}C = A\hat{O}D = ๘๖^\circ$

๕. ถ้าจากจุด O ซึ่งเป็นจุดหนึ่งในเส้นตรง AB มีเส้นตรง OC, OD สองเส้นลากไปจาก AB ข้างละเส้น และทำมุม $C\hat{O}B$ เท่ากับ $A\hat{O}D$ จงพิสูจน์ว่า OC, OD เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน.



กำหนดให้ O เป็นจุดหนึ่งในเส้น AB.

ลาก OC, OD ไปข้างละเส้นของ AB

ให้ $C\hat{O}B = A\hat{O}D$

จะต้องพิสูจน์ว่า OC, OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

พิสูจน์ $\therefore B\hat{O}C, C\hat{O}A$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

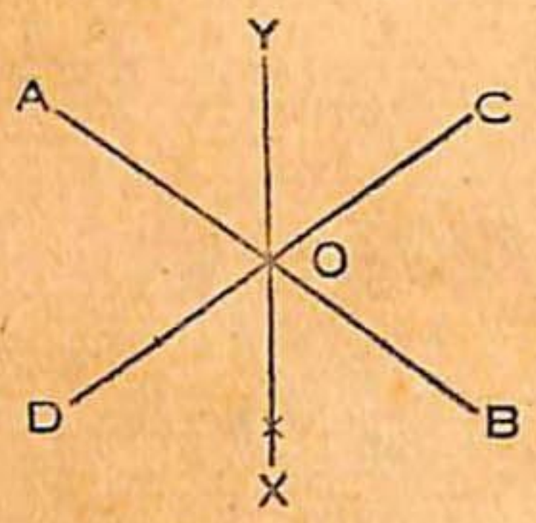
และ $B\hat{O}C = A\hat{O}D$ (โดยโจทย์)

$\therefore A\hat{O}D, A\hat{O}C$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

$\therefore CO$ และ OD เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒)

Q.E.D.

๖. เส้นตรง AB, CD สองเส้นตัดกันที่จุด O ถ้า OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\hat{O}D$ จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อ XO ตรงออกไปจะแบ่งครึ่ง $A\hat{O}C$



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O, OX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{O}D$ ต่อ XO ตรงออกไปถึง Y

จะต้องพิสูจน์ว่า OY จะแบ่งครึ่ง $A\hat{O}C$

พิสูจน์ $\because A\hat{O}Y = B\hat{O}X$

$C\hat{O}Y = D\hat{O}X$

แต่ $B\hat{O}X = D\hat{O}X$ (โดยโจทย์)

$\therefore A\hat{O}Y = C\hat{O}Y$ ด้วย

$\therefore$ OY เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $A\hat{O}C$

Q.E.D.

๗. ถ้าเส้นตรง AB, CD สองเส้นตัดกันที่จุด O ถ้า $B\hat{O}D$ ถูกเส้นตรง OX แบ่งครึ่ง และ $A\hat{O}C$ ถูก OY แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า OX, OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน (รูปเหมือนข้อ ๖)

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ O.

$B\hat{O}D$ ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรง OX

$A\hat{O}C$,, ,, ,, OY

จะต้องพิสูจน์ว่า OX, OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

พิสูจน์ $C\hat{O}X, D\hat{O}X$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

$D\hat{O}X = C\hat{O}Y$ เพราะต่างเป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า $B\hat{O}D$ กับ $A\hat{O}C$

$\therefore$ $C\hat{O}X$, $C\hat{O}Y$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก

$\therefore$ OX และ OY เป็นเส้นตรงอันเดียวกัน

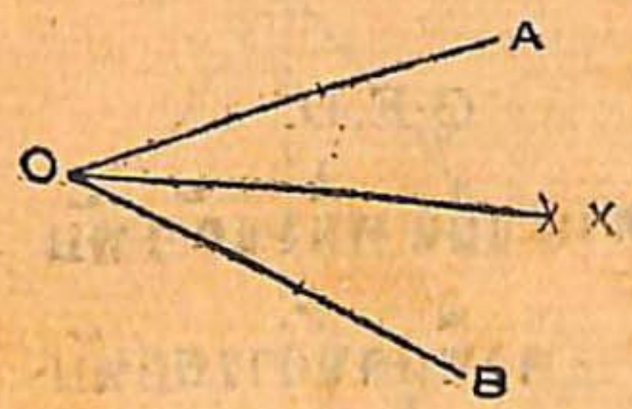
Q.E.D.

๘. OX แบ่งครึ่งมุม $A\hat{O}B$ จงพิสูจน์โดยวิธีพับรูปไปตามเส้นแบ่งครึ่งว่าอาจทำให้ OA ทับ OB สนิท

OA จะอยู่อย่างไรกับ OB ถ้า

(ก) $A\hat{O}X$ ใหญ่กว่า $X\hat{O}B$

(ข) $A\hat{O}X$ เล็กกว่า $X\hat{O}B$



กำหนดให้ $A\hat{O}B$ เป็นมุม ๆ หนึ่ง

OX เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $A\hat{O}B$

จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพับตามเส้น OX แล้ว OA จะต้องทับ OB สนิท

พิสูจน์ $A\hat{O}X = B\hat{O}X$

$\therefore$ OX เป็น แขน ร่วม ของ มุม ทั้ง สอง นี้ และอยู่ข้างเดียวกัน

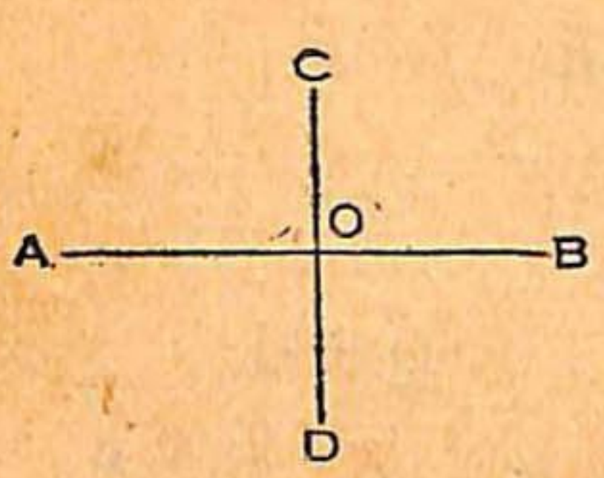
เมื่อพับตรง OX แขนที่เหลือคือ OA, OB จะทับกันสนิท

ถ้า $A\hat{O}X$ ใหญ่กว่า $B\hat{O}X$, OA จะอยู่ข้างนอก $X\hat{O}B$

ถ้า $A\hat{O}X$ เล็กกว่า $B\hat{O}X$, OA จะอยู่ข้างใน $X\hat{O}B$

Q.E.D.

๙. AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O จงพิสูจน์โดยวิธีพับรูปไปตาม AB ว่าอาจทำให้ OC ทับ OD ได้



กำหนดให้ AB,CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพับตาม AB แล้ว OC จะทับ OD ได้

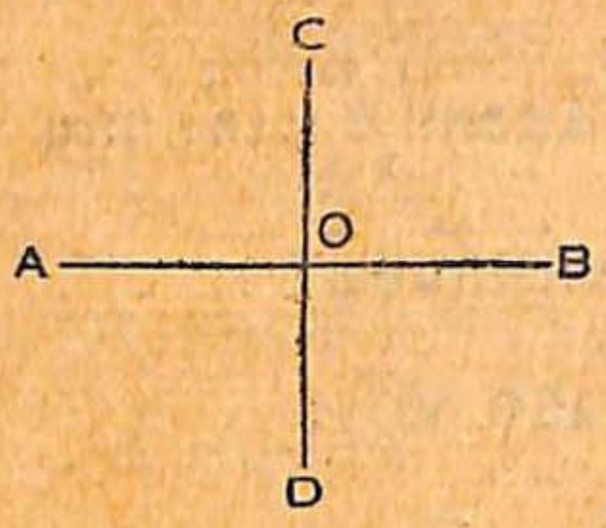
พิสูจน์ $B\hat{O}C = B\hat{O}D$ เพราะต่างเป็นมุมฉาก

$\therefore$ เมื่อพับ $B\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ ตรงแขนร่วม OB ซึ่งอยู่ข้างเดียวกัน แขนที่เหลือคือ OC,OD ก็ทับกันพอดี

Q.E.D.

๑๐. เขียนเส้นตรง AOB ลงบนกระดาษแผ่นหนึ่งแล้วพับกระดาษแผ่นนั้นที่ O ให้ OA ทับ OB สนิท จงพิสูจน์ว่ารอยพับของกระดาษนั้นตั้งฉากกับ AB

กำหนดให้ AOB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง



ให้ COD เป็นรอยพับที่ OA ทับ OB พอดี

$\therefore$ $A\hat{O}C = C\hat{O}B$ เพราะทับกันพอดี

เมื่อพับกระดาษ และ $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$ เป็นมุมประชิดกัน

$\therefore$ $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ CD เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๓

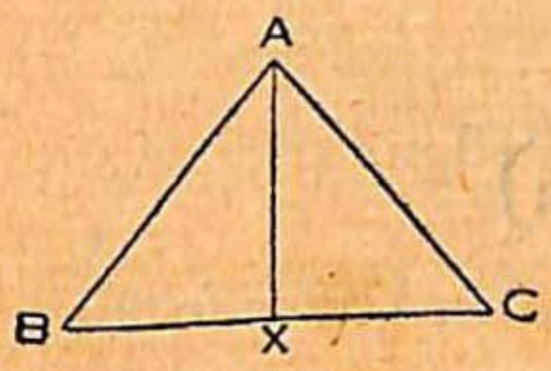
เมื่อเรียนทฤษฎีบทที่ ๔ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(๑) แบ่งครึ่งด้านฐาน (๒) ตั้งฉากกับฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่งมี AB=AC

AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด BAC ตัด BC ที่ X



จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) BX=XC

(๒) AX เป็นเส้นตั้งฉากกับ BC

พิสูจน์ ใน △ BAX กับ △ CAX

$$\therefore \begin{cases} BA=CA & \text{(โดยโจทย์)} \\ AX \text{ เป็นด้านร่วม} & \\ B\hat{A}X = C\hat{A}X & \text{(โดยโจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore$ △ BAX = △ CAX (โดยทฤษฎีบทที่ ๔)

(๑) BX=XC; นั่นคือ AX แบ่งครึ่งฐาน

และ (๒) $A\hat{X}B = A\hat{X}C$ ซึ่งเป็นมุมประชิด

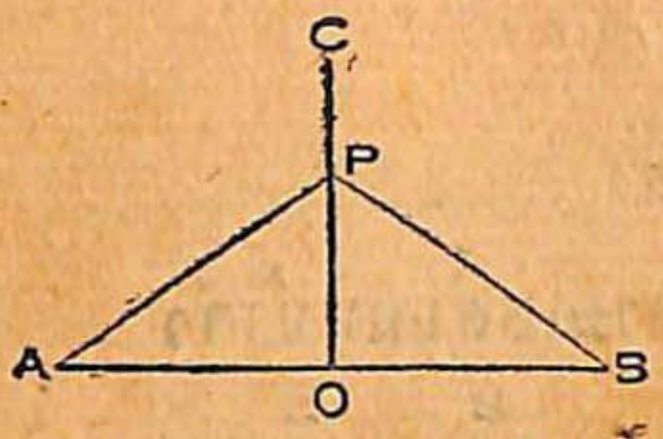
$\therefore$ $A\hat{X}B$; $A\hat{X}C$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ AX ตั้งได้ฉากกับฐาน

Q.E.D.

๒. ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และให้ OC เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ใน OC จงพิสูจน์ว่า PA = PB



กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB

และให้ OC เป็นเส้นตั้งฉากกับ AB

P เป็นจุด ๆ หนึ่งบน OC

จะต้องพิสูจน์ว่า $PA = PB$

พิสูจน์ ลาก PA, PB

ใน $\triangle$ APO กับ $\triangle$ BPO

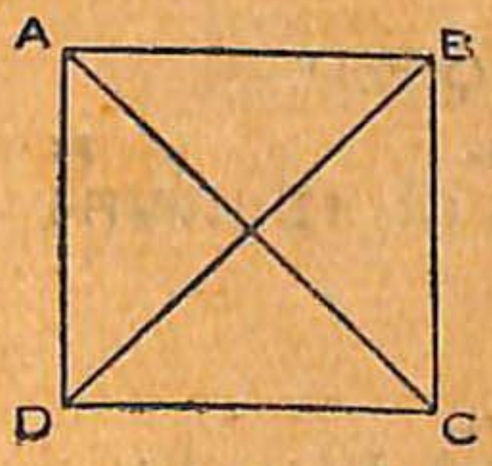
$$\therefore \begin{cases} A\hat{O}P = B\hat{O}P & \text{(เพราะต่างเป็นมุมฉาก)} \\ OP \quad \text{เป็นด้านร่วม} & \\ AO = OB & \text{(โดย O เป็นจุดกึ่งกลาง AB)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle$ APO $=$ $\triangle$ BPO ทุกอย่าง (โดยทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ $PA = PB$

Q.E.D.

๓. สมมติไปพลางก่อนว่าด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน และมุมทั้งสี่ต่างก็เป็นมุมฉาก จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุม AC และ BD ของ □ จัตุรัส ABCD ยาวเท่ากัน



กำหนดให้ ABCD เป็น □ จัตุรัสรูปหนึ่ง

AC และ BD เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC = BD$

พิสูจน์ ใน $\triangle$ DAB กับ $\triangle$ CBA

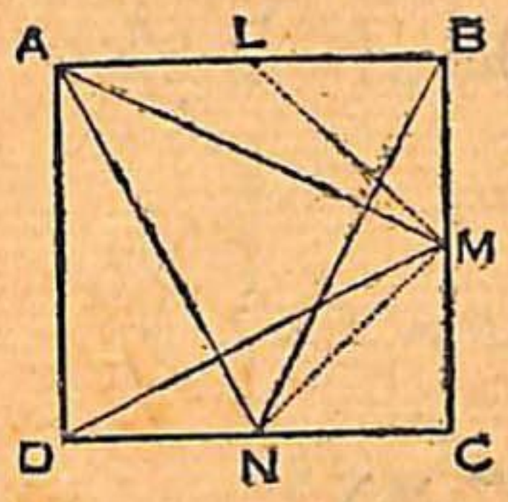
$$\therefore \begin{cases} DA = CB & \text{(ด้านของ } \square \text{ จัตุรัส)} \\ AB \text{ เป็นด้านร่วม} \\ D\hat{A}B = C\hat{B}A & \text{(มุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAB = \triangle CBA$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore AC = BD$

Q.E.D.

๔. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง L,M,N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, และ CD จงพิสูจน์ว่า



(๑) $LM = MN$

(๒) $AM = DM$

(๓) $AN = AM$

(๔) $BN = DM$

กำหนดให้ ABCD เป็น $\square$ จัตุรัสรูปหนึ่ง

L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, และ CD

ลาก AN, AM, BN; NM, ML, MD

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $LM = MN$

(๒) $AM = DM$

(๓) $AN = AM$

(๔) $BN = DM$

พิสูจน์ (๑) ในรูป $\triangle$ LBM, กับ $\triangle$ MCN

$\therefore$ $\begin{cases} LB = MC & \text{(ต่างก็เป็นครึ่งของด้านเท่า)} \\ BM = CN & \text{(\,,\quad\quad,\quad\quad,\,)} \\ \hat{LBM} = \hat{MCN} & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ LBM $=$ $\triangle$ MCN ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ LM $=$ MN

(๒) ในรูป $\triangle$ ABM กับ $\triangle$ DCM

$\therefore$ $\begin{cases} AB = DC & \text{(ต่างก็เป็นด้านของ } \square \text{ จตุรัส)} \\ BM = CM & \text{(ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของ BC)} \\ \hat{ABM} = \hat{DCM} & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ AM $=$ DM (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๓) ใน $\triangle$ ABM กับ $\triangle$ ADN

$\therefore$ $\begin{cases} AB = AD & \text{(ต่างเป็นด้านของ } \square \text{ จตุรัส)} \\ BM = DN & \text{(ต่างก็เป็นครึ่งของด้านเท่า)} \\ \hat{ABM} = \hat{ADN} & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ AM $=$ AN (ทฤษฎีบทที่ ๔)

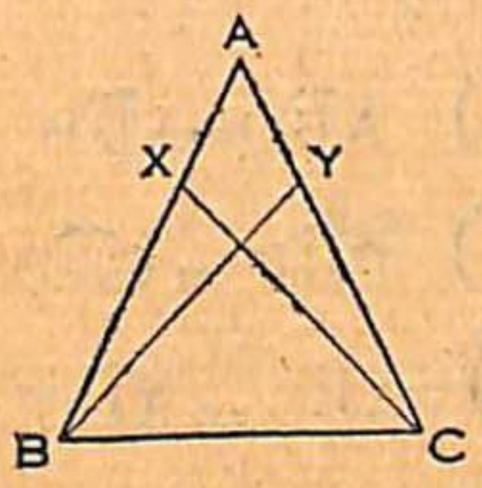
(๔) ใน $\triangle$ BCN กับ $\triangle$ DCM

$\therefore$ $\begin{cases} BC = DC & \text{(ต่างก็เป็นด้านของ } \square \text{ จตุรัส)} \\ CN = CM & \text{(ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)} \\ \text{มุมที่ C เป็นมุมร่วม} \end{cases}$

$\therefore$ BN = DM (ทฤษฎีบทที่ ๔)

Q.E.D.

๕. ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง จากด้าน AB, AC ซึ่งยาวเท่ากัน ตัด AX, AY ออกเท่า ๆ กัน แล้วลากเส้น BY, CX จงพิสูจน์ว่า BY = CX



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่ง AB = AC

ตัด AX เท่ากับ AY

ลาก XC, YB

จะต้องพิสูจน์ว่า BY = CX

พิสูจน์ ใน △ BAY และ △ CAX

$\therefore$ $\begin{cases} \hat{A} & \text{เป็นมุมร่วม} \\ AY = AX & \text{(โดยโจทย์)} \\ AB = AC & \text{(โดยโจทย์)} \end{cases}$

$\therefore$ BY = CX (ทฤษฎีบทที่ ๔)

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๔

เมื่อเรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๕ แล้ว

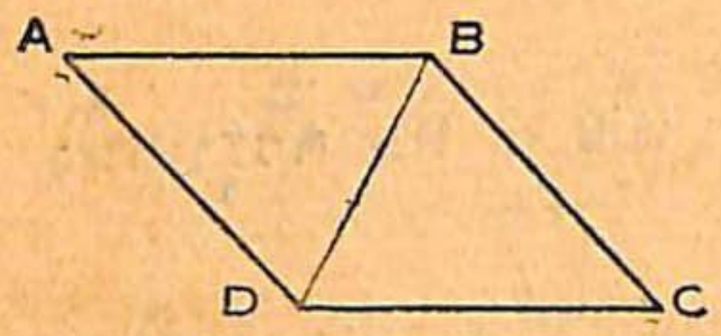
๑. ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง ซึ่งมีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน และมี BD เป็นเส้นทะแยงมุม จงพิสูจน์ว่า

(๑) $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

(๒) $C\hat{B}D = C\hat{D}B$

(๓) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านเท่ารูปหนึ่ง



มี BD เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $A\hat{B}D = A\hat{D}B$

(๒) $C\hat{B}D = C\hat{D}B$

(๓) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

พิสูจน์ (๑) $\because$ $AB = AD$

$\therefore$ $A\hat{B}D = A\hat{D}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

(๒) ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$C\hat{B}D = C\hat{D}B$

(๓) เอามุมใน (๑) และ (๒) บวกกันจะได้

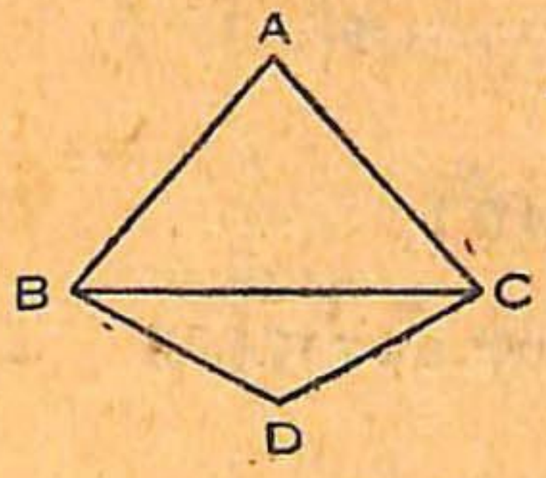
$A\hat{B}D + C\hat{B}D = A\hat{D}B + C\hat{D}B$

$\therefore$ $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

Q.E.D.

๒. อันเดียวกัน ABC และ DBC เป็น △ หน้าจั่วสองรูปสร้างอยู่บนฐาน BC แต่อยู่ตรงข้ามกัน จงใช้ทฤษฎีบทที่ ๕ พิสูจน์ว่า

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$



กำหนดให้ ABC และ DBC เป็น △ หน้าจั่วสองรูป ตั้งอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน แต่อยู่ตรงกันข้าม

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}D = A\hat{C}D$

พิสูจน์ รูป $\triangle$ ABC; $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (เพราะ $AB = AC$)

รูป $\triangle$ DBC; $D\hat{B}C = D\hat{C}B$ (เพราะ $BD = DC$)

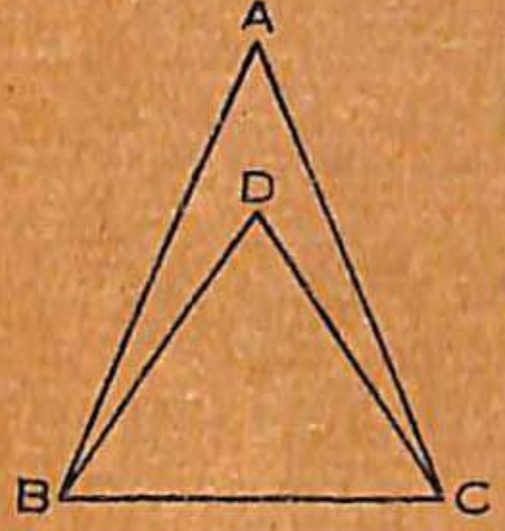
$\therefore$ $A\hat{B}C + D\hat{B}C = A\hat{C}B + D\hat{C}B$

$A\hat{B}C = A\hat{C}D$

Q.E.D.

๓. ABC และ DBC เป็นรูป $\triangle$ หน้าจั่วสองรูป ตั้งอยู่บนฐาน BC ร่วมกัน และอยู่ข้างเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$



กำหนดให้ ABC และ DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วสองรูปตั้งอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน และอยู่ข้างเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}D = A\hat{C}D$

พิสูจน์ $AB = AC$; $BD = DC$ (โจทย์)

$\therefore$ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$; $D\hat{B}C = D\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

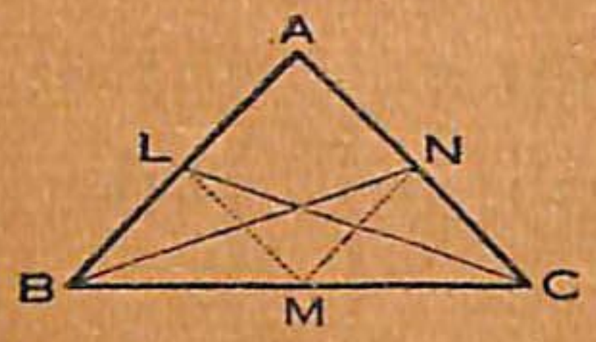
$\therefore$ $A\hat{B}C - D\hat{B}C = A\hat{C}B - D\hat{C}B$

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$

Q.E.D.

๔. AB, AC เป็นด้านเท่าของ $\triangle$ หน้าจั่ว ABC และ L,M,N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, CA ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(๑) LM = NM (๒) BN = CL (๓) $A\hat{L}M = A\hat{N}M$



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่ว

รูปหนึ่ง ซึ่งมี AB = AC

L,M,N เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC, CA

ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) LM = NM

(๒) BN = CL

(๓) $A\hat{L}M = A\hat{N}M$

พิสูจน์ (๑) ใน △ LBM กับ △ NCM

$$\therefore \begin{cases} LB = NC & \text{(ครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)} \\ BM = CM & \text{(ครึ่งหนึ่งของด้าน BC)} \\ L\hat{B}M = N\hat{C}M & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๕)} \end{cases}$$

$\therefore$ LM = NM (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๒) ใน △ LBC กับ △ NCB

$$\therefore \begin{cases} LB = NC \\ BC \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ L\hat{B}C = N\hat{C}B & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๕)} \end{cases}$$

$\therefore$ LC = NB (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๓) △ LBM = △ CNM ทุกอย่าง (ในข้อ (๑))

$\therefore$ $B\hat{L}M = C\hat{N}M$

และ $A\hat{L}M, A\hat{N}M$ เป็น มุม ประกอบ สอง มุม ฉาก กับ $B\hat{L}M$ กับ $C\hat{N}M$ ตามลำดับ

$\therefore A\hat{L}M = A\hat{N}M$

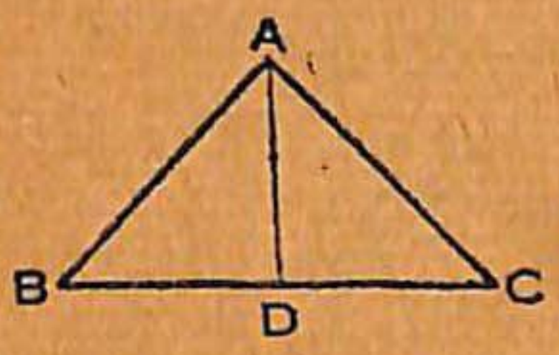
Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๕

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๗ แล้ว

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งลากจากมุมยอดของ $\triangle$ หน้าจั่ว มายังจุดกึ่งกลางของฐาน (๑) แบ่งครึ่งมุมยอด

(๒) ตั้งฉากกับฐาน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง ซึ่ง $AB = AC$

D เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน BC

ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) AD แบ่งครึ่งมุม $B\hat{A}C$

(๒) AD ตั้งฉากกับฐาน BC

พิสูจน์ ใน $\triangle$ BAD กับ $\triangle$ CAD

$\therefore$ $\begin{cases} BD = CD & \text{(โจทย์)} \\ DA & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AB = AC & \text{(โจทย์)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ BAD $=$ $\triangle$ CAD ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore$ (๑) $B\hat{A}D = C\hat{A}D$

นั่นคือ AD แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

และ (๒) $A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ซึ่งเป็นมุมประชิด

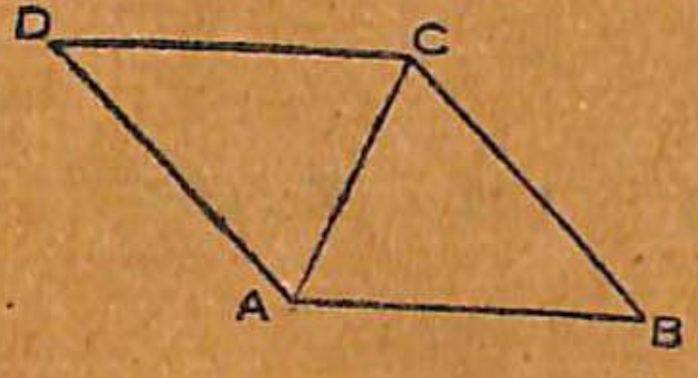
$\therefore$ $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

นั่นคือ AD ตั้งฉากกับ BC

Q.E.D.

๒. ถ้า ABCD เป็น □ ขนมเปียกปูน (คือ □ ที่ด้านเท่ากันทุกด้าน) จงพิสูจน์โดยลากเส้นทะแยงมุม AC ว่า

(๑) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (๒) AC แบ่งครึ่ง $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$



กำหนดให้ ABCD เป็น □ ขนมเปียกปูนรูปหนึ่ง

ลากเส้นทะแยงมุม AC

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

(๒) AC เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$

พิสูจน์ ใน $\triangle$ DAC กับ $\triangle$ BAC

$\therefore$ $\begin{cases} AD = AB & \text{(เป็นด้านของ □ ขนมเปียกปูน)} \\ CD = CB & (\quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad) \\ AC \quad \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ DAC $=$ $\triangle$ BAC ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

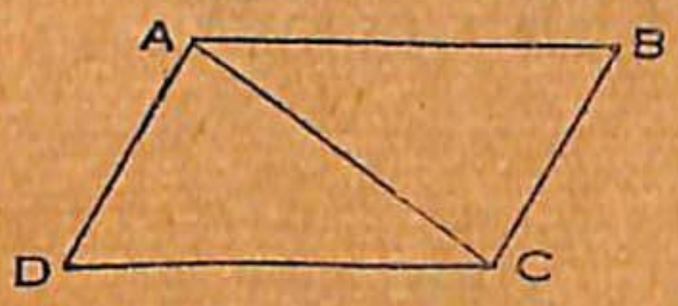
$\therefore$ (๑) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

และ (๒) $B\hat{A}C = D\hat{A}C$, และ $B\hat{C}A = D\hat{C}A$

นั่นคือ AC แบ่งครึ่ง $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$

Q.E.D.

๓. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ยาวเท่ากัน คือ $AB = CD$; $AD = BC$ จงพิสูจน์ว่า $A\hat{D}C = A\hat{B}C$



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง
มีด้านตรงข้าม $AB = CD$; $AD = BC$
จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{D}C = A\hat{B}C$

พิสูจน์ ลาก AC

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ADC$

$$\therefore \begin{cases} AB = DC & \text{(โจทย์)} \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ AD = BC & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

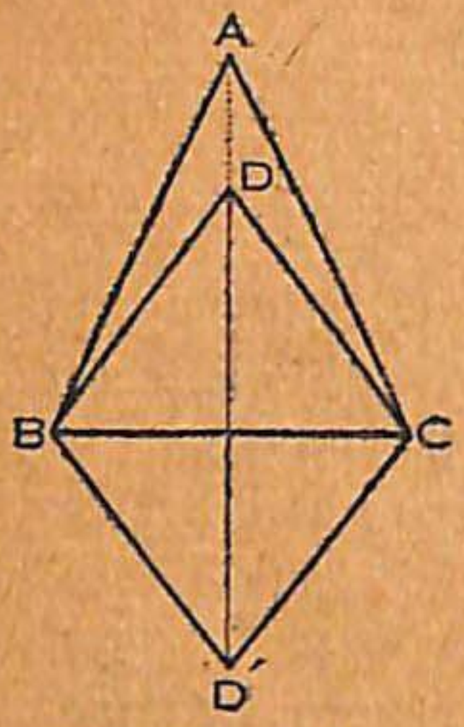
$\therefore A\hat{D}C = A\hat{B}C$

Q.E.D.

๔. ถ้า ABC, DBC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วสองรูปตั้งอยู่บนฐาน BC ร่วมกัน จงพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทที่ ๗ ว่า $A\hat{B}D = A\hat{C}D$

(๑) ให้ $\triangle$ สองรูปอยู่บนทางเดียวกันของฐาน BC

(๒) ,, ^ ,, อยู่คนละข้างของฐาน BC



กำหนดให้ ABC, DBC เป็น △ หน้าจั่ว สองรูป

(๑) สร้างอยู่บนฐาน BC อันเดียวกัน

(๒) อยู่คนละทางให้ชื่อว่า BD'C

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $A\hat{B}D = A\hat{C}D$

(๒) $A\hat{B}D' = A\hat{C}D'$

พิสูจน์ (๑) ลาก AD

ใน △ ABD และ △ ACD

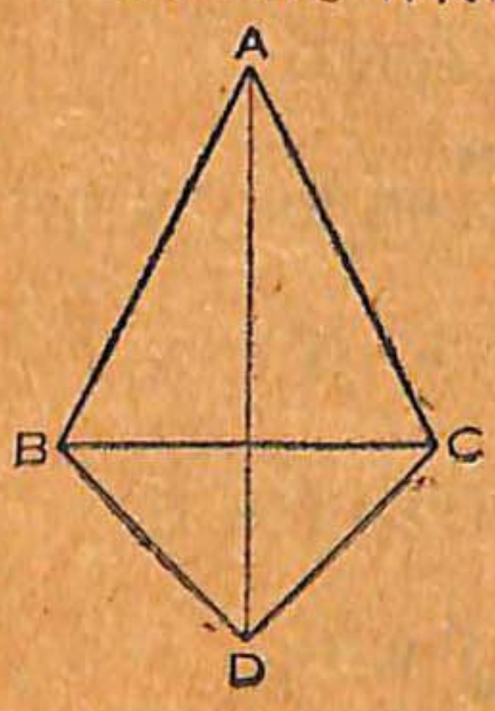
$$\therefore \begin{cases} AB = AC & \text{(โจทย์)} \\ BD = DC & \text{(โจทย์)} \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore A\hat{B}D = A\hat{C}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

(๒) เหมือนกับ (๑)

Q.E.D.

๕. ถ้า ABC, DBC เป็น รูป △ หน้าจั่ว สอง รูป สร้าง อยู่ บน ฐาน BC ร่วมกัน แต่อยู่คนละข้าง ถ้าลาก AD จงพิสูจน์ว่า $B\hat{A}C$, $B\hat{D}C$ ต่างก็จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ ABC, DBC เป็น △ หน้าจั่ว สองรูปสร้างอยู่บนฐาน BC ร่วมกันแต่อยู่คนละข้าง ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $B\hat{A}C$ และ $B\hat{D}C$ ต่าง ก็ ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย AD

พิสูจน์ ใน $\triangle$ BAD กับ $\triangle$ CAD

$\therefore$ $\begin{cases} BA = CA & \text{(โจทย์)} \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ BD = CD & \text{(โจทย)} \end{cases}$

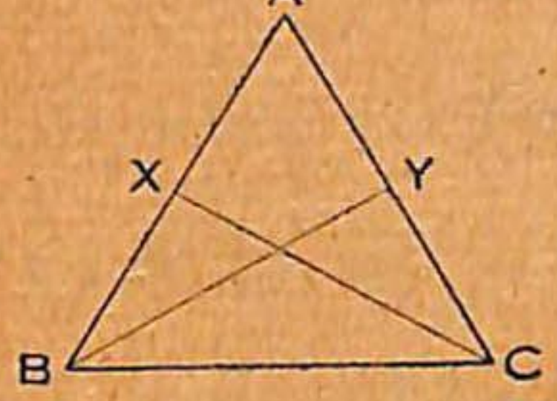
$\therefore$ $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ และ $B\hat{D}A = C\hat{D}A$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

นั่นคือ $B\hat{A}C, B\hat{D}C$ ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

Q.E.D.

๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากจากปลายฐานของ $\triangle$ หน้าจั่ว ไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



ซึ่ง $AB = AC$

X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC ตาม ลำดับ

ลาก CX, BY

จะต้องพิสูจน์ว่า $CX = BY$

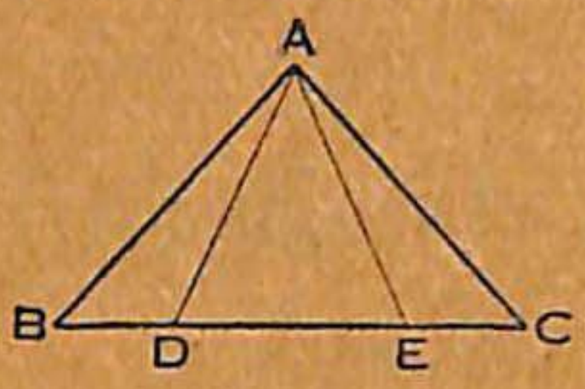
พิสูจน์ ใน $\triangle$ BYC กับ $\triangle$ BCX

$\therefore$ $\begin{cases} YC = XB & \text{(ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)} \\ BC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ Y\hat{C}B = X\hat{B}C & \text{(โดยทฤษฎีบทที่ ๕)} \end{cases}$

$\therefore$ $CX = BY$ (โดยทฤษฎีบทที่ ๔)

Q.E.D.

๗. จุดที่กำหนดให้สองจุดในด้านฐานของ △ หน้าจั่วรูปหนึ่งมีระยะห่างจากสุดปลายด้านฐานเท่ากัน จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งสองมีระยะห่างจากจุดยอดเท่า ๆ กัน



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง มี BC เป็นฐาน D และ E เป็นจุดสองจุดบน BC ซึ่ง $BD = CE$

ลาก AD, AE

จะต้องพิสูจน์ว่า $AD = AE$

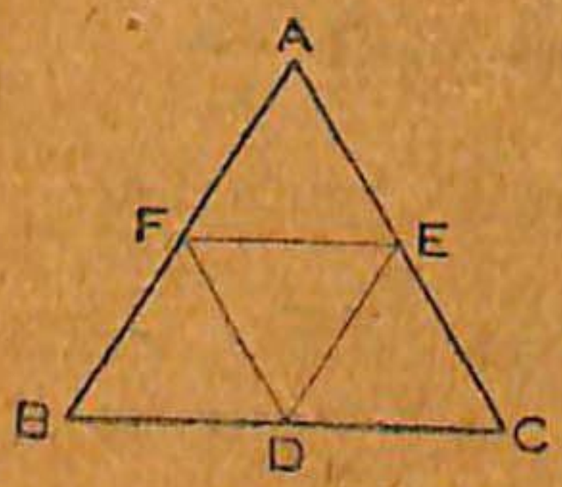
พิสูจน์ ใน △ ABD กับ △ AEC

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & \text{(โดยโจทย์)} \\ \hat{ABD} = \hat{ACE} & \text{(โดยทฤษฎีบทที่ ๕)} \\ BD = EC & \text{(โดยโจทย์)} \end{cases}$$

$$\therefore AD = AE \quad \text{(โดยทฤษฎีบทที่ ๔)}$$

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่า △ ที่เกิดขึ้นโดยลากเส้นจากจุดกึ่งกลางของด้านเท่าของ △ ด้านเท่า จะเป็น △ ด้านเท่าด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น △ ด้านเท่ารูปหนึ่ง D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของ BC, CA, AB ตามลำดับ

ลาก ED, DF, และ FE

จะต้องพิสูจน์ว่า △ DEF เป็น △ ด้านเท่า

พิสูจน์ ใน $\triangle FAE$ กับ $\triangle FBD$

$$\therefore \begin{cases} FA = FB \\ AE = BD \quad \text{(ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)} \\ F\hat{A}E = F\hat{B}D \ \text{(ทฤษฎีบทที่ ๕ บทแทรกที่ ๒)} \end{cases}$$

$\therefore$ FE = FD (ทฤษฎีบทที่ ๔)

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

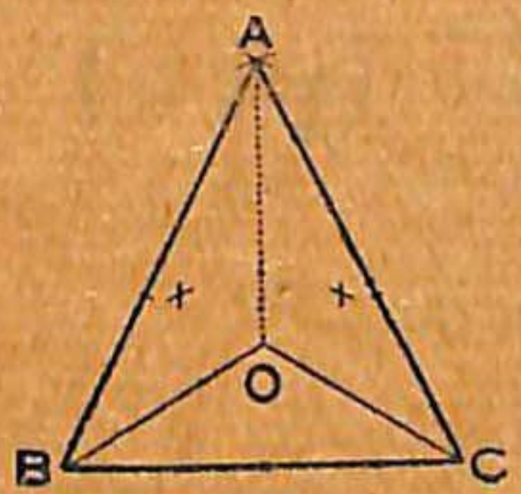
FD = DE

$\therefore$ $\triangle$ DEF เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

Q.E.D.

๙. ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งซึ่งมีด้าน AB = AC มุมที่ B และ C ถูก BO, CO แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า (๑) BO = CO, (๒) AO แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



ซึ่งมี AB = AC ; BO, CO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม B และมุม C

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) BO = CO

(๒) AO แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

พิสูจน์ (๑) $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore$ $O\hat{B}C = O\hat{C}B$ (ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า)

$\therefore$ OB = OC (ทฤษฎีบทที่ ๖)

(๒) ใน $\triangle$ ABO กับ $\triangle$ ACO

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ OB = OC \quad \text{(โดย (๑))} \\ A\hat{B}O = A\hat{C}O \quad \text{(ต่างเป็นครึ่งหนึ่งของมุมเท่า)} \end{cases}$$

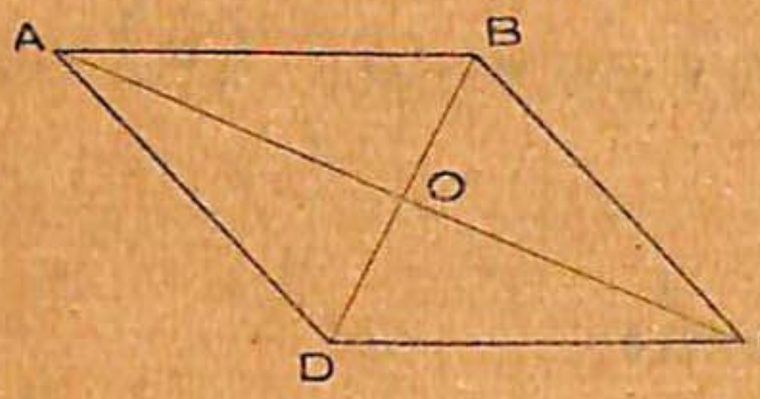
$\therefore$ $B\hat{A}O = C\hat{A}O$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ AO แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุมของ □ ขนมเปียกปูน (ดูข้อ๒) แบ่งครึ่งกันเป็นมุมฉาก.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ขนมเปียกปูนรูปหนึ่ง



เส้นทะแยงมุม AC, BD ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า AC, BD ตัดครึ่งกัน ที่ O. และเป็นมุมฉากด้วย

พิสูจน์ $\triangle$ ABC = $\triangle$ ADC โดยทฤษฎีบทที่ ๗ (ดูข้อ ๒)

$\therefore$ $B\hat{A}C = D\hat{A}C$

ใน $\triangle$ BAO กับ DAO

$$\therefore \begin{cases} BA = DA \\ AO \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ B\hat{A}O = D\hat{A}O \end{cases}$$

$\therefore$ BO = DO และ $A\hat{O}B = A\hat{O}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

และ $A\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ เป็นมุมประชิดจึงต่างเป็นมุมฉาก

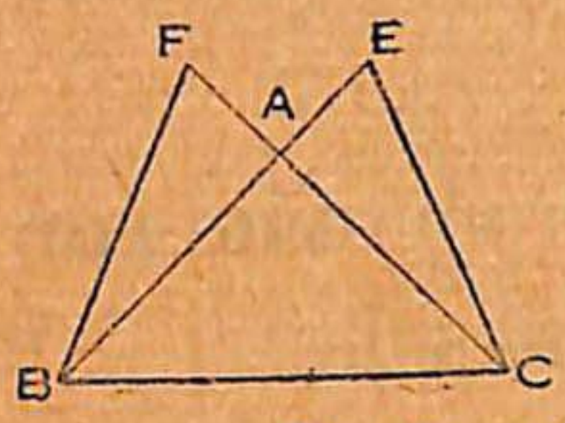
ในทำนองเดียวกัน AO = OC และ $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

$\therefore$ AC และ BD ตัดครึ่งกันที่ O และเป็นมุมฉากด้วย

Q.E.D.

๑๑. ด้านเท่า BA , CA ของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว BAC ถูกต่อเลยออกไปทางจุดยอด A ไปที่จุด E และ F และ AE = AF ลากเส้น FB , EC จงพิสูจน์ว่า FB = EC

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



A เป็นมุมยอด ต่อ BA , CA ตรงออกไปทาง A ถึงจุด E และ F ทำ AE = AF ลาก BF , CE

จะต้องพิสูจน์ว่า FB = EC.

พิสูจน์ ใน $\triangle$ FAB กับ $\triangle$ EAC

$\therefore$ $\begin{cases} FA = EA & \text{(โดยโจทย์)} \\ AB = AC & \\ F\hat{A}B = E\hat{A}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle$ FAB = $\triangle$ EAC (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ FB = EC

Q.E.D.

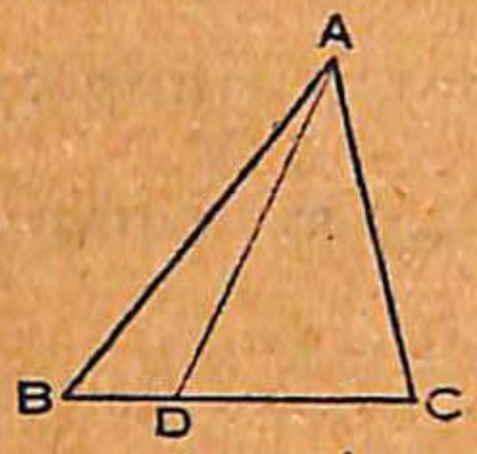
บทที่ ๖

เมื่อเรียนถึงทฤษฎีบทที่ ๘ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่า มุมสองมุมใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

รวมกันย่อมเล็กกว่าสองมุมฉาก โดยลากเส้นจากจุดยอด A ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในฐาน BC.

กำหนดให้ BC เป็นฐานของ △ ABC รูปหนึ่ง



D เป็นจุดใด ๆ บน BC ลาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C + A\hat{C}B$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก

พิสูจน์ ใน △ ABD, มุมภายใน ABD เล็กกว่ามุมภายนอก ADC

และใน △ ADC, มุมภายใน ACD เล็กกว่ามุมภายนอก ADB

$\therefore A\hat{B}D + A\hat{C}D$ ย่อมเล็กกว่า $A\hat{D}C + A\hat{D}B$

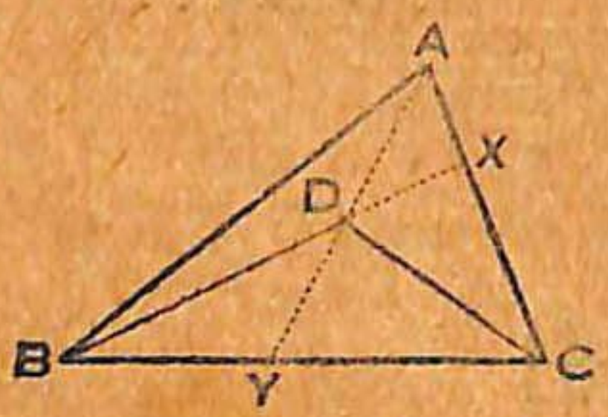
แต่ $A\hat{D}C + A\hat{D}B =$ ๒ มุมฉาก

$\therefore A\hat{B}D + A\hat{C}D$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก

Q.E.D.

๒. ABC เป็น △ รูปหนึ่ง และ D เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ในรูปสามเหลี่ยมนี้ ถ้าลากเส้น BD และ CD จงพิสูจน์ว่า $B\hat{D}C$ ใหญ่กว่า $B\hat{A}C$ (๑) โดยต่อ BD ไปพบ AC (๒) โดยลากเส้น AD และต่อ AD ตรงออกไปทางด้านฐาน

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง



D เป็นจุดใด ๆ ภายใน △ ABC

ลาก BD , DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $B\hat{D}C$ ใหญ่กว่า $B\hat{A}C$

(๑) โดยต่อ BD ตรงออกไปพบ AC ที่ X

หอสมุดแห่งชาติ

(๒) โดยลาก AD และต่อตรงออกไปพบฐาน BC ที่ Y

พสูจน์ (๑) ต่อ BD ไปพบ AC ที่ X

ใน △ DXC, มุมภายนอก $B\hat{D}C$ ใหญ่กว่ามุมภายใน $D\hat{X}C$

(ทฤษฎีบทที่ ๘)

ใน △ AXB, มุมภายนอก $D\hat{X}C$ ใหญ่กว่ามุมภายใน $B\hat{A}C$

(ทฤษฎีบทที่ ๘)

$\therefore B\hat{D}C$ ก็ใหญ่กว่า $B\hat{A}C$ มาก

(๒) ต่อ AD ตรงไปพบ BC ที่ Y

ใน △ BAD, มุมภายนอก $B\hat{D}Y$ ใหญ่กว่ามุมภายใน $B\hat{A}D$

(ทฤษฎีบทที่ ๘)

ใน △ DAC, มุมภายนอก $C\hat{D}Y$ ใหญ่กว่ามุมภายใน $D\hat{A}C$

(ทฤษฎีบทที่ ๘)

โดยวิธีบวกผลนี้, $B\hat{D}C$ ทั้งหมดก็ใหญ่กว่า $B\hat{A}C$ ทั้งหมด.

Q.E.D.

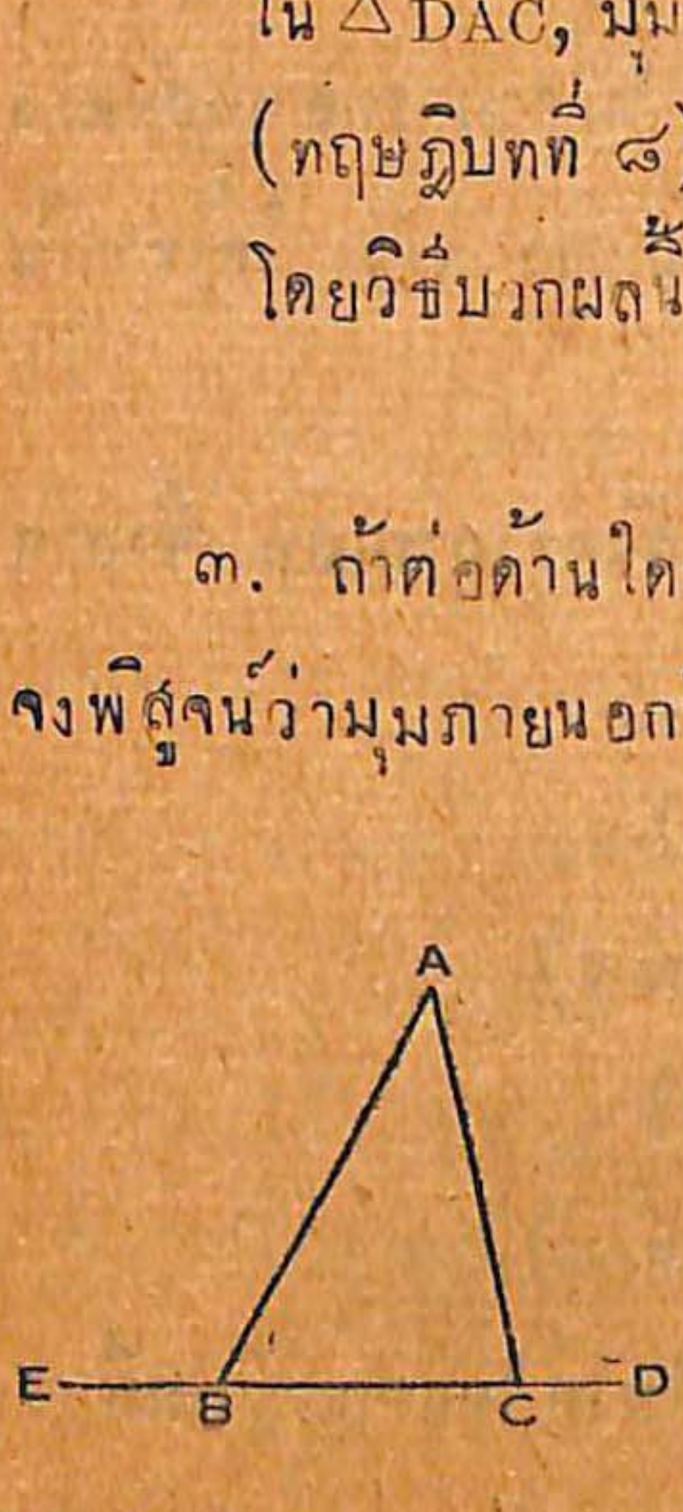
๓. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของ △ ใด ๆ ตรงออกไปทั้งสองข้าง จงพิสูจน์ว่ามุมภายนอกที่บังเกิดขึ้นรวมกันเข้าโตกว่าสองมุมฉาก.

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

ด้าน BC ถูกต่อตรงออกไปทั้งสองข้าง

ถึง D และ E.

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}E + A\hat{C}D$ ใหญ่กว่า ๒ มุมฉาก



พิสูจน์ $A\hat{B}E + A\hat{B}C =$ ๒ มุมฉาก

$A\hat{C}B + A\hat{C}D =$ ๒ มุมฉาก

$\therefore A\hat{B}E + A\hat{B}C + A\hat{C}B + A\hat{C}D =$ ๔ มุมฉาก

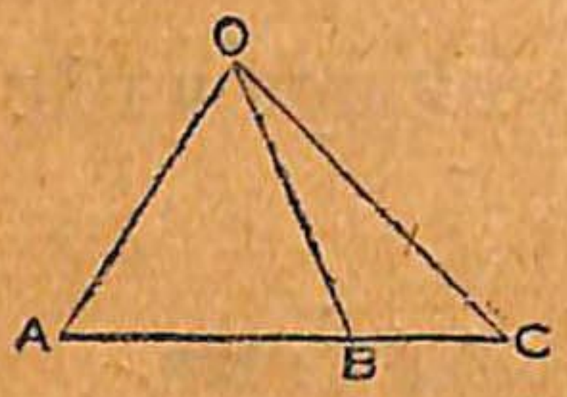
แต่ $A\hat{B}C + A\hat{C}B$ เท่ากับสองมุมฉาก (โดยทฤษฎีบทที่ ๘ บทแทรกที่ ๑)

$\therefore A\hat{B}E + A\hat{C}D$ ก็โตกว่า ๒ มุมฉาก

Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่า จากจุดภายนอกของเส้นตรงที่กำหนดให้จะลากเส้นตรงซึ่งมีความยาวเท่ากันไปยังเส้นตรงเส้นนั้นได้ไม่เกินสองเส้น

กำหนดให้ ABC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้



และ O เป็นจุดภายนอกที่กำหนดให้จุดหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า ไม่สามารถลากเส้นตรงจาก O มายังเส้นตรง ABC ได้เท่ากันมากกว่าสองเส้น

พิสูจน์ สมมติให้ OA, OB, OC เป็นเส้นตรงสามเส้น ซึ่งลากมาเท่ากันจาก O ยังเส้นตรง ABC

$\therefore$ OA = OB (โดยสร้าง)

$\therefore O\hat{A}B = O\hat{B}A$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore$ OA = OC (โดยสร้าง)

$\therefore O\hat{A}B = O\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore O\hat{B}A = O\hat{C}B$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ โดยทฤษฎีบทที่ ๘

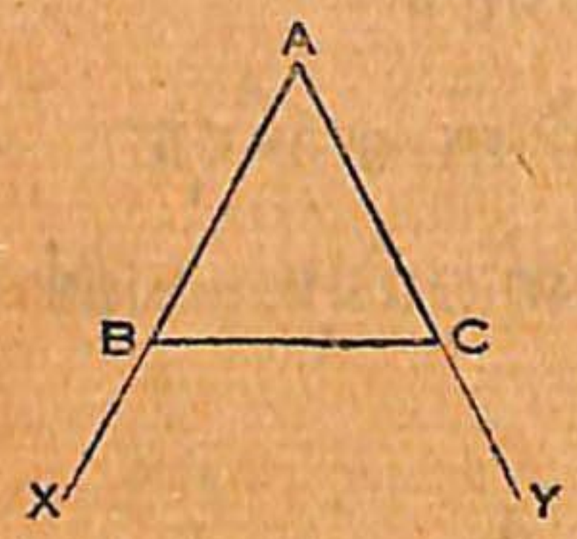
(คือ $O\hat{B}A$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle OBC$)

ตามเหตุผลที่กล่าวมานี้จึงไม่สามารถลากเส้นจากจุด O มายังเส้นตรง ABC ได้เท่ากันมากกว่า ๒ เส้น

Q.E.D.

๕. จงพิสูจน์ว่า ถ้าต่อด้านเท่าสองด้านของ $\triangle$ หน้าจั่วตรงออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นนั้นต่างก็เป็นมุมบ้าน.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง



ซึ่ง $AB = AC$ และ

ด้าน AB, AC ถูกต่อตรงออกไป

ถึง X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $X\hat{B}C$ และ $Y\hat{C}B$ ต่าง ก็เป็นมุมบ้าน

พิสูจน์ $\therefore A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และ $A\hat{B}C + A\hat{C}B$ เล็กกว่า ๒ มุมฉาก (โดยบทแทรกที่ ๑ ของทฤษฎีบทที่ ๘)

$\therefore$ $A\hat{B}C$, และ $A\hat{C}B$ ต่างก็เป็นมุมเล็กกว่ามุมฉาก

แต่มุมภายนอก $X\hat{B}C$, $Y\hat{C}B$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ตามลำดับ

$\therefore$ $X\hat{B}C$, $Y\hat{C}B$ ต่างก็เป็นมุมใหญ่กว่ามุมฉาก คือ เป็นมุมบ้าน

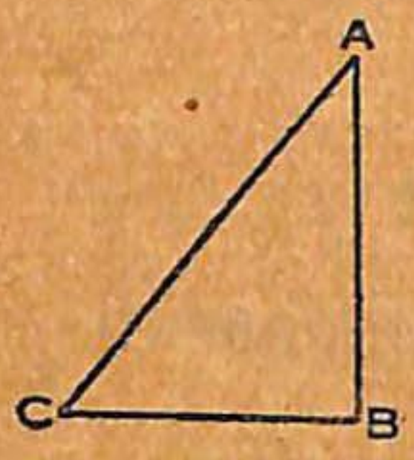
Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๗

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๒ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าด้านตรงข้ามกับมุมฉากเป็นด้านยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก.

กำหนดให้ ABC เป็น △ มุมฉากรูปหนึ่ง



ซึ่งมี $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก

AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

จะต้องพิสูจน์ว่า AC เป็นด้านยาวที่สุด

พิสูจน์ รูป △ รูปหนึ่งต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยสองมุมเสมอ

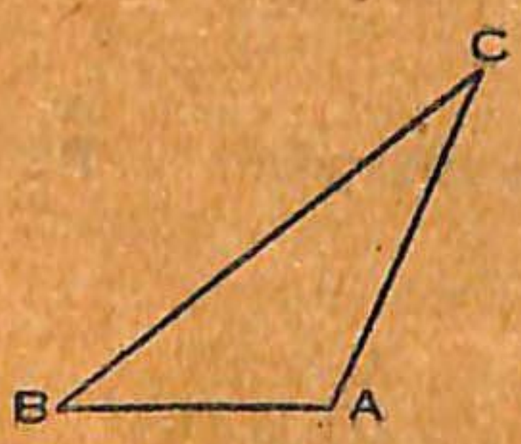
$\therefore$ $A\hat{B}C$ ซึ่งเป็นมุมฉากก็เป็นมุมใหญ่ที่สุด

$\therefore$ AC ด้านตรงข้ามมุมฉากก็เป็นด้านยาวที่สุด

(ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๒. จงพิสูจน์ว่าด้านยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยมทำมุมแหลมกับด้านอื่นอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยม.



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

BC เป็นด้านยาวที่สุด

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B$ กับ $A\hat{B}C$ เป็นมุมแหลม

พิสูจน์ $\therefore$ BC > AB หรือ AC

$\therefore$ $\hat{BAC} > \hat{ABC}$ หรือ $\hat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

แต่ถ้าหากว่า $\hat{ABC}$ หรือ $\hat{ACB}$ เป็นมุมบ้าน

$\hat{BAC}$ ก็เป็นมุมบ้านด้วย

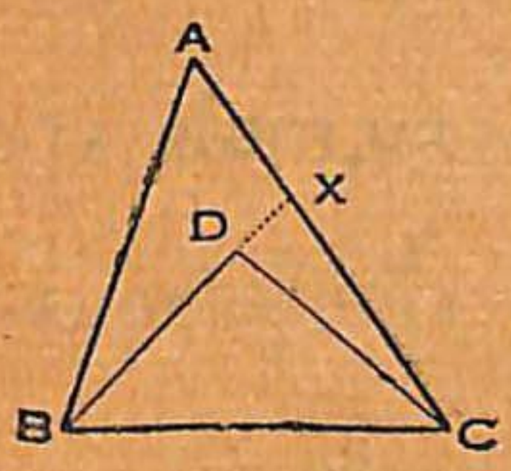
และ $\therefore$ $\hat{ABC} + \hat{ACB}$ ก็ใหญ่กว่า ๒ ฉาก ซึ่งเป็นไปไม่ได้ตาม

บทแทรกที่ ๑ ของทฤษฎีบทที่ ๘

$\therefore$ $\hat{ABC}$ หรือ $\hat{ACB}$ ก็เป็นมุมแหลม

Q.E.D.

๓. ถ้าลากเส้นตรงสองเส้นจากปลายทั้งสองข้างของด้านๆ หนึ่งของ $\triangle$ ไปยังจุดๆ หนึ่งในรูปสามเหลี่ยมนั้น จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงทั้งสองเส้นนี้รวมกันเข้าจะสั้นกว่าด้านอื่นอีกสองด้านของ $\triangle$ รวมกัน



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

BD, CD เป็นเส้นตรงซึ่งลากจาก B และ C

ไปยัง D จุดภายใน $\triangle$ ABC

จะต้องพิสูจน์ว่า $BA + AC > BD + DC$

พิสูจน์ ต่อ BD ตรงออกไปพบ AC ที่ X

จาก $\triangle$ DXC, $DX + XC > DC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา BD บวกเข้าทั้งสองทาง $\therefore$ $DX + XC + BD > BD + DC$

หรือ $BX + XC > BD + DC$

จาก $\triangle$ BAX, $BA + AX > BX$

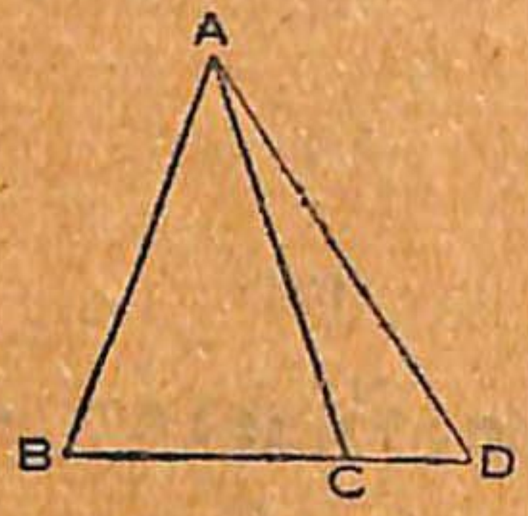
เอา XC บวกเข้าทั้งสองข้าง $\therefore$ $BA + AX + XC > BX + XC$

หรือ $BA + AC > BX + XC$

$\therefore$ BA + AC > BD + DC

Q.E.D.

๔. ถ้าต่อ BC ซึ่งเป็นฐานของ △ หน้าจั่ว ABC ไปที่จุด D จง พิสูจน์ว่า AD ยาวกว่าด้านเท่าด้านใดด้านหนึ่งของรูป △ หน้าจั่วนั้น



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง BC เป็นฐานซึ่งถูกต่อตรงไปถึงจุด D ตาก AD

จะต้องพิสูจน์ว่า AD > AC หรือ AB

พิสูจน์ $\because$ AB = AC

$\therefore$ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และจาก △ ACD, มุมภายนอก $A\hat{C}B$ > มุมภายใน $A\hat{D}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๘)

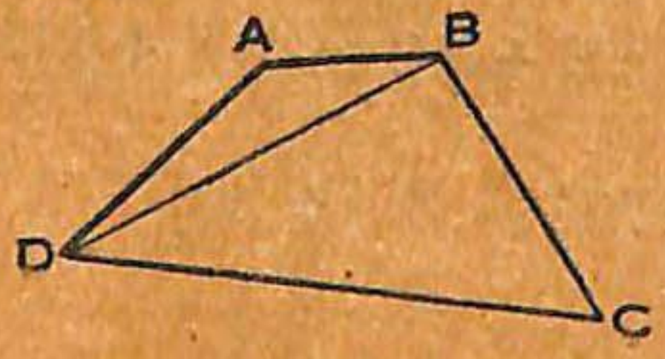
$\therefore$ $A\hat{B}D$ ก็ใหญ่กว่า $A\hat{D}B$ ด้วย

$\therefore$ AD ก็ยาวกว่า AB (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

$\therefore$ AD > AC หรือ AB

Q.E.D.

๕. รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวที่สุดและสั้นที่สุดอยู่ตรงกันข้าม จงพิสูจน์ว่า มุมสองมุมซึ่งอยู่ประชิดกับด้านสั้นที่สุดต่างก็จะใหญ่กว่ามุมตรงข้ามของมัน



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง ซึ่งมี AB เป็นด้านสั้นที่สุด CD ยาวที่สุด

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C > A\hat{D}C$ หรือ $B\hat{A}D > B\hat{C}D$

พิสูจน์ ลาก BD

$\therefore$ DA > AB (โจทย์)

$\therefore$ $A\hat{B}D > A\hat{D}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

และ $\therefore$ DC > BC (โจทย์)

$\therefore$ $D\hat{B}C > B\hat{D}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

$\therefore$ $A\hat{B}D + D\hat{B}C > A\hat{D}B + B\hat{D}C$

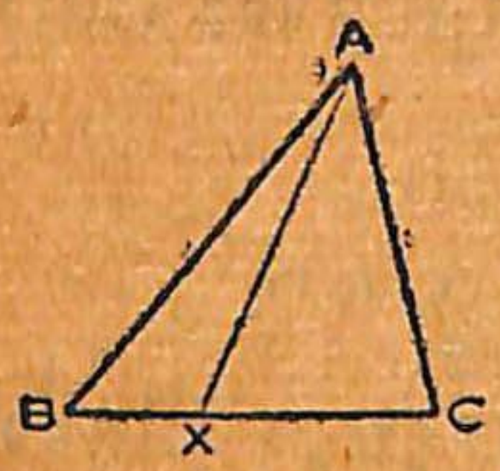
คือ $A\hat{B}C > A\hat{D}C$

ในทำนองเดียวกันถ้าลาก AC ก็อาจพิสูจน์ได้ว่า

$B\hat{A}D > B\hat{C}D$

Q.E.D.

๖. รูป $\triangle$ ABC ถ้าด้าน AC ไม่ยาวกว่า AB จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งลากจากจุดยอด A ไปยังฐาน BC สั้นกว่า AB



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

ซึ่ง AC ไม่ยาวกว่า AB

จาก A ลาก AX พบ BC ที่ X

จะต้องพิสูจน์ว่า AB > AX

พิสูจน์ $\therefore$ AC ไม่ยาวกว่า AB

$\therefore$ AC อาจเท่ากับ AB หรือสั้นกว่าก็ได้

ถ้า AC = AB, $\therefore$ $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และถ้า AC < AB, $\therefore$ $A\hat{C}B > A\hat{B}C$ (,, ,, ๙)

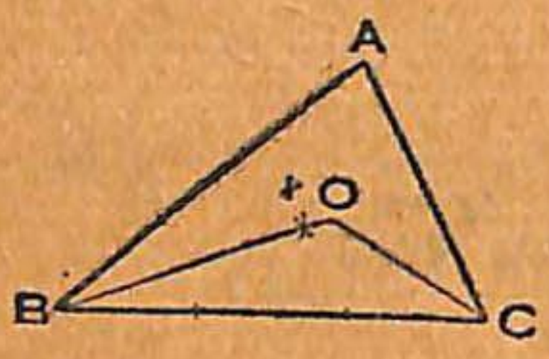
แต่มุมภายนอก $A\hat{X}B >$ มุมภายใน $A\hat{C}B$ (,, ,, ๘)

$\therefore$ $A\hat{X}B$ ก็ใหญ่กว่า $A\hat{B}C$ ด้วย

$\therefore$ AB ก็ยาวกว่า AX (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๗. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี OB, OC แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่าถ้า AB ยาวกว่า AC เช่นนี้แล้ว OB ต้องยาวกว่า OC ด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $AB > AC$, BO และ OC เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{B}$ และ $\hat{C}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $BO > OC$

พิสูจน์ $\because$ $AB > AC$ (โจทย์)

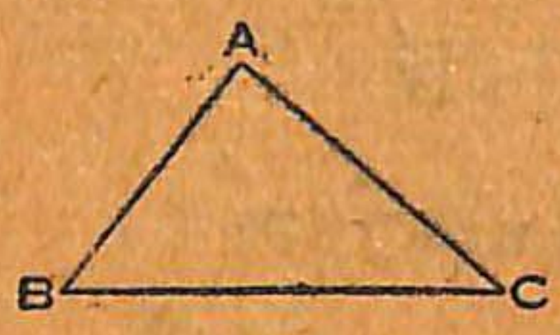
$\therefore$ $A\hat{C}B > A\hat{B}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๙)

$\therefore$ $O\hat{C}B > O\hat{B}C$ (ต่างก็เป็นครึ่งหนึ่งของ $A\hat{C}B$ และ $A\hat{B}C$)

$\therefore$ $OB > OC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่าผลต่างของ ด้าน สอง ด้าน ของรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง จะสั้นกว่าด้านที่สาม



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

จะต้องพิสูจน์ว่า $BC - AC < AB$

พิสูจน์ $\because$ $BC < AB + AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

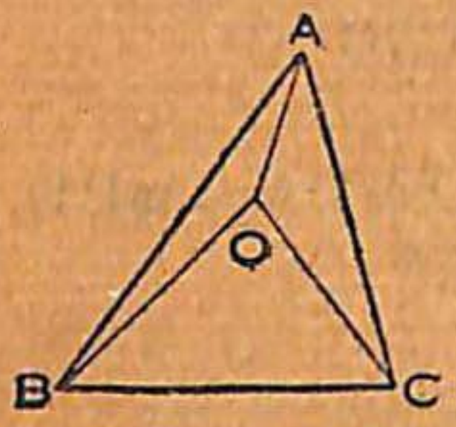
เอา AC หักออกทั้งสองทาง

$\therefore$ $BC - AC < AB + AC - AC$

คือ $BC - AC < AB$

Q.E.D.

๙. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของ ระยะระหว่าง จุด ๆ หนึ่งในรูป $\triangle$ กับจุดที่มุมทั้งสามของรูป $\triangle$ จะยาวกว่าครึ่งหนึ่งของเส้นล้อมรอบ (Perimeter) ของรูป $\triangle$ นั้น



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดภายในใด ๆ

ลาก AO, OC, OB

จะต้องพิสูจน์ว่า $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

พิสูจน์ ใน $\triangle$ OAB, $OA + OB > AB$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

ใน $\triangle$ OBC, $OB + OC > BC$ (,, ,, ๑๑)

ใน $\triangle$ OCA, $OC + OA > CA$ (,, ,, ๑๑)

เอาทั้งสามบรรทัดนี้รวมกัน

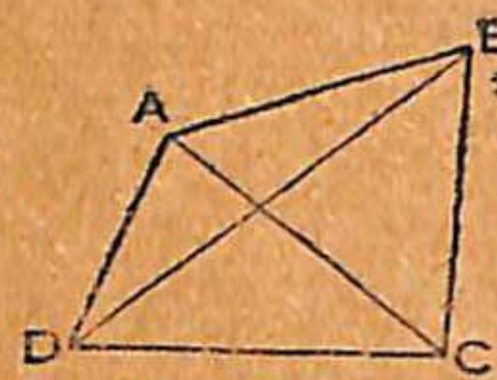
$\therefore$ $OA + OB + OB + OC + OC + OA > AB + BC + CA$

$2OA + 2OB + 2OC > AB + BC + CA$

$\therefore$ $OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่า เส้นล้อมรอบของรูปสี่เหลี่ยมจะยาวกว่าผลบวกของเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมนั้น



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง ซึ่งมี AC, DB เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB+BC+CD+DA > AC+BD$

พิสูจน์ จาก $\triangle ABC$

$AB + BC > AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

และจาก $\triangle ADC$, $CD + DA < AC$

$\therefore$ (บวกกัน) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $AB+BC+CD+DA > 2BD$

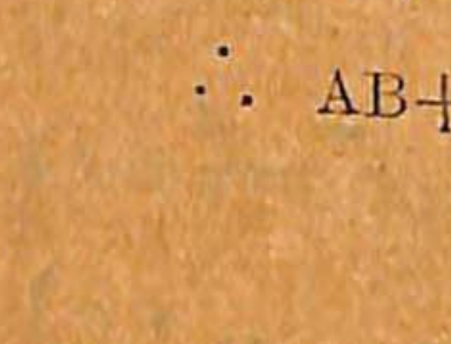
$\therefore$ โดยวิธีบวกกัน

$$2(AB+BC+CD+DA) > 2(AC+BD)$$

$$\therefore AB+BC+CD+DA > AC+BD$$

Q.E.D.

๑๑. ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง มีเส้นตรงเส้นหนึ่งแบ่งครึ่งมุมยอด $B\hat{A}C$ และพบ BC ที่ X จงพิสูจน์ว่า AB ยาวกว่า BX และ AC ยาวกว่า CX และจงพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๑๑ ไปด้วย



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A พบ BC ที่ X

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $AB > BX$

(๒) $AC > CX$ และ (๓) $AB+AC > BC$

พิสูจน์ (๑) $\because$ มุมภายนอก $A\hat{X}C > B\hat{A}X$ (ทฤษฎีบทที่ ๘)

แต่ $B\hat{A}X = X\hat{A}C$ (โจทย์)

$\therefore$ $A\hat{X}C$ ก็ $>$ $X\hat{A}C$ ด้วย

$\therefore$ $AC > CX$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

(๒) ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

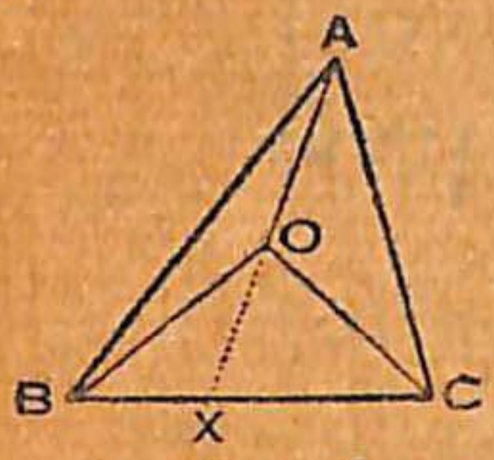
$AB > BX$

(๓) บวกกัน $AB + AC > CX + XB$

$\therefore$ $AB + AC > BC$

Q.E.D.

๑๒. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของระยะระหว่างจุดจุดหนึ่งในรูป $\triangle$ รูปหนึ่งกับจุดที่มุมทั้งสามของรูป $\triangle$ นั้น จะสั้นกว่าเส้นล้อมรอบของรูป $\triangle$ นั้น



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดใด ๆ ใน $\triangle$ ABC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OA+OB+OC<AB+BC+CA$

พิสูจน์ ต่อ AO ตรงออกไปพบ BC ที่ X

$\therefore$ $AC + CX > AX$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา BX บวกเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore$ $AC + CX + BX > AX + BX$

หรือ $AC + CB > AX + BX$

และ $OX + XB > OB$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

เอา OA บวกเข้าทั้งสองข้าง

$\therefore$ $AX + XB > AO + OB$

$\therefore$ AC + CB > AO + OB

หรือ AO + OB < AC + CB

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า BO + OC < BA + CA

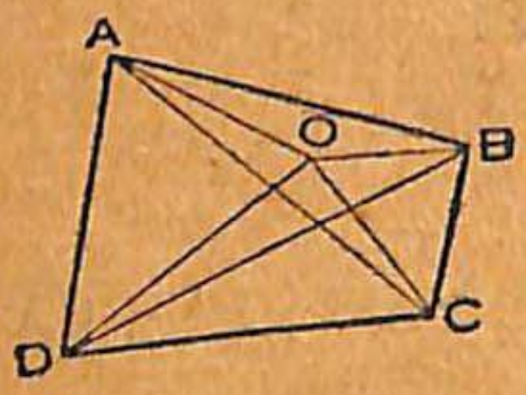
และ CO + OA < BA + BC

บวกผลทั้งสามนี้ได้ ๒(OA + OB + OC) < ๒(AB + BC + CA)

$\therefore$ OA + OB + OC < AB + BC + CA

Q.E.D.

๑๓. จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจะสั้นกว่าผลบวกของเส้นตรงสี่เส้นซึ่งลากจากมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม มายังจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง และมีข้อยกเว้นประการใดบ้าง จงยกมาแสดงไว้ด้วย



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

O เป็นจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง

AC, BD เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า BD + AC < OA + OB + OC + OD

พิสูจน์ $\therefore$ OA + OC > AC (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

และ BO + OD > DB (,, ,, ๑๑)

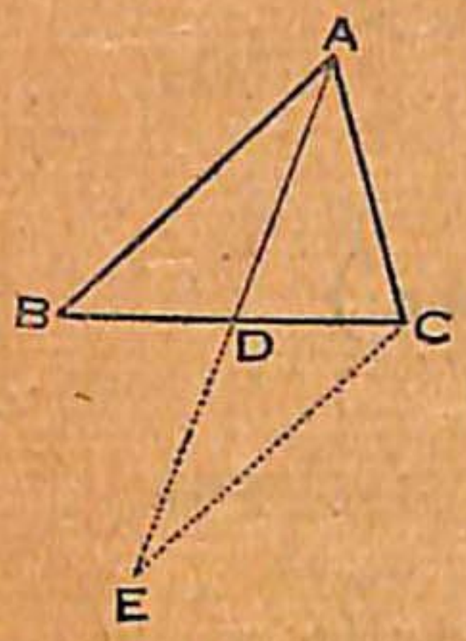
บวกกัน OA + OC + OB + OD > AC + DB

หรือ AC + BD < OA + OC + OB + OD

ข้อยกเว้นก็คือเมื่อจุด O มาอยู่ตรงเส้นทะแยงมุมตัดกัน

Q.E.D.

๑๔. จงพิสูจน์ว่า ด้านสองด้านของรูป △ รวมกันเข้าจะยาวกว่า ๒ เท่าของมเดียนซึ่งแบ่งครึ่งด้านที่สาม (ให้ต่อเส้นมิเดียนและสร้างรูปทำนองทฤษฎีบทที่ ๘)



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

AD เป็นเส้นมิเดียนแบ่งครึ่ง BC ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + AC > 2AD$

พิสูจน์ ต่อ AD ตรงออกไปถึงจุด E

ทำ DE ให้เท่ากับ AD

ลาก EC

ใน $\triangle ADB$ กับ $\triangle EDC$

$$\therefore \begin{cases} AD = DE & \text{(สร้าง)} \\ A\hat{D}B = E\hat{D}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ BD = DC & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB = \triangle EDC$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

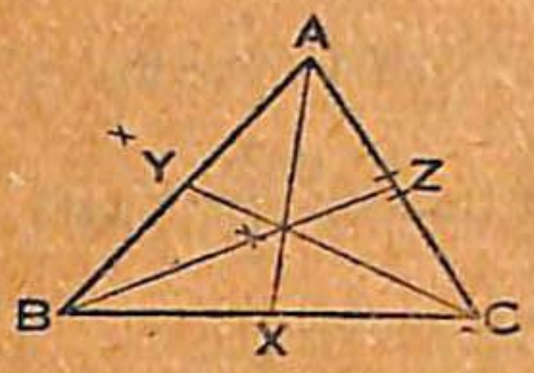
$\therefore AB = CE$

แต่ $AC + CE > AE$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๑)

$\therefore AC + AB > 2AD$

Q. E. D.

๑๕. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นมิเดียนของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะสั้นกว่าเส้นล้อมรอบของรูปสามเหลี่ยมนั้น.



X

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

มี AX, BZ, CY เป็นเส้นมิเดียน

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + BC + CA >$

$AX + BZ + CY$

พิสูจน์ $\therefore AB + AC > 2AX$ (โดยข้อ ๑๔)

และทำนองเดียวกัน $BA + BC > 2BZ$

และ $AC + CB > 2CY$

โดยบวกกัน

$\therefore 2(AB + BC + CA) > 2(AX + BZ + CY)$

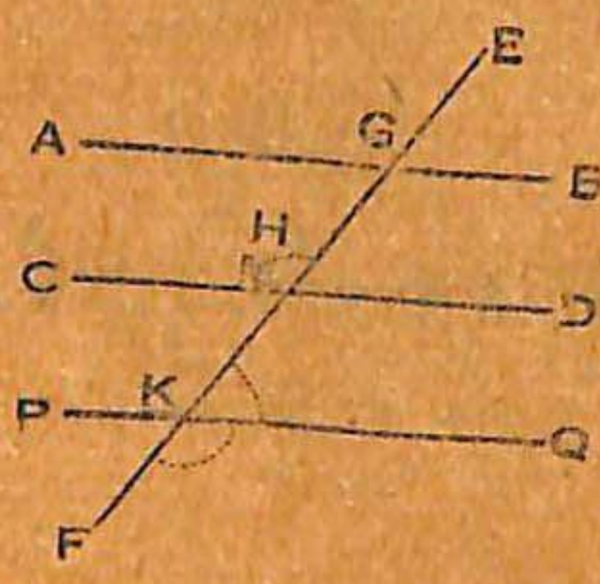
$\therefore AB + BC + CA > AX + BZ + CY$

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๙

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๕ แล้ว

๑. ในรูปของทฤษฎีบทที่ ๑๕ ถ้า $E\hat{G}B = 55^\circ$ ถามว่า



$G\hat{H}C, H\hat{K}Q, Q\hat{K}F$ จะกางมุมละกี่องศา

วิธีทำ $E\hat{G}B$ กับ $B\hat{G}H$ เป็นมุมประกอบสอง

มุมฉากกัน

แต่ $E\hat{G}B = 55^\circ$

$\therefore B\hat{G}H = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

และ $\therefore$ AB//CD, GH เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $B\hat{G}H = G\hat{H}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore$ $G\hat{H}C = ๑๒๕^\circ$ ตอบ

และ $\therefore$ AB//PQ, EF เป็นเส้นตัด

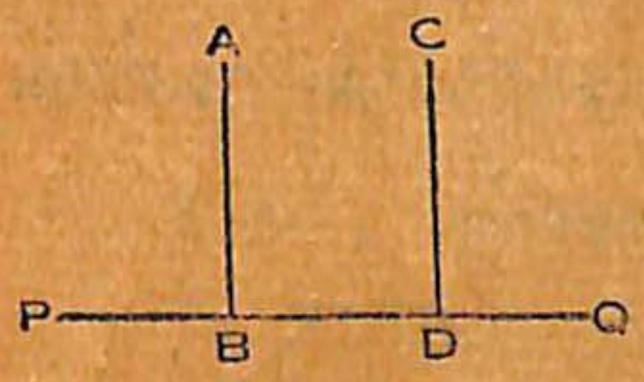
$\therefore$ มุมภายนอก $E\hat{G}B$ = มุมภายใน $H\hat{K}Q$ (ทฤษฎีบทที่๑๔)

$\therefore$ $H\hat{K}Q = ๕๕^\circ$ ตอบ

และ $H\hat{K}Q$ กับ $Q\hat{K}F$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

$\therefore$ $Q\hat{K}F = ๑๘๐^\circ - ๕๕^\circ = ๑๒๕^\circ$ ตอบ

๒. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงทั้งหลายซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง เส้นตรงเหล่านั้นย่อมขนานซึ่งกันและกัน.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้น ซึ่งตั้งฉากบน PQ ที่จุด B และ D

จะต้องพิสูจน์ว่า AB//CD

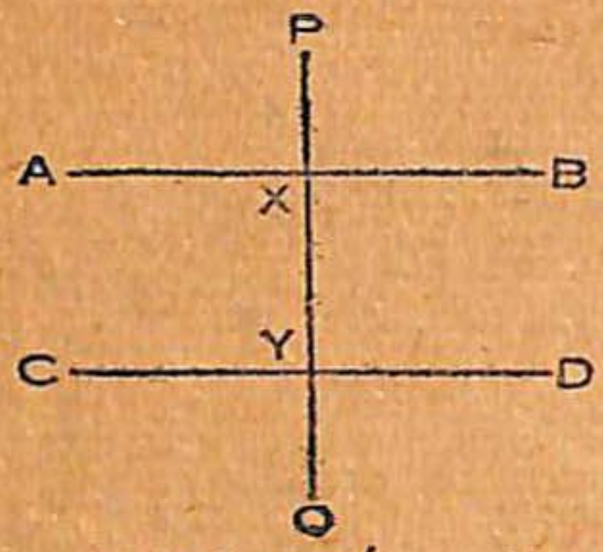
พิสูจน์ $\therefore$ $A\hat{B}P$, $C\hat{D}B$ เป็นมุมฉาก (โจทย์)

$\therefore$ $A\hat{B}P = C\hat{D}B$

$\therefore$ AB//CD (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

Q. E. D

๓. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงขนานสองเส้น หรือมากกว่านั้น และตั้งได้ฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่งของเส้นขนานเหล่านั้น จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงเส้นนั้นตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นอื่น ๆ ด้วย.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน, PQ เป็นเส้นตัด AB, CD ที่ X และ Y ตามลำดับ และให้ PX ตั้งฉากกับ AB

จะต้องพิสูจน์ว่า PY ตั้งฉากกับ CD

พิสูจน์ ∵ AB//CD , PQ เป็นเส้นตัด

∴ มุมภายนอก $P\hat{X}B$ = มุมภายใน $P\hat{Y}D$

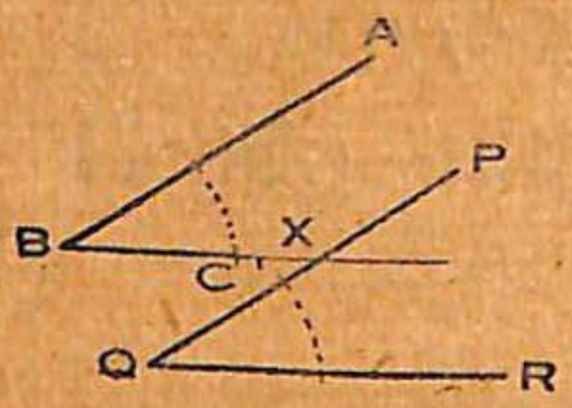
แต่ $P\hat{X}B$ เป็นมุมฉาก (โจทย์)

∴ $P\hat{Y}D$ ก็เป็นมุมฉากด้วย

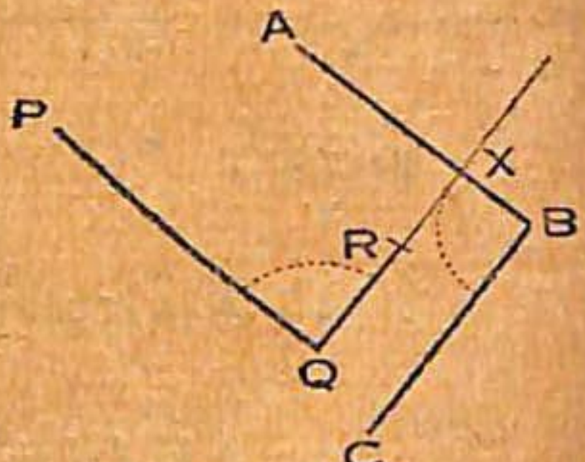
Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่า มุมซึ่งมีแขนขนานกันแขนต่อแขน จะเท่ากันหรือมิฉะนั้นก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน.

(๑)



(๒)



กำหนดให้ ABC, PQR เป็นมุมสองมุม

ซึ่งมีแขน BA // กับ QP

แขน BC // QR

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $A\hat{B}C = P\hat{Q}R$

หรือ (๒) $A\hat{B}C$ กับ $P\hat{Q}R$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน

พิสูจน์ (๑) เมื่อ $A\hat{B}C$ หรือ $P\hat{Q}R$ เป็นมุมแหลมหรือมุมป้านด้วยกันทั้งสอง

ต่อด้าน BC ตรงออกไปพบ QP ที่ X (ถ้าจำเป็น)

$\therefore$ AB // PQ, BX เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $A\hat{B}X$ = มุมแย้ง $B\hat{X}Q$

และ BC // QR, PQ เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $B\hat{X}Q$ = มุมแย้ง $X\hat{Q}R$

$\therefore$ $A\hat{B}X$ หรือ $A\hat{B}C$ = $X\hat{Q}R$ หรือ $P\hat{Q}R$

(๒) เมื่อ $P\hat{Q}R$ เป็นมุมแหลม, $A\hat{B}C$ เป็นมุมป้าน

ต่อ QR ตรงออกไปพบ AB ที่ X (ถ้าจำเป็น)

$\therefore$ PQ // AB, QX เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $P\hat{Q}R$ = มุมแย้ง $Q\hat{X}B$

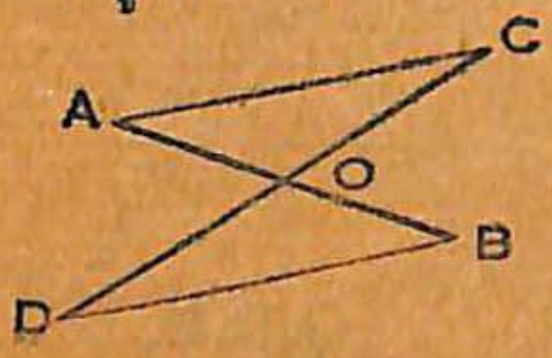
และ $\therefore$ QR ขนานกับ BC, AB เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมภายใน $Q\hat{X}B$ กับ $X\hat{B}C$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก (ทฤษฎีบทที่๑๔)

$\therefore$ $P\hat{Q}R$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $A\hat{B}C$

Q. E. D.

๕. AB กับ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดครึ่งซึ่งกันและกันที่ O, จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งลากต่อ AC และ BD ขนานกัน



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O.

ลาก AC , BD

จะต้องพิสูจน์ว่า AC // BD

พิสูจน์ ใน $\triangle$ AOC กับ $\triangle$ BOD

$$\therefore \begin{cases} OA = OB \\ OD = OC \end{cases} \text{ (โจทย์)}$$

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๓)

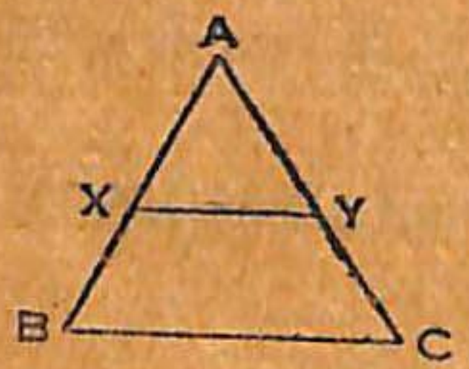
$\therefore \widehat{OAC} = \widehat{OBD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

และเป็นมุมแย้งกันด้วย

$\therefore$ AC // BD (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

Q. E. D.

๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากขนานกับด้านฐานของรูป $\triangle$ หน้าจั่ว จะทำมุมเท่ากันกับด้านทั้งสองของรูปสามเหลี่ยม.



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่ง AB = AC , XY ลากขนานกับ BC พบ AB , AC ที่ X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$

พิสูจน์ $\therefore$ XY // BC , AB เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมภายนอก $\widehat{AXY}$ = มุมภายใน $\widehat{ABC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

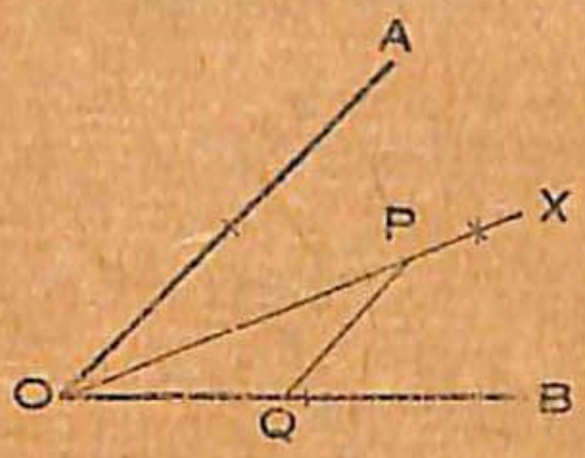
ในทำนองเดียวกัน $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$

แต่ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore \widehat{AXY} = \widehat{AYX}$

Q.E.D.

๗. ถ้าลากเส้นตรงจากจุดๆหนึ่งในเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่ง ให้ขนานกับแขนใดแขนหนึ่งของมุมนั้น จงพิสูจน์ว่ารูป ▵ ที่บังเกิดขึ้นนั้นเป็น ▵ หน้าจั่ว.



กำหนดให้ $A\hat{O}B$ เป็นมุมมุมหนึ่ง

OX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมนั้

P เป็นจุด ๆ หนึ่งใน OX

ลาก PQ ให้ขนานกับ AO พบ OB ที่ Q

จะต้องพิสูจน์ว่า OQP เป็น ▵ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ∵ PQ ขนานกับ AO , OP เป็นเส้นตัด

∴ มุมแย้ง $A\hat{O}P =$ มุมแย้ง $O\hat{P}Q$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

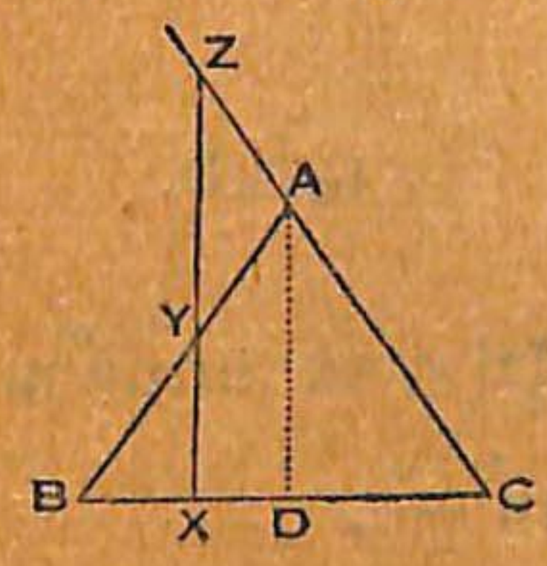
แต่ $A\hat{O}P = P\hat{O}Q$ (โดยโจทย์)

∴ $P\hat{O}Q = O\hat{P}Q$

∴ ▵ OQP ก็เป็น ▵ หน้าจั่ว ซึ่งมี $OQ = QP$

Q.E.D.

๘. จาก X ซึ่งเป็นจุดอยู่บนฐาน BC ของ ▵ หน้าจั่ว ABC ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ตั้งฉากกับฐานไปตัด AB ที่ Y และตัดเส้น CA ต่อที่ Z จงพิสูจน์ว่า ▵ AYZ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น ▵ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

BC เป็นฐาน, X เป็นจุดใด ๆ ในฐาน BC

ลาก XYZ ให้ตั้งได้ฉากกับ BC และตัด AB ที่ Y และพบ CA ต่อที่ Z

จะต้องพิสูจน์ว่า AZY เป็น △ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ลาก AD ให้แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$ และพบฐาน BC ที่ D

ใน △ BAD กับ △ CAD

$$\therefore \begin{cases} AB = AC & \text{(โจทย์)} \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} & \text{(สร้าง)} \\ AD \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

มุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

$\therefore$ AD ตั้งฉากกับ BC

$\therefore$ ZYX ก็ขนานกับ AD (เพราะต่างก็ตั้งได้ฉากกับ BC)

และมี BA เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $\widehat{ZYA} = \widehat{YAD}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และมี ZC เป็นเส้นตัด

มุมภายนอก $\widehat{DAC}$ = มุมภายใน $\widehat{YZA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $\widehat{BAD}$ หรือ $\widehat{YAD} = \widehat{DAC}$ (โจทย์)

$\therefore \widehat{ZYA} = \widehat{AZY}$

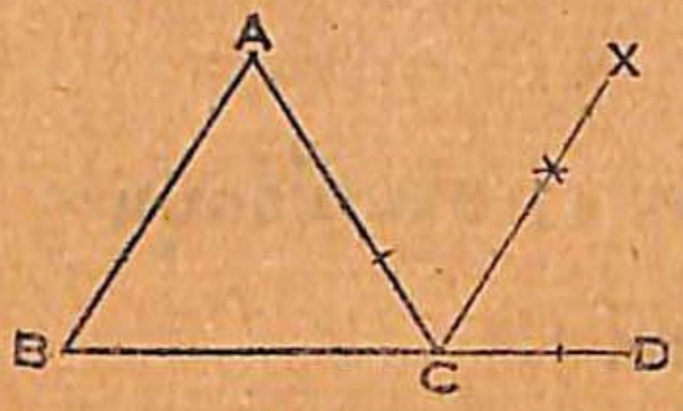
$\therefore$ AY = AZ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

$\therefore$ △ AZY เป็น △ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๙. ถ้าเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูป △ ขนานกับด้านตรงข้าม จงพิสูจน์ว่า △ รูปนั้นเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว.

214
516
ก7410



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง
ซึ่งฐาน BC ถูกต่อออกไปถึงจุด D
ให้ CX แบ่งครึ่ง $A\hat{C}D$ และขนานกับ AB ด้วย

จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น △ หน้าจั่ว

พิสูจน์ $\because$ BA // CX, BD เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมภายใน $A\hat{B}C$ = มุมภายนอก $X\hat{C}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ AC เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $B\hat{A}C = A\hat{C}X$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $A\hat{C}X = X\hat{C}D$ (โจทย์)

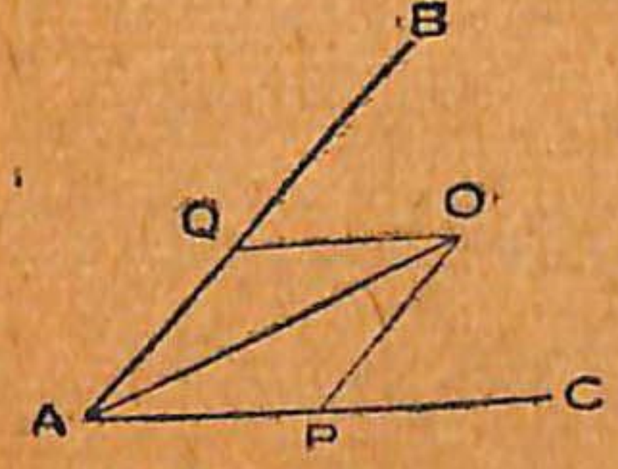
$\therefore$ $A\hat{B}C = B\hat{A}C$

$\therefore$ BC = AC

$\therefore$ ABC เป็น △ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๑๐. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสองเส้นซึ่งลากจากจุดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุมต่างก็ให้ขนานกับแขนของมุมนั้นและไปจดแขนของมุมนั้นจะเท่ากัน และจงพิสูจน์ว่ารูป □ ที่เกิดขึ้นจะเป็น □ ขนมเปียกปูน



กำหนดให้ BAC เป็นมุมมุมหนึ่ง
OA เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมนี้
O เป็นจุดจุดหนึ่งบน OA
ลาก OP, OQ ขนานกับ BA, AC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $OQ = OP$

(๒) $\square APOQ$ เป็น $\square$ ชนมเบี้ยกปูน

พิสูจน์ $\because$ $QO \,//\, AP$, AO เป็นเส้นตัด

มุมแย้ง $Q\hat{O}A = O\hat{A}P$

และ $\because$ $AQ \,//\, PO$, AO เป็นเส้นตัด

$\therefore$ $Q\hat{A}O = A\hat{O}P$

แต่ $Q\hat{A}O = O\hat{A}P$ (โจทย์)

$\therefore$ มุมทั้งสี่เท่ากันหมดคือ

$Q\hat{A}O = Q\hat{O}A = O\hat{A}P = A\hat{O}P$

ลองคิดดูว่าถ้าเราพับ $\triangle AOQ$ ทับ $\triangle APO$ ตรง AO

เมื่อ $Q\hat{A}O = O\hat{A}P$, AQ ต้องนอนบน AP

และเมื่อ $Q\hat{O}A = A\hat{O}P$, OQ ต้องนอนบน OP

Q ซึ่งเป็นจุดร่วมของด้าน AQ กับ OQ ก็ต้องทับตรง P ซึ่งเป็นจุดร่วมของด้าน AP กับ OP

$\therefore$ $\triangle AOQ$ ก็ทับรูป $\triangle OAP$ สนิทพอดี

$\therefore$ $AQ = AP$ และ $OQ = OP$

แต่ $P\hat{A}O = P\hat{O}A$ (พิสูจน์มาแล้ว)

$\therefore$ $AP = PO$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

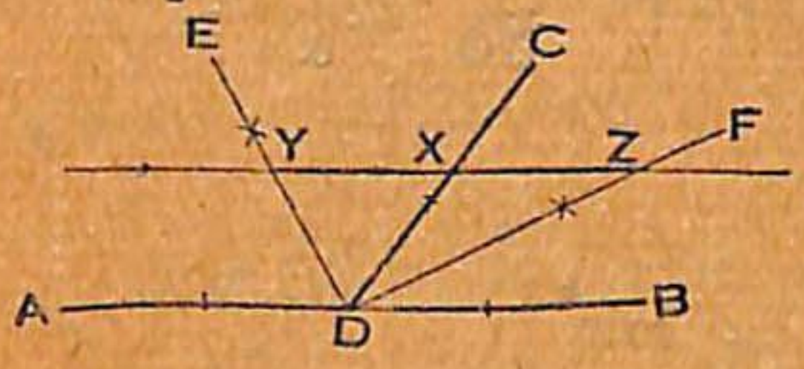
$\therefore$ $AP = PO = OQ = QA$ ทั้ง ๔ ด้าน

$\therefore$ รูป $\square APOQ$ ก็เป็น $\square$ ชนมเบี้ยกปูน

(ยกเว้นถ้า $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก รูป $\square APOQ$ ที่เกิดขึ้นจะเป็น $\square$ จตุรัส)

Q.E.D.

๑๑. AB และ CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ D และมุมประชิดทั้งสองที่เกิดขึ้นถูกแบ่งครึ่ง ถ้ามีเส้น YXZ ลากจากจุด X ในเส้น CD ให้ขนานกับ AB และไปตัดเส้นแบ่งครึ่งทั้งสองที่ Y และ Z จงพิสูจน์ว่า $XY = XZ$



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ D

มุมประชิด $A\hat{D}C$, $C\hat{D}B$ ถูกแบ่งครึ่งด้วย DE และ DF ตามลำดับ

X เป็นจุดใด ๆ ใน DC

ลาก YXZ ให้ขนานกับ AB พบ DE, DF ที่ Y และ Z ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = XZ$

พิสูจน์ $\because$ $YX \,//\, AB$, YD เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $X\hat{Y}D = Y\hat{D}A$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $Y\hat{D}A = Y\hat{D}X$ (โจทย์)

$\therefore$ $Y\hat{D}X = X\hat{Y}D$

$\therefore$ $XY = XD$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$XZ = XD$

$\therefore$ $XY = XZ$

Q.E.D.

๑๒. ไม้ตรง PA, QB สองอันหมุนอยู่รอบแกน P และ Q ตามลำดับ PA หมุนได้ ๑๒ รอบใน ๑ นาที QB หมุนได้๑๐รอบใน ๑ นาที ถ้าไม้สองอันนี้ขนานกันและชี้ไปในทางเดียวกันก่อนแล้วจึงหมุน จะใช้เวลานานเท่าใดไม้ทั้งสองนี้จึงจะขนานกัน

(๑) โดยชี้ไปในทางตรงข้าม (๒) ชี้ไปทางเดียวกัน

PA หมุน ๑ นาที ๑๒ รอบ

PA ,, ๑ วินาที $\frac{๑๒}{๖๐} = \frac{๑}{๕}$,,

๑ รอบมี ๓๖๐°

$\therefore \frac{๑}{๕}$,, ,, $\frac{๓๖๐}{๕} = ๗๒°$

ทำนองเดียวกัน QB หมุน ๑ นาที ๑๐ รอบ

QB ,, ๑ วินาทีได้ $\frac{๑๐}{๖๐} \times ๓๖๐° = ๖๐°$

ใน ๑ วินาที PA หมุนได้มากกว่า QB ๗๒° − ๖๐° = ๑๒°

ถ้า PA กับ QB จะหมุนให้ชี้ทางตรงข้ามเมื่อหยุด

และ PA ต้องหมุนให้มากกว่า QB ๑๘๐°

หมุนมากกว่า ๑๒° ในเวลา ๑ วินาที

,, ,, ๑๘๐° ,, $\frac{๑๘๐}{๑๒} = ๑๕$ วินาที ตอบ

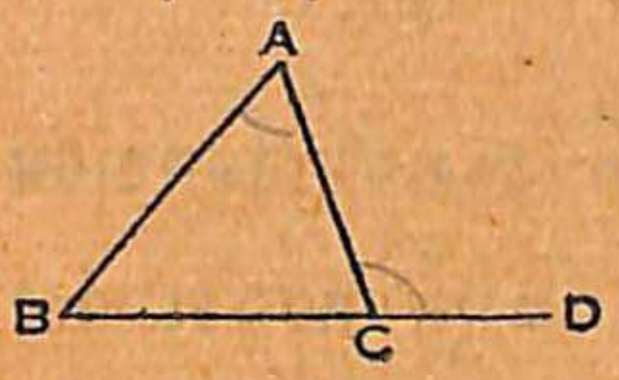
และถ้า PA จะหมุนให้กลับมาอยู่ทางเดียวกับ QB, PA ต้องหมุนให้มากกว่า QB ๓๖๐°

$\therefore$ ใน ๓๖๐° ต้องหมุนกินเวลา $\frac{๓๖๐}{๑๒} = ๓๐$ วินาที ตอบ

แบบฝึกหัดที่ ๗

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๖ แล้ว

๑. ต่อด้าน BC ของรูป △ ABC ไปที่ D และถ้ามุมภายนอก $ACD = ๑๓๔^\circ$ และ $B\hat{A}C = ๔๐^\circ$ จงหามุมภายในของรูป △ สองมุมว่ามีมุมละกี่องศา



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง
BC ถูกต่อตรงไปถึงจุด D
ถ้า $A\hat{C}D = ๑๓๔^\circ$, $B\hat{A}C = ๔๒^\circ$
จะต้องหาว่า $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ กว้างมุมละเท่าใด
วิธีทำ $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore A\hat{B}C = A\hat{C}D - C\hat{A}B$

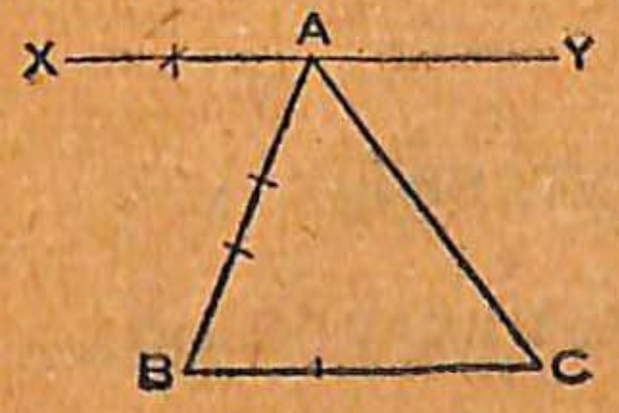
$= ๑๓๔^\circ - ๔๒^\circ = ๙๒^\circ$ ตอบ

และ $A\hat{C}B$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $A\hat{C}D$

$\therefore A\hat{C}B = ๑๘๐^\circ - ๑๓๔^\circ = ๔๖^\circ$ ตอบ

๗/๔๓ ✓

๒. จงพิสูจน์ว่ามุมทั้งสามของรูป △ รวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก โดยลากเส้นให้ผ่านจุดยอดขนานกับฐาน



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง
จะต้องพิสูจน์ โดยลาก XAY ขนานกับ BC ว่า
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ๑๘๐^\circ$

พิสูจน์ $\because$ XY ขนานกับ BC, AB เป็นเส้นตัด

$\therefore$ มุมแย้ง $X\hat{A}B = A\hat{B}C$

และในทำนองเดียวกันมุมแย้ง $\widehat{YAC} = \widehat{ACB}$

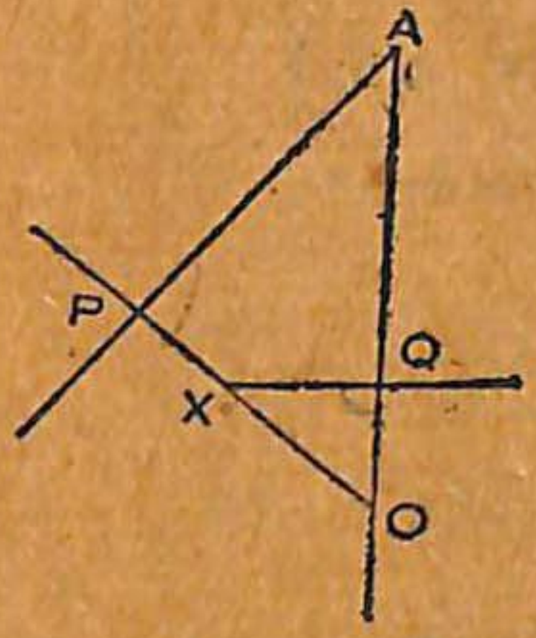
$\therefore \quad \widehat{XAB} + \widehat{BAC} + \widehat{YAC} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

แต่ $\widehat{XAB} + \widehat{BAC} + \widehat{YAC} =$ ๑๘๐° (ทฤษฎีบทที่ ๑)

$\therefore \quad \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} =$ ๑๘๐°

Q.E.D.

๓. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงอื่นสองเส้นเส้นต่อเส้น จงพิสูจน์ว่ามุมแหลมระหว่างเส้นตรงคู่แรกเท่ากับมุมแหลมระหว่างเส้นตรงคู่หลัง



กำหนดให้ AP, AQ เป็นเส้นตรงสองเส้น ตั้งฉากกับ XP, XQ ที่ P และ Q ตามลำดับ และที่ A ให้เป็นมุมแหลม

ต่อ PX ตรงไปพบ AQ ต่อ (ถ้าจำเป็น) ที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{PAQ} = \widehat{QXO}$

พิสูจน์ $\because$ XQO เป็นมุมฉาก

$\therefore$ $\widehat{QXO}$ กับ $\widehat{QOX}$ เป็นมุมประกอบมุมฉาก

และ $\because$ APX เป็นมุมฉาก

$\therefore$ $\widehat{PAO}$ กับ $\widehat{QOX}$ ก็เป็นมุมประกอบมุมฉากด้วย

$\therefore$ $\widehat{QXO}$ กับ $\widehat{PAO}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{QOX}$

$\therefore$ $\widehat{PAQ} = \widehat{QXO}$

Q.E.D.

๔. จงหาว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าต่อไปนี้จะมีมุมกางมุมละกี่องศา (๑) ๖ ด้าน (๒) ๘ ด้าน (๓) ๑๐ ด้าน

เมื่อ N เป็นจำนวนด้าน D เป็นจำนวนองศามุมละ

(๑) ตามสูตร $ND + ๓๖๐^\circ = N \times ๑๘๐^\circ$

$๖D + ๓๖๐^\circ = ๖ \times ๑๘๐^\circ$

$๖D + ๓๖๐^\circ = ๑๐๘๐^\circ$

$๖D = ๑๐๘๐^\circ - ๓๖๐^\circ$

$= ๗๒๐^\circ$

$\therefore D = ๑๒๐^\circ$ ตอบ

(๒) $ND + ๓๖๐^\circ = N \times ๑๘๐^\circ$

$๘D + ๓๖๐^\circ = ๘ \times ๑๘๐^\circ$

$๘D = ๑๔๔๐^\circ - ๓๖๐^\circ$

$\therefore D = \frac{๑๐๘๐}{๘} = ๑๓๕^\circ$ ตอบ

(๓) $ND = N \times ๑๘๐^\circ - ๓๖๐^\circ$

$๑๐D = ๑๐ \times ๑๘๐^\circ - ๓๖๐^\circ$

$\therefore D = \frac{๑๔๔๐}{๑๐} = ๑๔๔^\circ$ ตอบ

๕. ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มุมที่ B และ C กางสองเท่าและสามเท่าของมุมที่ A มุมเหล่านั้นจะกางมุมละกี่องศา

$B = ๒A,\ C = ๓A$

$A + B + C = A + ๒A + ๓A = ๖A = ๑๘๐^\circ$

$\therefore$ A = ๓๐°

B = ๓๐ × ๒ = ๖๐° } ตอบ

C = ๓๐ × ๓ = ๙๐°

2/45 ๖. มุมของ △ หน้าจั่วเหล่านี้กางมุมละกี่องศา

(๑) มุมที่ฐานมุมหนึ่ง ๆ เป็นสองเท่าของมุมยอด

(๒) มุมที่ฐานมุมหนึ่ง ๆ เป็นสี่เท่าของมุมยอด

ให้ A เป็นมุมยอด, B และ C เป็นมุมที่ฐาน

(๑) B=C=๒A, $\therefore$ A+B+C = A+๒A+๒A=๑๘๐°

$\therefore$ ๕A = ๑๘๐° $\therefore$ A=๓๖°, $\therefore$ B=C=๗๒°

(๒) B = C = ๔A, $\therefore$ A+B+C = A+๔A+๔A

$\therefore$ ๙A = ๑๘๐°, A = ๒๐°

$\therefore$ B = C = ๘๐°

3/45 ๗. ถ้าต่อด้านฐานของ △ ตรงออกไปทั้งสองข้าง และมุมภายนอกเป็น ๙๔° และ ๑๒๖° จงหามุมยอด แล้วสร้างรูป △ ให้มีขนาดตามที่กล่าวมานี้ แล้ววัดสอบดูผลที่หาได้ว่าจะจริงหรือไม่

วิธีสร้าง ลากเส้นตรงAB ใด ๆ ให้ยาวพอสมควร

ที่ P ใน AB ทำ $A\hat{P}K$ = ๙๔°, และที่ Q ใน BP ทำ $B\hat{Q}L$ = ๑๒๖°

ถ้า PK กับ QL ตัดกันที่ R

PQR เป็น △ ที่ต้องการ

มุมภายในที่ P และ Q ต่างก็เป็นมุมประกอบ ของมุมฉากกับมุม ๙๔° และ ๑๒๖° ตามลำดับ

$\therefore$ มุมภายใน P $= ๑๘๐^{\circ} - ๙๔^{\circ} = ๘๖^{\circ}$

,, ,, Q $= ๑๘๐^{\circ} - ๑๒๖^{\circ} = ๕๔^{\circ}$

จากนั้น R $= ๑๘๐^{\circ} - (๘๖^{\circ} + ๕๔^{\circ}) = ๔๐^{\circ}$

๘. มุมที่ฐานของ $\triangle$ รวมกันเข้าเป็น ๑๖๒° และผลต่างกันเป็น ๖๐° จงหามุมทั้งสามของรูป $\triangle$

ให้ A เป็นมุมยอด B , C เป็นมุมที่ฐาน

B + C $= ๑๖๒^{\circ}$, B $-$ C $= ๖๐^{\circ}$

$\therefore$ A $= ๑๘๐^{\circ} - ๑๖๒^{\circ} = ๑๘^{\circ}$

B + C $= ๑๖๒^{\circ}$

B $-$ C $= ๖๐^{\circ}$

บวกกัน ๒B $= ๒๒๒^{\circ}$

$\therefore$ B $= ๑๑๑^{\circ}$

$\therefore$ C $= ๑๖๒ - ๑๑๑$

$= ๕๑^{\circ}$

๙. มุมที่ฐานของ $\triangle$ เป็น ๘๔° และ ๖๒° จงหา (๑) มุมยอด (๒) มุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมที่ฐาน แล้วสอบดูผลที่ได้โดยสร้างรูปและวัด.

ให้เส้นแบ่งครึ่งมุม B , C พบกันที่ K

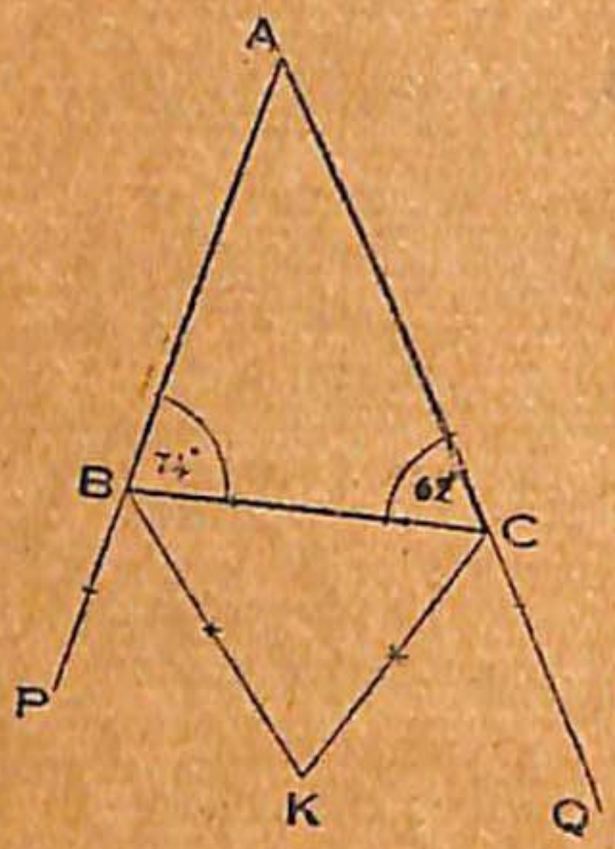
A $= ๑๘๐^{\circ} - (B + C) = ๑๘๐^{\circ} - (๘๔^{\circ} + ๖๒^{\circ}) = ๓๔^{\circ}$

$K\hat{B}C = \frac{B}{๒} = ๔๒^{\circ}$ และ $K\hat{C}B = \frac{C}{๒} = ๓๑^{\circ}$

$\therefore$ $\hat{BKC}$ $= ๑๘๐^\circ - (๔๒^\circ + ๓๑^\circ) = ๑๐๗^\circ$

(ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

6/45 ๑๐. มุมที่ B และ C ของ $\triangle$ ABC เป็น ๗๔° และ๖๒° ถ้าต่อ AB , AC ออกไปจงหามุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก แล้วสร้างรูปสอบดูผลที่ได้ว่าจริงหรือไม่.



กำหนดให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง ซึ่งมี $\hat{B} = ๗๔^\circ$, $C = ๖๒^\circ$ และ AB , AC ถูกต่อตรงออกไปถึง P และ Q แบ่งครึ่งมุม $P\hat{B}C$, $B\hat{C}Q$ ด้วยเส้น BK , CK พบกันที่ K

$\therefore$ $P\hat{B}C = ๑๘๐^\circ - ๗๔^\circ = ๑๐๖^\circ$

$\therefore$ $K\hat{B}C = ๕๓^\circ$

และ $Q\hat{C}B = ๑๘๐^\circ - ๖๒^\circ = ๑๑๘^\circ$, $\therefore$ $K\hat{C}B = ๕๙^\circ$

$\therefore$ $BKC = ๑๘๐^\circ - (๕๓^\circ + ๕๙^\circ) = ๖๘^\circ$

(ให้นักเรียนสร้างรูปให้ถูก)

7/45 ๑๑. มุมสามมุมของ □ รูปหนึ่งเป็น $๑๑๔\frac{๑}{๒}^\circ$, ๕๐°, และ $๗๕\frac{๑}{๒}^\circ$ จงหามุมที่สี่ว่ากางกี่องศา

สมมติให้มุมที่สี่กาง r องศา

$\therefore$ $๑๑๔\frac{๑}{๒} + ๕๐^\circ + ๗๕\frac{๑}{๒} + r^\circ = ๔$ ∟ฉ

$\therefore$ $r + ๒๔๐^\circ = ๓๖๐^\circ$

$r = ๑๒๐^\circ$

๑๒. ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง มุมที่ B, C และ D เท่ากับ ๒A, ๓A, และ ๔A ตามลำดับ จงหามุมเหล่านั้นทุกมุมว่ามีมุมละกี่องศา.

$$A + B + C + D = ๓๖๐^\circ$$

$$\therefore A + ๒A + ๓A + ๔A = ๓๖๐^\circ$$

$$๑๐A = ๓๖๐^\circ$$

$$\therefore A = ๓๖^\circ$$

$$B = ๗๒^\circ, C = ๑๐๘^\circ, D = ๑๔๔^\circ$$

๑๓. มุมสี่มุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านไม่เท่าเป็น ๔๐°, ๗๘°, ๑๒๒°, และ ๑๓๕° จงหามุมที่ห้า.

ตามสูตร มุมภายใน n มุม + ๔ มุมฉาก = ๒n มุมฉาก

$$๔๐^\circ + ๗๘^\circ + ๑๒๒^\circ + ๑๓๕^\circ + r^\circ + ๔ \text{ มุมฉาก} = ๒ \times ๕ \text{ ,,}$$

$$\therefore r^\circ + ๓๗๕^\circ + ๔ \text{ มุมฉาก} = ๑๐ \text{ มุมฉาก}$$

$$r^\circ + ๓๗๕^\circ = ๖ \text{ มุมฉาก}$$

$$r = ๕๔๐^\circ - ๓๗๕^\circ$$

$$\therefore \text{มุมที่ห้า} = ๑๖๕^\circ \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

๑๔. จากรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมี n ด้าน จงพิสูจน์ว่ามุมๆ หนึ่งเป็น $\frac{๒(n-๒)}{n}$ มุมฉาก (๑) พิสูจน์โดยบทแทรกที่ ๑ ของทฤษฎีบทที่ ๑๖ (๒) โดยลากเส้นจากจุดยอด A ไปยังจุดอื่นๆ (เว้นแต่จุดยอดสองจุดที่อยู่ถัด A ไป) การลากเส้นออกไปเช่นนี้จะแบ่งรูปหลายเหลี่ยมนี้ออกเป็นรูป Δ n − ๒ รูป

(๑) n แทนจำนวนด้าน, D แทนจำนวนองศาต่อมุม

ตามสูตร $nD + ๔ \angle = ๒n \angle$ (ทฤษฎีบทที่๑๖ แทรก๑)

$$nD = (๒n - ๔) \angle$$

$$D = \frac{๒n - ๔}{n} \text{ มุมฉาก}$$

$$= \frac{๒(n - ๒)}{n} \text{ มุมฉาก}$$

(๒) เมื่อตากเป็น $\triangle$ จะได้จำนวนรูป $n - ๒$ รูป

$\triangle$ ๑ รูปมี ๒ $\angle$

$\triangle (n - ๒)$ รูปมี $๒(n - ๒) \angle$

∴ มุมของรูป n ด้านทุกมุมรวมกันได้ $๒(n - ๒)$ มุมฉาก

∴ มุม ๑ มุมกาง $\frac{๒(n - ๒)}{n}$ มุมฉาก

๑๕. รูปหลายเหลี่ยมจะมีด้านกี่ด้าน ถ้ามุมหนึ่ง ๆ เป็น

(๑) ๑๐๘°, (๒) ๑๕๖°

ให้ n แทนด้าน, D แทนองศาต่อมุม

(๑) ตามสูตร $nD + ๓๖๐° = ๒n$ มุมฉาก

$n \times ๑๐๘° + ๓๖๐° = ๒n$ มุมฉาก

$๑๐๘n + ๓๖๐° = ๑๘๐n$

$๑๘๐n - ๑๐๘n = ๓๖๐°$

$๗๒n = ๓๖๐°$

$n = ๕$ ด้าน ตอบ

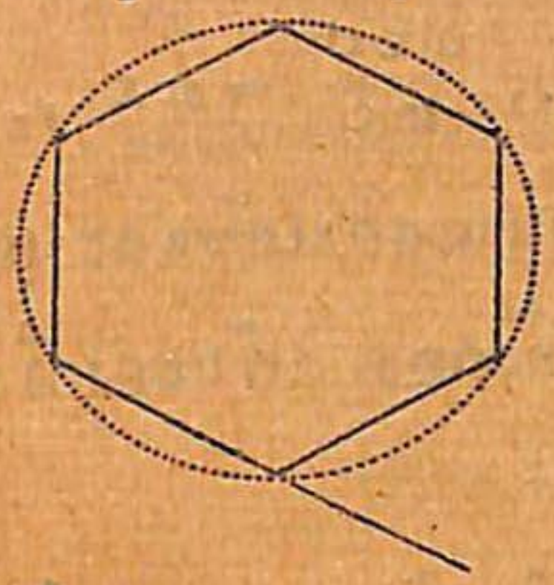
(๒) $n \times ๑๕๖° + ๓๖๐° = n \times ๑๘๐°$

$๑๘๐n - ๑๕๖n = ๓๖๐°$

$$๒๔\,n = ๓๖๐^\circ$$

$$n = ๑๕ \text{ ด้าน} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

๑๖. ถ้าต่อด้านๆหนึ่งของรูป ๖ เหลี่ยมด้านเท่าตรงออกไป จงพิสูจน์ว่า มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในของสามเหลี่ยมด้านเท่า.



ถ้าต่อด้านของรูป ๖ เหลี่ยมด้านเท่าตรงออกไปทางเดียวกันทุกด้านแล้ว มุมภายนอก ๖ มุม จะเท่ากับ ๓๖๐°

(โดยบทแทรกที่ ๒ ของทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore$ มุมภายนอกกางมุมละ $\frac{๓๖๐^\circ}{๖} = ๖๐^\circ$

แต่มุมหนึ่งของ $\triangle$ ด้านเท่ากางมุมละ $\frac{๑๘๐^\circ}{๓} = ๖๐^\circ$

$\therefore$ มุมภายนอกมุมหนึ่งก็เท่ากับมุมหนึ่งของรูป $\triangle$ ด้านเท่า

Q.E.D.

๑๗. จงหาขนาดของมุมภายนอกของ (๑) รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า (๒) สิบเหลี่ยมด้านเท่า ว่าเป็นมุมละกี่องศา.

(๑) มุมภายนอก ๘ มุม $= ๓๖๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ แทรก ๒)

" " ๑ " $= \frac{๓๖๐^\circ}{๘} = ๔๕^\circ$

(๒) มุมภายนอก ๑๐ มุม $= ๓๖๐^\circ$

" " ๑ " $= ๓๖^\circ$

๑๘. ถ้ามุมภายนอกของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าเป็น (๑) ๓๐°

(๒) ๒๔° ถามว่ารูปหลายเหลี่ยมด้านเท่านั้นมีกี่ด้าน.

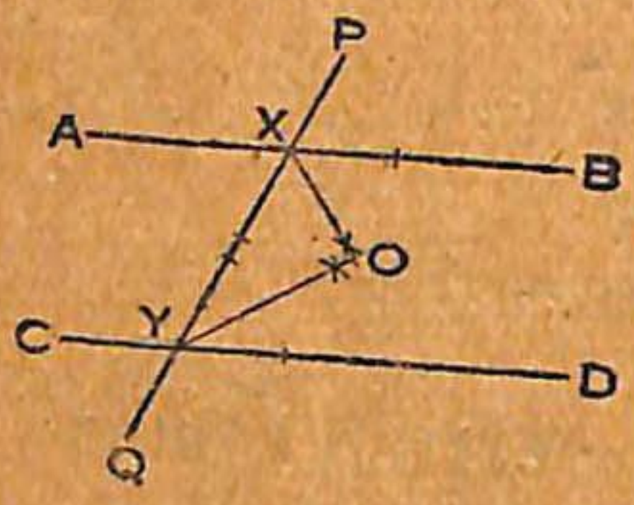
(๑) มุมภายนอก ๓๐° ด้านของรูปเหลี่ยมมี ๑ ด้าน

" " ๓๖๐° " " " $\frac{๓๖๐}{๓๐} = ๑๒$ "

(๒) มุมภายนอก ๒๔° ด้านของรูปเหลี่ยมมี ๑ ด้าน

" " ๓๖๐° " " " $\frac{๓๖๐}{๒๔} = ๑๕$ "

๑๙. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งพบกับเส้นตรงขนานสองเส้นและมุมภายในสองมุมข้างเดียวกันของเส้นตัดถูกแบ่งครึ่งทั้งสอง เส้นแบ่งครึ่งทั้งสองนั้นจะพบกันเป็นมุมฉาก.



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานสองเส้น PQ เป็นเส้นตัด AB ที่ X และ CD ที่ Y; XO, YO เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{X}Y$, $X\hat{Y}D$ ตามลำดับ พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $X\hat{O}Y$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $B\hat{X}Y + X\hat{Y}D = ๑๘๐°$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ $O\hat{X}Y, X\hat{Y}O$ ต่างก็เป็น $\frac{๑}{๒}$ ของ $B\hat{X}Y, X\hat{Y}D$ (โจทย์)

$\therefore O\hat{X}Y + X\hat{Y}O = ๙๐°$

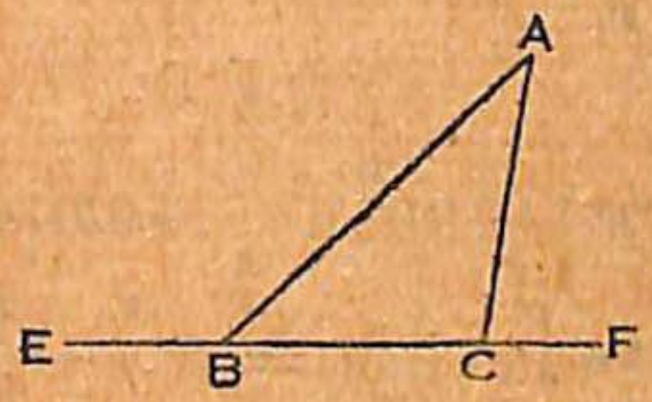
และ $\therefore\therefore O\hat{X}Y + X\hat{Y}O + X\hat{O}Y = ๑๘๐°$

$\therefore X\hat{O}Y = ๙๐°$

Q.E.D.

๒๐. ถ้าต่อด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมออกไปทั้งสองข้าง จง

พิสูจน์ว่าผลบวกของมุมภายนอกสองมุมถบด้วยมุมยอดของรูป △ นั้น จะเท่ากับ ๒ มุมฉาก.



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

ฐาน BC ถูกต่อไปทั้งสองทางถึง E และ F

จะต้องพิสูจน์ว่า $E\hat{B}A + A\hat{C}F - B\hat{A}C = ๑๘๐^\circ$

พิสูจน์ $\therefore E\hat{B}A = B\hat{A}C + A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

และ $A\hat{C}F = B\hat{A}C + A\hat{B}C$

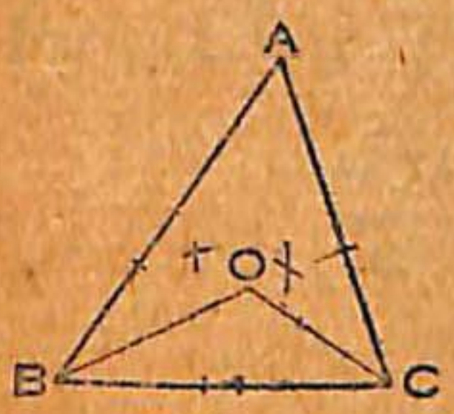
$\therefore E\hat{B}A + A\hat{C}F = B\hat{A}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C + A\hat{B}C$

$= B\hat{A}C + ๑๘๐^\circ$

$\therefore E\hat{B}A + A\hat{C}F - B\hat{A}C = ๑๘๐^\circ$

Q·E.D.

๒๑. รูป △ ABC มุมที่ฐาน B และ C ถูกแบ่งครึ่งด้วย BO และ CO ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $B\hat{O}C = ๙๐^\circ + \frac{A}{๒}$



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

$A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ ถูกแบ่งครึ่งด้วย BO, CO พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $B\hat{O}C = ๙๐^\circ + \frac{A}{๒}$

พิสูจน์ $B\hat{O}C + O\hat{B}C + O\hat{C}B = ๑๘๐^\circ$

$B\hat{O}C = ๑๘๐^\circ - O\hat{B}C - O\hat{C}B$

$= ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒} A\hat{B}C - \frac{๑}{๒} A\hat{C}B$

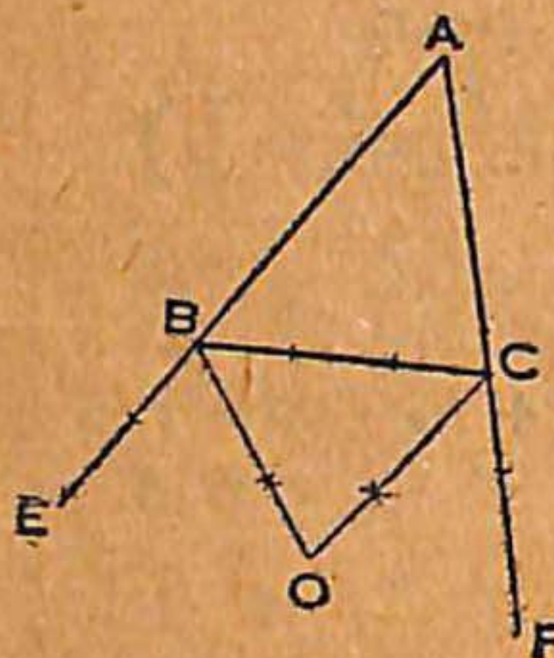
$= ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒} (๑๘๐^\circ - B\hat{A}C)$

$$= ๑๘๐^\circ - ๙๐^\circ + \frac{B\hat{A}C}{๒}$$

$$= ๙๐^\circ + \frac{A}{๒}$$

Q.E.D.

๒๒. รูป $\triangle ABC$ ด้าน AB, AC ถูกต่อตรงออกไป และมุมภายนอกทั้งสองถูก BO, CO แบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า $B\hat{O}C = ๙๐^\circ - \frac{A}{๒}$



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

AB, AC ถูกต่อตรงออกไปถึง E, F ตามลำดับ

$E\hat{B}C$, $F\hat{C}B$ ถูกแบ่งครึ่งโดย OB, OC

ตามลำดับ พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $B\hat{O}C = ๙๐^\circ - \frac{A}{๒}$

พิสูจน์ $\because B\hat{O}C + O\hat{B}C + O\hat{C}B = ๑๘๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore B\hat{O}C = ๑๘๐^\circ - O\hat{B}C - O\hat{C}B$

$= ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒} E\hat{B}C - \frac{๑}{๒} F\hat{C}B$ (โจทย์)

$= ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒}(๑๘๐^\circ - A\hat{B}C) - \frac{๑}{๒}(๑๘๐^\circ - A\hat{C}B)$

$= ๑๘๐^\circ - ๙๐^\circ + \frac{A\hat{B}C}{๒} - ๙๐^\circ + \frac{A\hat{C}B}{๒}$

$= \frac{๑}{๒}(A\hat{B}C + A\hat{C}B)$

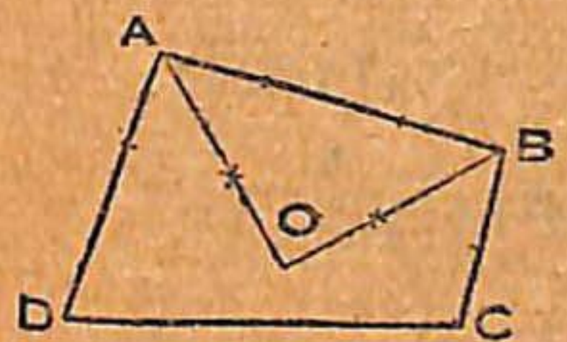
$= \frac{๑}{๒}(๑๘๐^\circ - B\hat{A}C)$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$= ๙๐^\circ - \frac{B\hat{A}C}{๒}$

$= ๙๐^\circ - \frac{A}{๒}$

Q.E.D.

๒๓. จงพิสูจน์ว่า มุมที่บังเกิดขึ้นจากเส้นแบ่งครึ่งของมุมประชิดสองมุมของรูป □ จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของมุมที่เหลือ



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

AO, BO เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B พบกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{O}B = \frac{๑}{๒}(C+D)$

พิสูจน์ $\because O\hat{A}B = \frac{๑}{๒}\hat{A}$ (โจทย์)

$O\hat{B}A = \frac{๑}{๒}\hat{B}$ (โจทย์)

และ $\because A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = ๑๘๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore A\hat{O}B = ๑๘๐^\circ - O\hat{A}B - O\hat{B}A$

$= ๑๘๐^\circ - \frac{A}{๒} - \frac{B}{๒}$

แต่ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ๓๖๐^\circ$

$\therefore \hat{A} + \hat{B} = ๓๖๐^\circ - \hat{C} - \hat{D}$

แต่ $A\hat{O}B = ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒}(\hat{A} + \hat{B})$

$= ๑๘๐^\circ - \frac{๑}{๒}(๓๖๐^\circ - \hat{C} - \hat{D})$

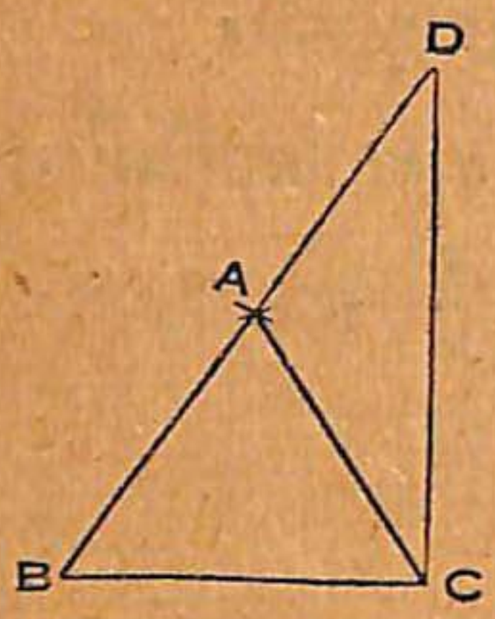
$= ๑๘๐^\circ - ๑๘๐^\circ + \frac{C}{๒} + \frac{D}{๒}$

$= \frac{C}{๒} + \frac{D}{๒}$

$= \frac{๑}{๒}(C+D)$

Q.E.D.

๒๔. A เป็นจุดยอดของ △ หน้าจั่ว ABC, BA ถูกต่อไปที่ D ให้ AD เท่ากับ BA และลากเส้น DC จงพิสูจน์ว่า $B\hat{C}D$ เป็นมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง A เป็นมุมยอด, BA ถูกต่อตรงไปถึง D ทำ AD ให้เท่ากับ BA, ลาก DC

จะต้องพิสูจน์ว่า $B\hat{C}D$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ $\because$ AC = AB, $\therefore A\hat{C}B = A\hat{B}C$

และ $\because$ AC = AD, $\therefore A\hat{C}D = A\hat{D}C$

$\therefore A\hat{C}B + A\hat{C}D = A\hat{B}C + A\hat{D}C$

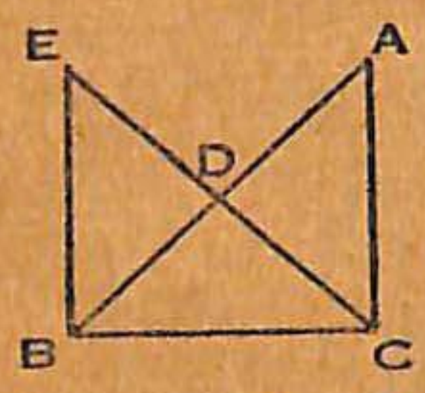
หรือ $B\hat{C}D = A\hat{B}C + A\hat{D}C$

แต่ $B\hat{C}D + A\hat{B}C + A\hat{D}C = ๑๘๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore B\hat{C}D = ๙๐^\circ$

Q.E.D.

๒๕. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากของรูป △ มุมฉากไปยังมุมฉาก จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็น △ มุมฉากที่ C รูปหนึ่ง D เป็นจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉาก AB ลาก CD

จะต้องพิสูจน์ว่า $DC = \frac{๑}{๒} AB$

พิสูจน์ ต่อ CD ตรงออกไปถึงจุด E

ทำ DE ให้เท่ากับ DC

ลาก EB

ใน $\triangle$ BDE กับ $\triangle$ DAC

$$\therefore \begin{cases} DE = DC & \text{(สร้าง)} \\ BD = DA & \text{(โจทย์)} \\ B\hat{D}E = A\hat{D}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

$\therefore E\hat{B}D = D\hat{A}C,\ EB = AC$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore E\hat{B}D + D\hat{B}C = D\hat{A}C + D\hat{B}C$

แต่ $D\hat{A}C + D\hat{B}C =$ หนึ่งมุมฉาก ($A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก)

$\therefore E\hat{B}D + D\hat{B}C$ หรือ $E\hat{B}C =$ หนึ่งมุมฉาก

ใน $\triangle$ EBC กับ $\triangle$ ABC

$$\therefore \begin{cases} EB = AC & \\ BC \quad \text{ด้านร่วม} & \\ E\hat{B}C = A\hat{C}B & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore EC = AB$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

แต่ $DC = \frac{๑}{๓} EC$

$\therefore DC = \frac{๑}{๓} AB$ ด้วย

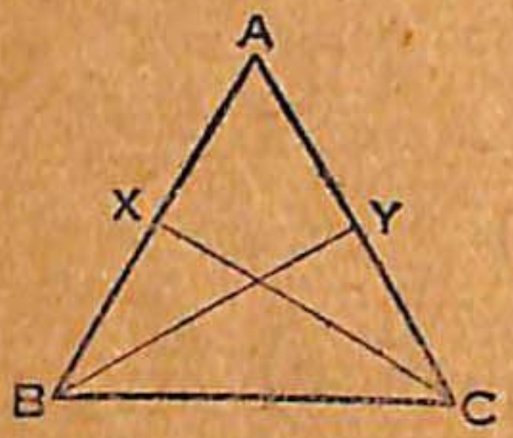
Q.E.D.

หน้า 49

แบบฝึกหัดที่ ๑๐

(เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๗ แล้ว)

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นตั้งฉากสองเส้นซึ่งลากจากปลายด้านฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปยังด้านตรงข้ามย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็น △ หน้าจั่วรูปหนึ่ง BC เป็นฐาน, BY, CX เป็นเส้นลากจากจุด B, และ C ไปตั้งฉากกับ AC, AB ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $BY = CX$

พิสูจน์ ใน △ XBC กับ △ BYC

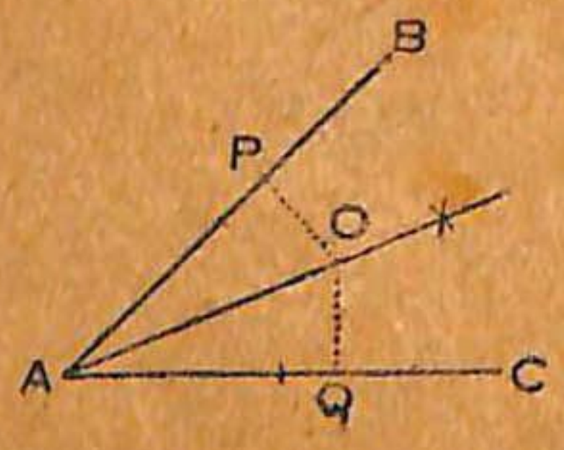
$$\therefore \begin{cases} \widehat{XBC} = \widehat{YCB} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๕)} \\ \widehat{BXC} = \widehat{BYC} & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \\ BC \quad \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore$ △ XBC = △ BYC ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore BY = CX$

Q E.D

๒. ระยะจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแบ่งครึ่งมุม ๆ หนึ่งไปที่แขนทั้งสองย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ $B\hat{A}C$ เป็นมุม ๆ หนึ่ง

O เป็นจุดใด ๆ บน AO ซึ่งเป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{A}$

ลาก OP, OQ ให้ตั้งฉากกับ AB, AC

จะต้องพิสูจน์ว่า $OP = OQ$

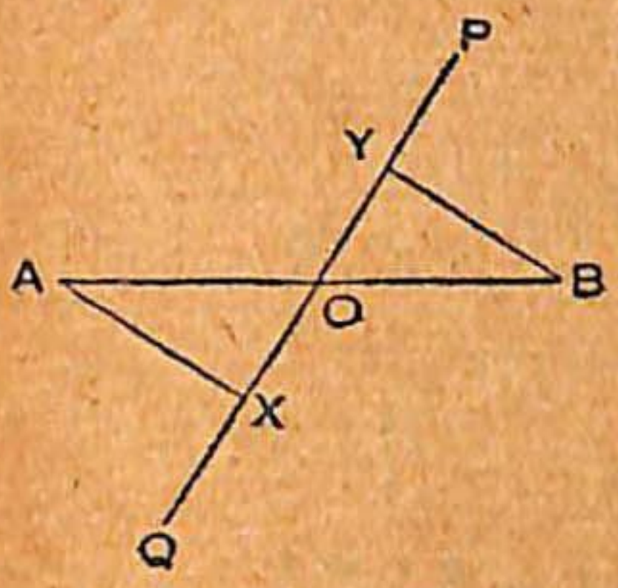
พิสูจน์ ใน $\triangle APO$ กับ $\triangle AQO$

$$\therefore \begin{cases} \hat{APO} = \hat{AQO} & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ \hat{OAP} = \hat{OAQ} & \text{(โจทย์)} \\ OA \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore OP = OQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

Q.E.D.

๓. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB มีเส้นตั้งฉาก AX, BY ลากจาก A และ B ไปตั้งฉากกับเส้นตรงนั้น จงพิสูจน์ว่า $AX = BY$



กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง O เป็นจุดกึ่งกลาง, PQ เป็นเส้นตรงลากผ่านจุด O ลาก AX, BY ให้ตั้งฉากกับ PQ

จะต้องพิสูจน์ว่า $AX = BY$

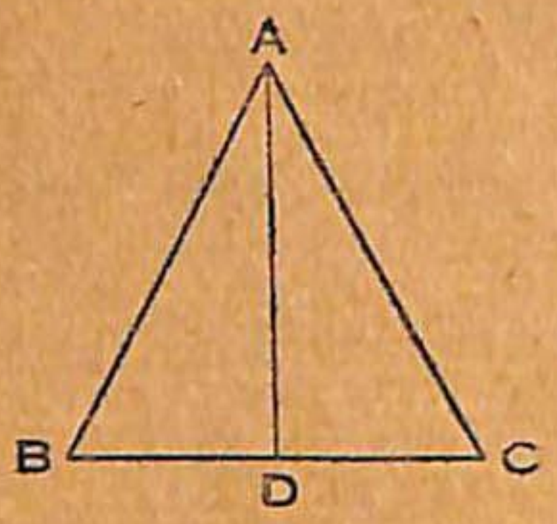
พิสูจน์ ใน $\triangle AXO$ กับ $\triangle BYO$

$$\therefore \begin{cases} \hat{AOX} = \hat{BOY} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ \hat{AXO} = \hat{BYO} & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ AO = BO & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore AX = BY$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

Q.E.D.

๔. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมตั้งฉากกับฐานรูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง
AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A และตั้งฉากกับฐาน BC ที่ D
จะต้องพิสูจน์ว่า △ ABC เป็น △ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน △ ABD กับ △ ACD

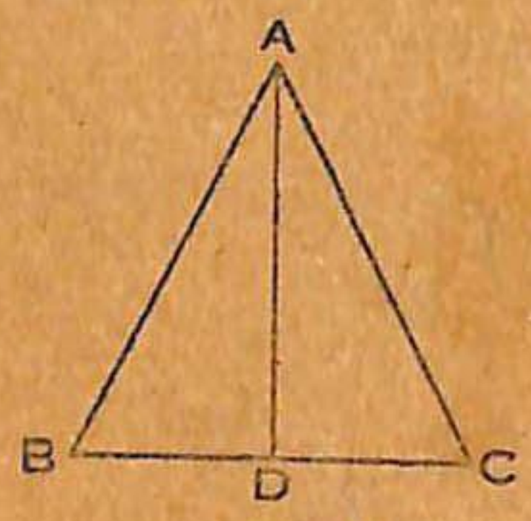
$$\therefore \begin{cases} A\hat{D}B = A\hat{D}C & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ B\hat{A}D = D\hat{A}C & \text{(โจทย์)} \\ AD \quad \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore$ AB = AC (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ △ ABC เป็น △ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๕. ถ้าเส้นตั้งฉากลากจากจุดยอดของรูป △ ไปที่ด้านฐานและแบ่งครึ่งฐานของรูป △ นั้น △ นั้นจะเป็น △ หน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง
AD เป็นเส้นลากจากมุมยอด A มาแบ่งครึ่งฐาน BC และตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D
จะต้องพิสูจน์ว่า ABC เป็น △ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ใน △ ABD กับ △ ADC

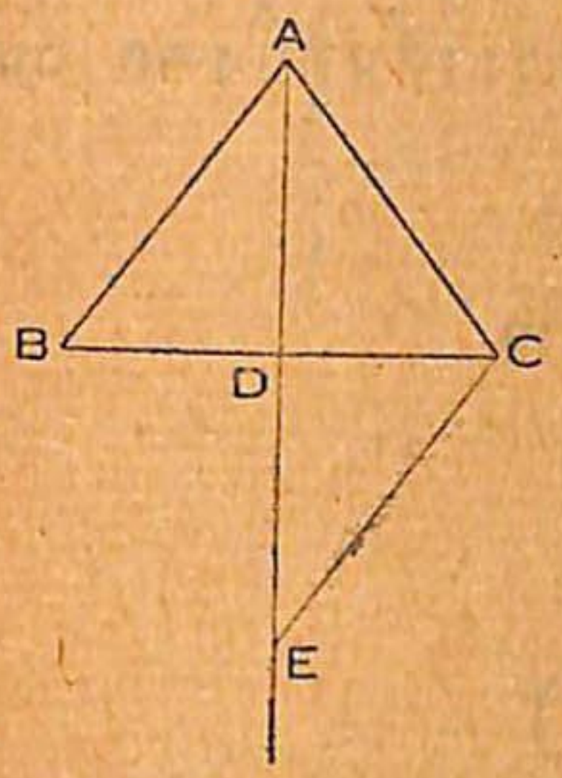
$$\therefore \begin{cases} BD = DC & \text{(โจทย์)} \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ B\hat{D}A = A\hat{D}C & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore$ AB = AC (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๖. ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของ $\triangle$ แบ่งครึ่งฐานด้วย รูป $\triangle$ นั้นเป็น $\triangle$ หน้าจั่ว



กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด A มาแบ่งครึ่งฐาน BC ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

พิสูจน์ ต่อ AD ตรงออกไปถึง E ทำ DE ให้เท่ากับ AD

ลาก EC

ใน $\triangle$ ABD กับ $\triangle$ CDE

$$\therefore \begin{cases} DB = DC & \text{(โจทย์)} \\ AD = DE & \text{(สร้าง)} \\ B\hat{D}A = C\hat{D}E & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

$\therefore$ AB = EC และ $B\hat{A}D = C\hat{E}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

แต่ $B\hat{A}D = D\hat{A}C$, $\therefore$ $C\hat{E}D = D\hat{A}C$

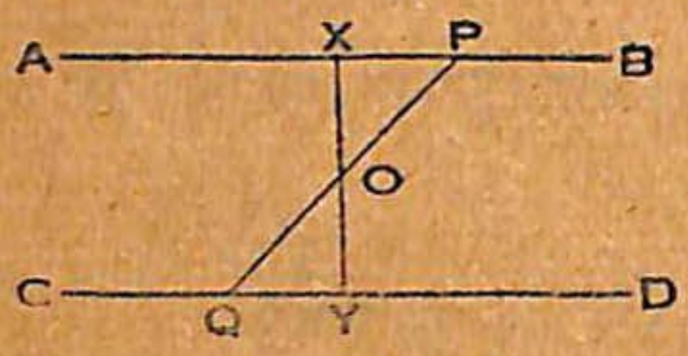
และ $\therefore$ EC = AC (ทฤษฎีบทที่ ๖)

$\therefore$ AB = AC

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๗. จงพิสูจน์ว่า จุดกึ่งกลางของเส้นตรงใด ๆ ซึ่งตัดเส้นตรงขนานกันสองเส้น และไปจดเส้นขนานนั้น จะมีระยะห่างจากเส้นขนานทั้งสองเท่ากัน



กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานกันสองเส้น

PQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง จดเส้นขนานที่ P และ Q; O เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ

จาก O ลากเส้น XOY ให้ตั้งฉากกับคู่ขนาน

จะต้องพิสูจน์ว่า OX = OY

พิสูจน์ ใน $\triangle$ OXP กับ $\triangle$ OQY

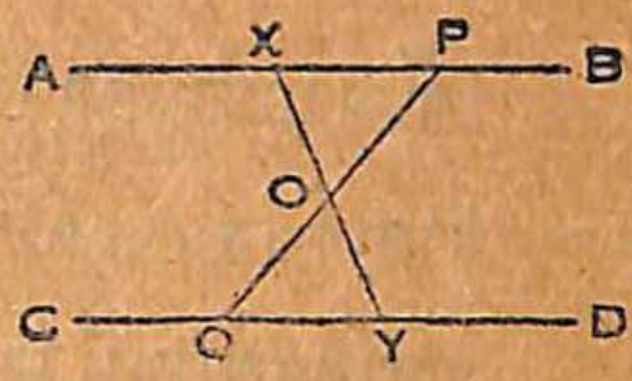
$\therefore$ $\begin{cases} P\hat{X}O = Q\hat{Y}O & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ OP = OQ & \text{(โจทย์)} \\ X\hat{O}P = Q\hat{O}Y & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$

$\therefore$ OX = OY (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

Q.E.D.

๘. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากไปในระหว่างเส้นขนานสองเส้น และไปจดเส้นขนานทั้งสองนั้น และเส้นตรงนั้นถูกแบ่งครึ่ง จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงอื่น ๆ ซึ่งลากผ่านจุดกึ่งกลางนั้น และไปจดเส้นขนานทั้งสองจะถูกแบ่งครึ่งที่จุดนั้น

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นตรงสอง



เส้นขนานกัน, PQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

จดเส้นขนานที่ P และ Q

O เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ

ลาก XOY ผ่าน O และให้จดเส้นขนานที่ X และ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = OY$

พิสูจน์ ใน $\triangle OXP$ กับ $\triangle OQY$

$$\therefore \begin{cases} OP = OQ & \text{(โจทย์)} \\ \hat{XPO} = \hat{OQY} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๑๔)} \\ \hat{XOP} = \hat{QOY} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

$$\therefore OX = OY \quad \text{(ทฤษฎีบทที่ ๑๗)}$$

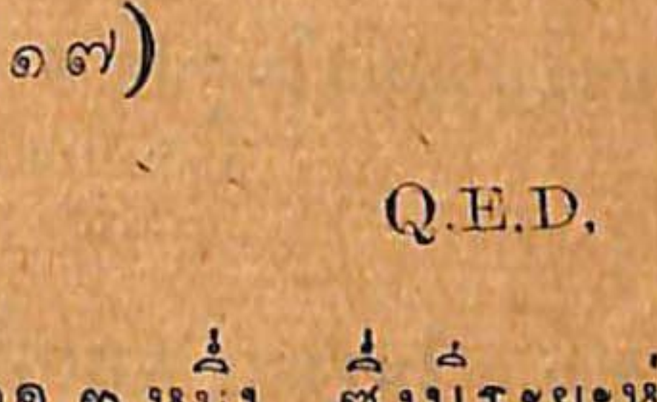
Q.E.D.

๙. ถ้าเส้นตรงสองเส้นลากผ่านจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นขนานสองเส้นเท่ากัน และตัดเส้นขนานทั้งสอง จงพิสูจน์ว่าส่วนของเส้นขนานที่ถูกตัดจะเท่ากัน

กำหนดให้ AB, CD เป็นเส้นขนานสองเส้น

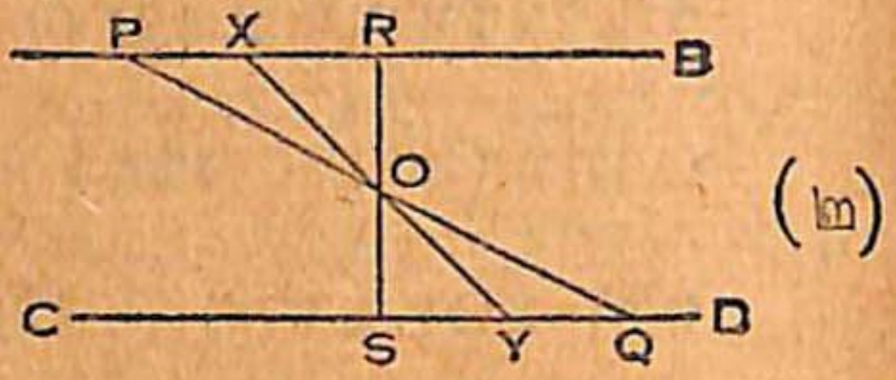
O เป็นจุด ๆ หนึ่งมีระยะห่างจาก AB กับ CD เท่า ๆ กัน

XOY กับ POQ เป็นเส้นตรงสอง



(๑)

เส้นฉากผ่านจุด O จดเส้นขนานที่ X, Y กับ P, Q
ฉากเส้น ROS ผ่าน O ให้ตั้งฉากกับเส้นขนานที่ R และ S
จะต้องพิสูจน์ว่า PX = YQ



(๒)

พิสูจน์ ใน △ POR กับ △ OSQ

$$\therefore \begin{cases} OR = OS & \text{(โจทย์)} \\ \hat{PRO} = \hat{OSQ} & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ \hat{POR} = \hat{SOQ} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

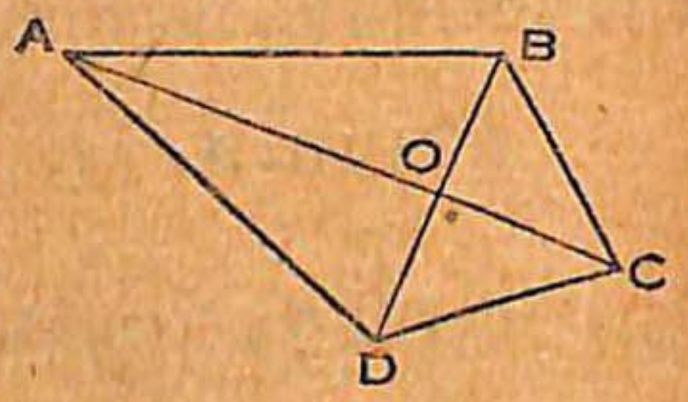
$\therefore$ PR = SQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ใน △ ROX กับ △ YOS ได้ว่า RX = YS
โดยวิธีบวกกันในรูปที่ ๑ หรือลบกันในรูปที่ ๒ ได้ PX = YQ

Q.E.D.

๑๐. ในรูป □ ABCD ถ้า AB = AD และ BC = DC จง พิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุม AC แบ่งครึ่ง $\hat{BAD}$, $\hat{BCD}$ และ AC ตัด BD เป็นมุมฉาก.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง



มี AB = AD ; BC = DC

AC, BD เป็นเส้นทะแยงมุมตัดกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) AC แบ่งครึ่ง $\hat{BAD}$ กับ $\hat{BCD}$

(๒) AC ตัด BD เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ (๑) ใน △ ABC กับ △ ADC

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ BC = DC & (\text{โจทย์}) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore B\hat{A}C = C\hat{A}D$; $B\hat{C}A = A\hat{C}D$

$\therefore$ AC ก็เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}D$ กับ $B\hat{C}D$

(๒) ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle AOD$

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & (\text{โจทย์}) \\ B\hat{A}O = O\hat{A}D & (\text{พิสูจน์แล้ว}) \\ AO & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore A\hat{O}B = A\hat{O}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

และมุมทั้งสองนี้เป็นมุมประชิดกัน

$\therefore$ AO ก็ตั้งได้ฉากกับ BD หรือ AC ตัด BDเป็นมุมฉาก

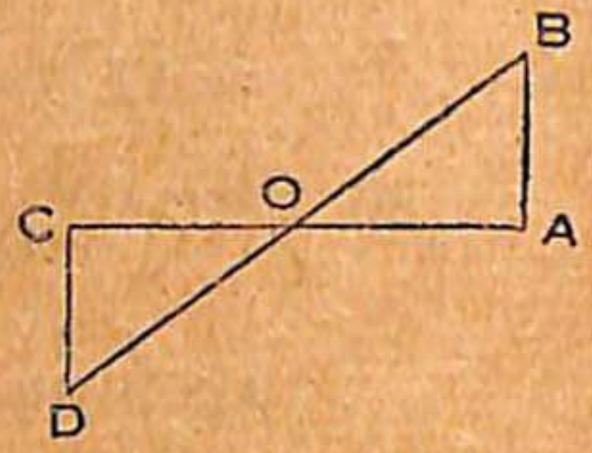
Q.E.D.

๗๑. พนักงานแผนที่คนหนึ่งอยากทราบความกว้างของแม่น้ำแห่งหนึ่ง ซึ่งเขาข้ามไปไม่ได้ เขาจึงยืนอยู่ที่จุด A ริมฝั่งแม่น้ำแล้วเล็งดู B ซึ่งเป็นที่หมายแห่งหนึ่งอยู่ตรงข้ามคนละฝั่ง และเขาลากเส้น AC ให้ตั้งฉากกับ AB แล้วทำเครื่องหมาย O ให้อยู่กึ่งกลาง AC จาก C เขาเดินตรงไป ให้ตั้งฉากกับ AC จนถึงจุด D ซึ่ง

เป็นจุดที่เขาแลเห็น O และ B เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน เขาจึงวัด CD จงพิสูจน์ว่า CD เป็นความกว้างของแม่น้ำ.

พิสูจน์ ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle COD$

$$\therefore \begin{cases} OA = OC & \text{(สร้าง)} \\ \widehat{OAB} = \widehat{OCD} & \text{(มุมฉาก)} \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$



$$\therefore AB = CD$$

นั่นคือวัด CD ก็ได้ความกว้างของแม่น้ำ

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๑

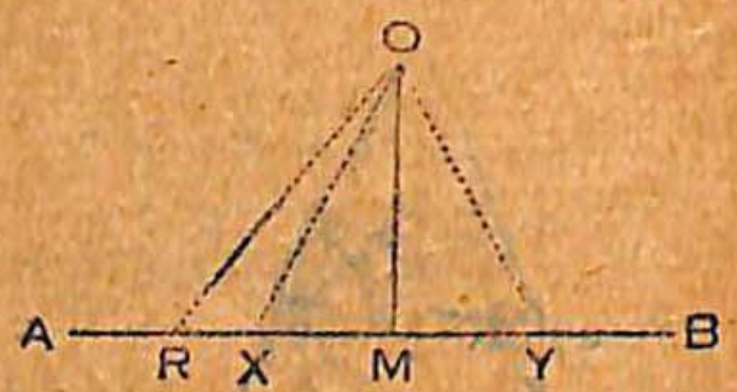
เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๑๙ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นเฉียง (obliques) ซึ่งทำมุมเท่ากันกับเส้นตั้งฉากจะยาวเท่ากัน.

กำหนดให้ OM ตั้งฉากกับ AB ที่จุด M

OX, OY เป็นเส้นเฉียง ซึ่ง

$\widehat{XOM} = \widehat{MOY}$



จะต้องพิสูจน์ว่า $OX = OY$

พิสูจน์ $\therefore$ OM เป็นเส้นตั้งได้ฉาก

$\therefore$ $\widehat{XOM}, \widehat{MOY}$ ต่างก็เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{OXM}, \widehat{OYM}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

แต่ $\widehat{XOM} = \widehat{MOY}$ (โจทย์)

$\therefore \widehat{OXM} = \widehat{OYM}$

$\therefore$ $OX = OY$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

Q.E.D.

๒. เส้นเฉียงสองเส้น เส้นหนึ่งทำมุมกับเส้นตั้งฉากเล็กกว่าเส้นเฉียงอีกเส้นหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า เส้นเฉียงที่ทำมุมกับเส้นดงฉากเล็กกว่าย่อมจะสั้นกว่าอีกเส้นหนึ่ง

ให้ OR กับ OY เป็นเส้นเฉียงอยู่คนละทางของ OM

ถ้า $\widehat{YOM} < \widehat{MOR}$ (ดูรูปข้อ ๑)

จะต้องพิสูจน์ว่า $OY < OR$

พิสูจน์ $\widehat{ROM}$ เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{ORM}$

$\widehat{MOY}$ เป็นมุมประกอบมุมฉากกับ $\widehat{OYM}$

แต่ $\widehat{MOY}$ เล็กกว่า $\widehat{ROM}$ (โจทย์)

$\therefore$ $\widehat{OYM}$ ก็ใหญ่กว่า $\widehat{ORM}$

$\therefore$ OR ก็ยาวกว่า OY (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

ถ้า OR กับ OX เป็นเส้นเฉียงอยู่ทางเดียวกันของ OM

และให้ $\widehat{XOM}$ เล็กกว่า $\widehat{ROM}$

ฉาก OY ให้อยู่คนละทางของ OM ทำ $\widehat{MOY} = \widehat{XOM}$

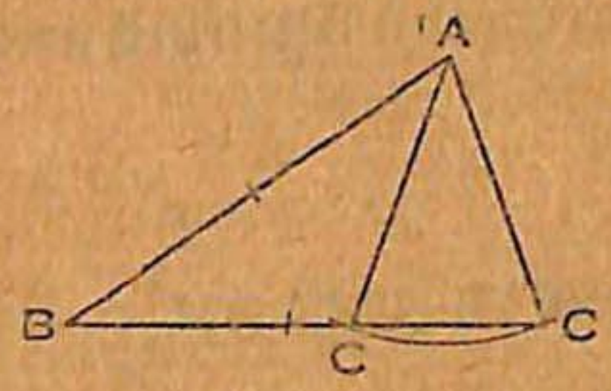
$\therefore$ $OY = OX$ (โดยข้อ ๑)

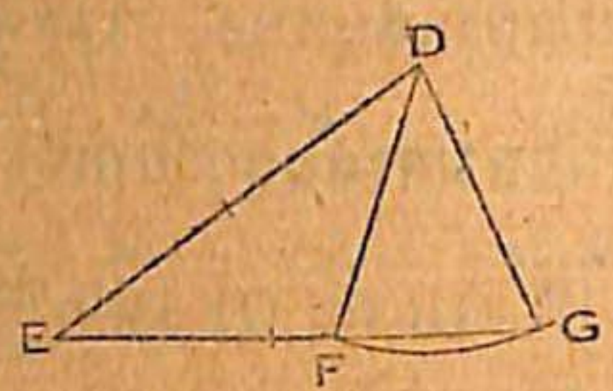
และ OR ยาวกว่า OY (โดยพิสูจน์ข้างบนนี้)

$\therefore$ OR ก็ยาวกว่า OX ด้วย

Q.E.D.

๓. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้านด้านต่อด้านและมีมุมตรงข้ามกับด้านเท่า ๆ กันด้วย จงพิสูจน์ว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านเท่าอีกด้านหนึ่งย่อมเท่ากัน หรือมิฉะนั้นก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน และถ้ามุมตรงข้ามกับด้านเท่า ๆ กันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกอย่าง.





กำหนดให้ ABC, DEF เป็น $\triangle$ สองรูป ซึ่งมี $AB = DE$

$AC = DF$

$\hat{ABC} = \hat{DEF}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{ACB} = \hat{DFE}$ หรือเป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน

และถ้า $\hat{ACB} = \hat{DFE}$; $\triangle ABC = \triangle DEF$ ด้วย

พิสูจน์ ถ้า $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\triangle ABC = \triangle DEF$ (ทฤษฎีบทที่๑๗)

$\therefore \hat{ACB}$ ก็ $= \hat{DFE}$

แต่ถ้า $\hat{BAC}$ ไม่เท่ากับ $\hat{EDF}$ ให้ $\hat{BAC}$ ใหญ่กว่า $\hat{EDF}$

ลาก DG ทำ $\hat{EDG} = \hat{BAC}$ ตัด EF ต่อที่ G

$\therefore \triangle ABC = \triangle DEG$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore DG = AC$, $\hat{DGF} = \hat{ACB}$

แต่ $DF = AC$ (โจทย์)

$\therefore$ DG = DF

$\therefore$ $\widehat{DGF} = \widehat{DFG}$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และ $\therefore$ $\widehat{DFE}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $\widehat{DFG}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑)

$\therefore$ $\widehat{DFE}$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกับ $\widehat{DGF}$ ด้วย

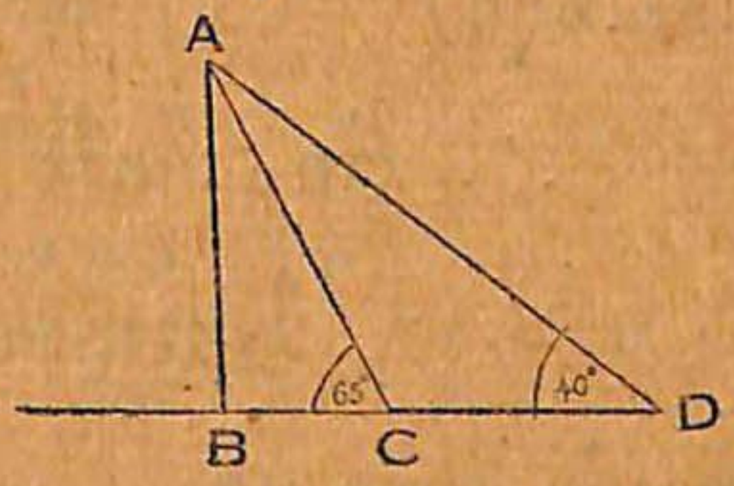
แต่ $\widehat{DGF} = \widehat{ACB}$ (โดยพิสูจน์แล้ว)

$\therefore$ $\widehat{DFE}$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกันกับ $\widehat{ACB}$

Q.E.D.

๔. AB เป็นเสาธงเสาหนึ่งมีเส้นระดับ (Horizontal line) เส้นหนึ่งลากจาก B ที่โคนเสาธงผ่านจุด C และ D ซึ่งห่างกัน ๒๗ ฟุต จงเขียนรูปนี้ (ใช้ $\widehat{BCA}$ และ $\widehat{BDA}$ เป็น ๖๕° และ ๔๐° ตามลำดับ มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๑๐ ฟุต) แล้ววัดหาส่วนสูงของเสาธง.

วิธีสร้าง ลากเส้นตรง CD ยาว ๒.๗ ซม. แทน ๒๗ ฟุต, แล้วต่อ DC ตรงไปที่ C



ทำมุม $\widehat{ACB} = ๖๕°$, ที่ D ทำ $\widehat{CDA} = ๔๐°$

ให้ CA, DA พบกันที่ A ลาก AB ให้ตั้งฉากกับ CD และพบ DC ต่อที่ B

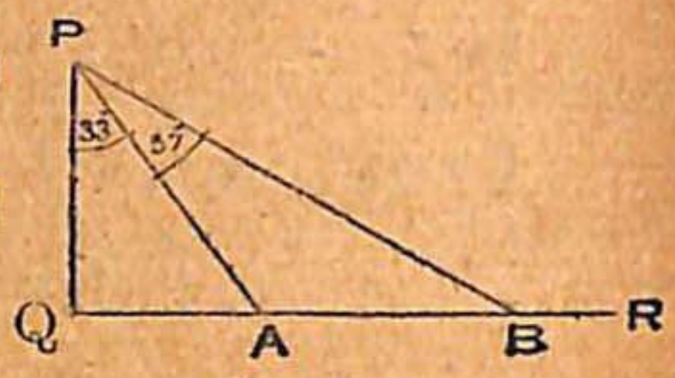
AB จึงแทนเสาธงวัดได้ ๓.๗ ซม. (ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

$\therefore$ เสาธงนี้สูง ๓๗ ฟุต ตอบ

๕. PQ เป็นประภาคารแห่งหนึ่ง P เป็นยอดประภาคาร จากจุด P นี้เห็นเรือสองลำ A และ B ทอดสมออยู่ทางทิศใต้ของประภาคาร และรู้ว่า PQ = ๑๒๖ ฟุต $\widehat{PAQ} = ๕๗°$, $\widehat{PBQ}$ เท่ากับ ๓๓°

จงเขียนแผนผังใช้มาตราส่วน ๑" แทน ๑๐๐ ฟุต แล้ววัดหาระยะจาก A ถึง B ว่าเป็นกี่ฟุต.

ตาก PQ ให้ยาว ๑.๒๖ นิ้วแทนประภาคารแห่งหนึ่ง จาก Q ตาก QR ให้ได้ฉากกับ PQ, A และ B อยู่บนเส้น QR



เรารู้ว่า $P\hat{A}Q = ๕๗^\circ$

$\therefore \quad Q\hat{P}A = ๙๐^\circ - ๕๗^\circ = ๓๓^\circ$

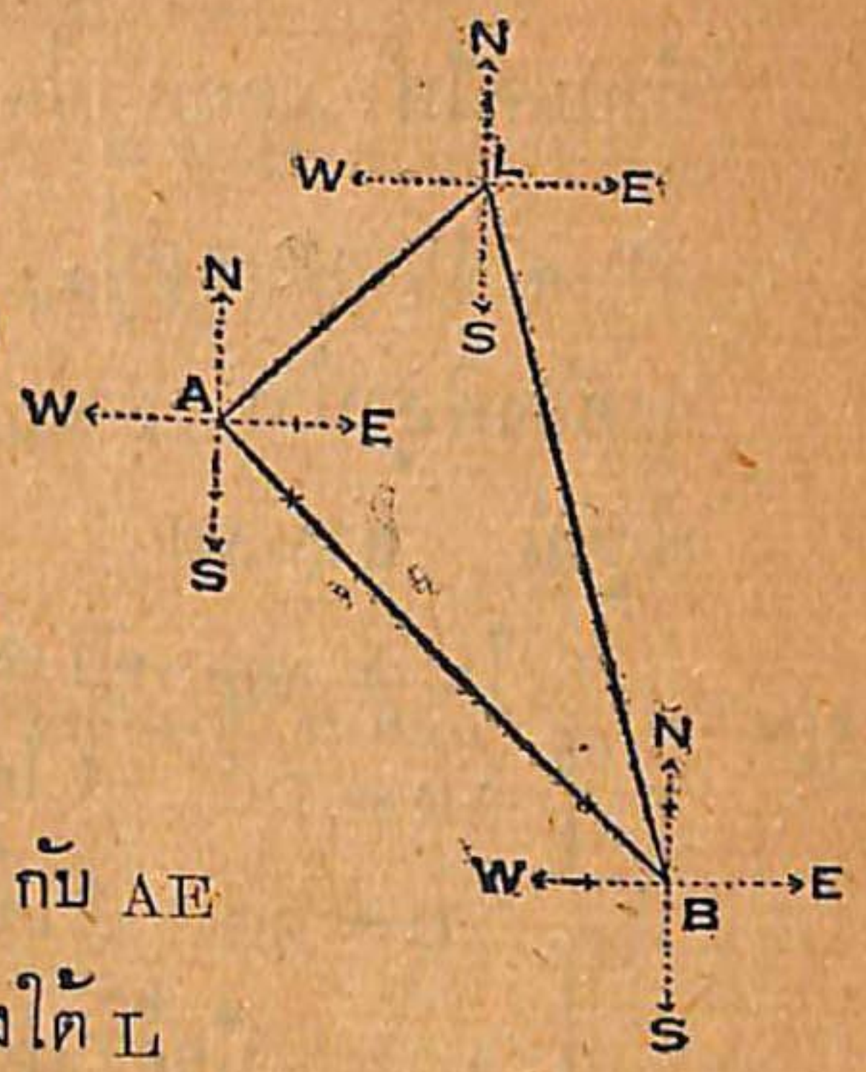
ที่ P ให้ทำ $Q\hat{P}A$ กาง ๓๓° ตัด QR ที่ A

ในทำนองเดียวกันตาก PB ทำมุม $Q\hat{P}B$ ให้กาง $๙๐^\circ - ๓๓^\circ = ๕๗^\circ$ ตัด QR ที่ B และวัด AB จะได้ ๑.๑๒ นิ้ว (ให้นักเรียนสร้างรูปเองให้ถูก)

$\therefore$ เรือ A กับเรือ B อยู่ห่างกัน ๑๑๒ ฟุต

๖. L เป็นประภาคารแห่งหนึ่ง A และ B เป็นเรือสองลำอยู่ห่างกัน ๖๐๐ หลา A อยู่ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ของ L และ B อยู่ ๑๕° ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของ L ในเวลาเดียวกันนั้นเองแลเห็นเรือ B อยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของ A จงเขียนแผนผัง (๑" แทน ๒๐๐ หลา) และวัดระยะจากประภาคารกับเรือลำหนึ่งว่าห่างกันเท่าไร

วิธีสร้าง กำหนดจุด A ลงก่อน ลาก AB ให้ไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของ A ให้ AB ยาว ๓ นิ้ว แทนระยะระหว่างเรือสองลำ



ประภาคาร L ตั้งอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของ A

∴ AL ก็แบ่งครึ่งมุมระหว่าง AN กับ AE

และ B อยู่ทาง ๑๕° ตะวันออกเฉียงใต้ L

∴ ในทำนองเดียวกันถ้าดูจาก B ไป ประภาคาร L ก็จะอยู่ ๑๕° ตะวันตกเฉียงเหนือของ B

∴ BL ก็ทำ NBL กาง ๑๕°

โดยวิธีวัด AL = ๑·๗๓ นิ้วใกล้ที่สุด

LB = ๓·๔๖ นิ้วใกล้ที่สุด

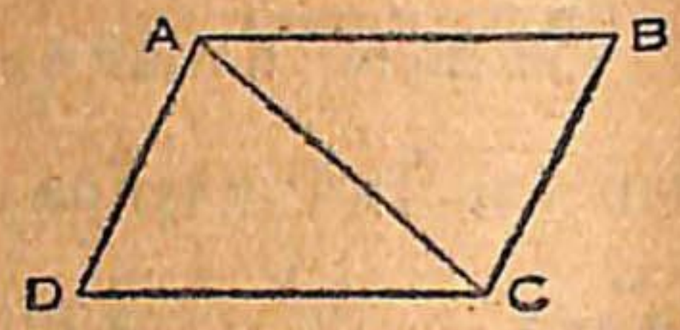
∴ เรือ A อยู่ห่างจากประภาคาร ๓๔๖ หลา
,, B ,, ,, ,, ๖๙๒ หลา } ตอบ

(รูปนี้ย่อลงครึ่งหนึ่ง)

แบบฝึกหัดที่ ๑๒

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๒๑ แล้ว

๑. ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่ากัน รูป □ นั้นย่อมเป็น □ ด้านขนาน



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

$AB = CD,\ AD = BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็น □ ด้านขนาน

พิสูจน์ ลาก AC

ใน $\triangle ABC$ กับ $\triangle ACD$

$\therefore \begin{cases} AB = DC & \text{(โจทย์)} \\ AD = BC & \text{(โจทย์)} \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ACD$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

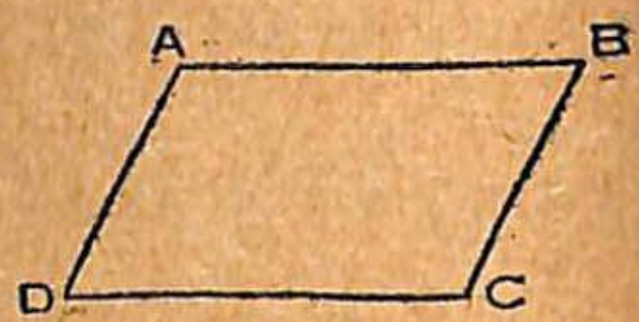
$\therefore B\hat{A}C = A\hat{C}D$ และ $A\hat{C}B = C\hat{A}D$ ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore AB \,//\, CD$ และ $BC \,//\, AD$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

$\therefore$ □ ABCD ก็เป็น □ ด้านขนาน

Q.E.D.

๒. ถ้ามุมตรงข้ามของรูป □ เท่ากัน จงชี้ให้เห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

ซึ่งมี $A\hat{B}C = C\hat{D}A,\ D\hat{A}B = B\hat{C}D$

จะต้องพิสูจน์ว่า □ ABCD เป็น □ ด้านขนาน

พิสูจน์ $\therefore A\hat{B}C = C\hat{D}A,\ D\hat{A}B = B\hat{C}D$

$\therefore A\hat{B}C + D\hat{A}B = C\hat{D}A + B\hat{C}D$

นั่นคือมุมประชิดสองมุมรวมกัน $= \frac{1}{2}$ ของผลบวกของมุมทั้งสี่

แต่มุมทั้ง ๔ รวมกัน = ๔ มุมฉาก

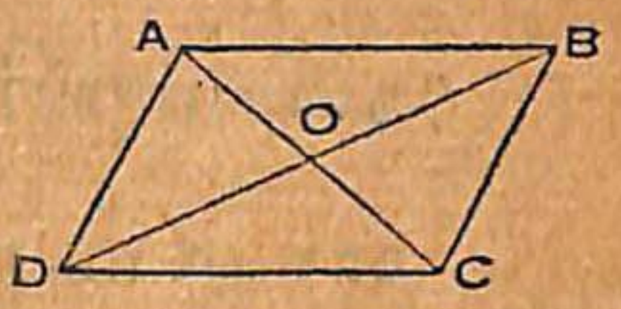
∴ มุมประชิดสองมุมรวมกัน = ๒ มุมฉาก

∴ ด้านตรงข้ามก็ขนานกัน (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

∴ รูป □ นั้นก็เป็น □ ด้านขนาน

Q.E.D.

๓. ถ้าเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมแบ่งครึ่งกันและกัน จงพิสูจน์ว่าสี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

เส้นทะแยงมุม AC, BD ตัดแบ่งครึ่งกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า ABCD เป็น □ ด้านขนาน

พิสูจน์ ใน △ AOD กับ △ OBC

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & \text{(โจทย์)} \\ DO = OB & \text{(โจทย์)} \\ A\hat{O}D = B\hat{O}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

∴ △ AOD = △ OBC (ทฤษฎีบทที่ ๔)

∴ AD = CB และ $O\hat{A}D = O\hat{C}B$ ซึ่งเป็นมุมแย้ง

∴ AD ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

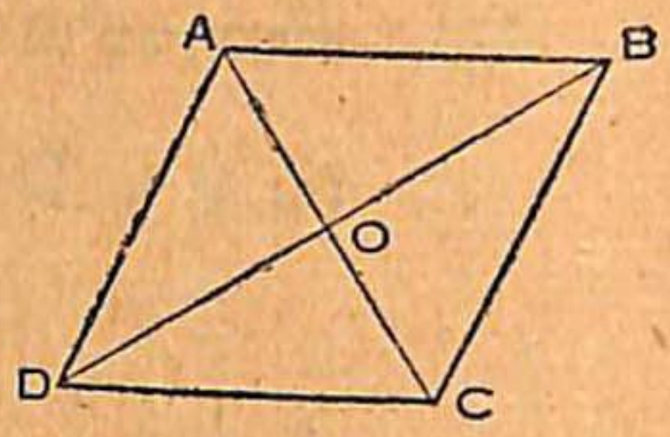
∴ AB กับ CD ก็ขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

∴ □ ABCD ก็เป็น □ ด้านขนาน

Q.E.D.

๔. จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตัดครึ่งกันเป็นมุมฉาก

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ขนม



เปียกปูนรูปหนึ่ง

AC และ BD เป็นเส้นทะแยงมุม ตัดกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ว่า $AO = OC,\ DO = OB$

และ AC กับ BD ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O

พิสูจน์ ใน $\triangle AOD$ กับ $\triangle ODC$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๒๑ บทแทรกที่ ๓)} \\ DO \quad \text{เป็นด้านร่วม} & \\ AD = DC & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$$\therefore\ A\hat{O}D = D\hat{O}C \quad \text{(ทฤษฎีบทที่ ๗)}$$

และเป็นมุมประชิดกัน, $\therefore$ ต่างก็เป็นมุมฉาก

และ $\therefore$ AC กับ BD ก็ตัดครึ่งกันเป็นมุมฉากที่ O

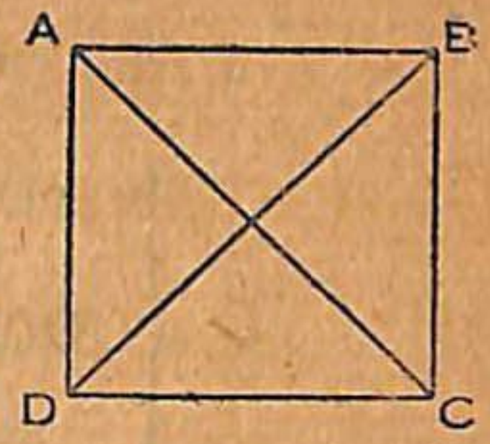
Q.E.D.

๕. ถ้าเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า มุมทุกมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นต่างก็เป็นมุมฉาก

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

เส้นทะแยงมุม AC = BD

จะต้องพิสูจน์ว่า มุมทุกมุมของ □ กางมุม



ฉ ๙๐°

พิสูจน์ ใน △ ADC กับ △ DCB

$$\therefore \begin{cases} AD = BC \\ DC \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ AC = BD \quad \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore A\hat{D}C = D\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

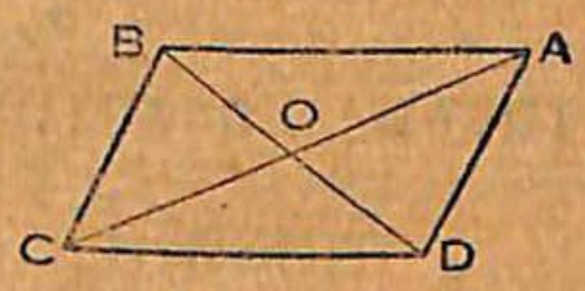
และ $\therefore$ AD ขนานกับ BC (โจทย์)

$\therefore A\hat{D}C$ กับ $D\hat{C}B$ ต่างก็เป็นมุมฉาก (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

Q.E.D

๖. จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้นยาวไม่เท่ากัน

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่งซึ่งไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก



AC, BD เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า AC ยาวไม่เท่า BD

พิสูจน์ $\therefore A\hat{D}C + B\hat{C}D = ๒$ ฉ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และต่างก็ไม่เป็นมุมฉาก (โจทย์)

$\therefore A\hat{D}C$ ก็ไม่เท่ากับ $B\hat{C}D$

ใน $\triangle$ ADC กับ $\triangle$ BDC

$\therefore$ { AD = BC
DC เป็นด้านร่วม
$A\hat{D}C$ ไม่เท่ากับ $B\hat{C}D$

$\therefore$ $\triangle$ ADC ก็ไม่เท่ากับ $\triangle$ BDC (ทฤษฎีบทที่ ๑๙)

$\therefore$ AC ก็ไม่เท่ากับ BD

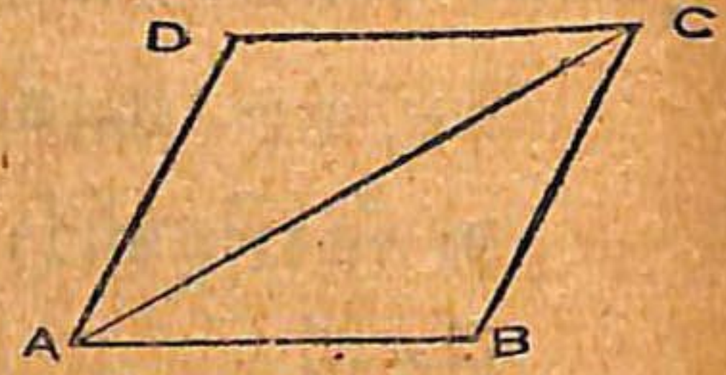
Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๓

(ว่าด้วยเส้นขนานและสี่เหลี่ยมด้านขนาน)

๑. จงพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า ถ้าพับรูปสี่เหลี่ยมขนมเบียกปูนไปตามเส้นทะแยงมุมของมัน รูปสามเหลี่ยมซึ่งอยู่คนละข้างกับรอยพับ อาจทำให้มันทับกันสนิท

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ขนมเบียกปูนรูปหนึ่ง



AC เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้าพับที่ AC รูป $\triangle$ ทั้งสองจะทับกันสนิท

พิสูจน์ ใน $\triangle$ ABC กับ $\triangle$ ADC

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \\ AC \text{ เป็นด้านร่วม} \\ BC = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore C\hat{A}B = C\hat{A}D,\ A\hat{C}B = A\hat{C}D$

∴ เมื่อพับไปตาม AC; AB จะต้องทับ AD; CB ต้องทับ CD

B จุดร่วมของ AB, CB ต้องทับ D จุดร่วมของ AD, CD

เมื่อพับไปตามเส้นทะแยงมุมเส้นใดเส้นหนึ่ง $\triangle$ ก็จะทับกันพอดี

(ภาษาอังกฤษเรียกว่า เส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเบียกปูนเป็น Axis of symmetry ภาษาไทยจะเรียกเส้นแกนก็คงได้)

๒. จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมของรูป □ จัตุรัสต่างก็เป็นเส้นแกน ซึ่งถ้าพับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปตามเส้นนี้แล้ว รูปที่พับจะทับกันสนิท (Axis of symmetry) และจงบอกชื่อเส้นแกนอีกสองเส้นซึ่งถ้าพับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปตามเส้นนั้นแล้ว รูปที่พับจะทับกันสนิท

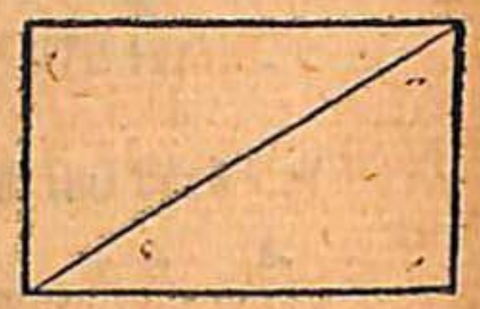
เหมือนข้อ ๑ เราอาจพิสูจน์ได้ว่าเส้นทะแยงมุมของ □ จัตุรัสแบ่งครึ่งมุมที่ลากผ่าน และฉะนั้นสามเหลี่ยมทางข้างเส้นทะแยงมุมก็ทับกันสนิท เมื่อพับตรงเส้นทะแยงมุม

∴ เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสจึงเป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

เส้นแกน (Axis of symmetry) อื่น ๆ ก็คือ เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

Q.E.D.

๓. จงพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าต่างก็แบ่งรูป □ ผืนผ้าออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เส้นทะแยงมุมเป็นเส้นแกนซึ่งถ้าพับรูปไปตามรอยนั้นจะทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปทับกันสนิทหรือไม่ และจะพับตามรอยเส้นแกนใดสองเส้นได้บ้าง จึงจะทำให้รูปที่พับแล้วทับกันสนิท



เส้นทะแยงมุมของรูป □ ผืนผ้าแบ่งรูป □ ออกเป็น △ สองรูปเท่ากันทุกอย่างก็จริง แต่ว่าด้านประชิดยาวไม่เท่ากัน ฉะนั้นเมื่อพับรูปตรงเส้นทะแยงมุม △ จึงไม่ทับกันสนิท

∴ เส้นทะแยงมุมของรูป □ ผืนผ้าจึงไม่เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

เส้นที่จะเป็นเส้นแกน (Axis of symmetry) ได้ คือเส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

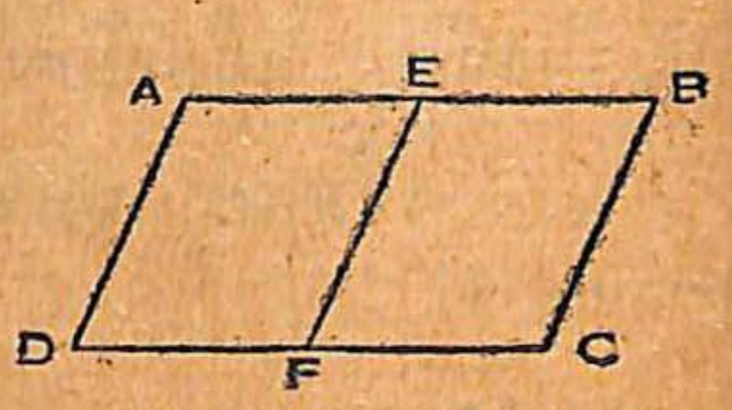
Q.E.D.

๔. ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานชะนิดที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีเส้นแกนใดบ้าง ซึ่งเมื่อพับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิท จงยกเหตุผลประกอบคำตอบ

ให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

E, F เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, CD

เมื่อ DA กับ DC ไม่เท่ากัน



จะพับตรงเส้นทะแยงมุม BD รูป △ ก็ไม่ทับกันสนิท

∴ เส้นทะแยงมุมจึงไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

และ AE = DF (ต่างก็เป็นครึ่งของด้านเท่า AB, DC)

∴ EF ขนานกับ AD (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

∴ $B\hat{E}F = B\hat{A}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $B\hat{A}D$ ไม่ใช่มุมฉาก (โจทย์)

∴ $B\hat{E}F$ ก็ไม่เป็นมุมฉาก

∴ $B\hat{E}F$ ก็ไม่เท่ากับ $A\hat{E}F$

เมื่อพับตรง EF ; EA ก็จะไม่ทับ EB

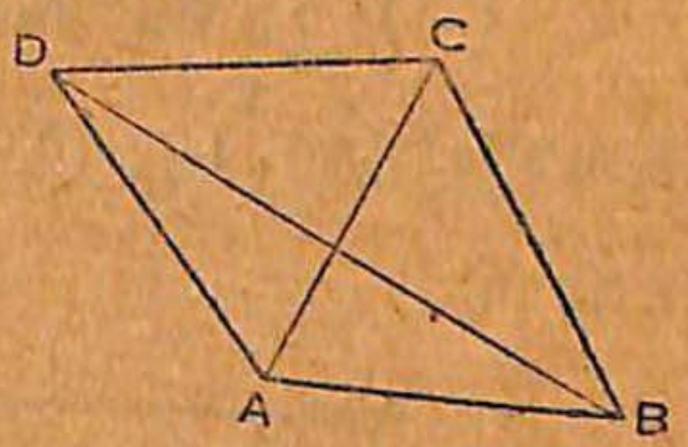
∴ เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม ก็ไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

∴ รูปนี้ก็ไม่มีเส้นแกนใดที่พับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิท

Q.E.D.

๕. ในรูป □ ABCD , AB = AD และ CB = CD แต่ด้านเหล่านี้ไม่เท่ากันทุกด้าน ถามว่าเส้นทะแยงมุมเส้นใดบ้างจะเป็นเส้นแกน ซึ่งถ้าพับรูปไปตามเส้นนั้นแล้วจะทับกันสนิทได้.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง



AB = AD , CB = CD

ด้านเหล่านี้ไม่เท่ากันทุกด้าน

จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นทะแยงมุมเส้นใดที่เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

พิสูจน์ ∵ BA ไม่เท่ากับ BC

$\therefore$ ถ้าพับที่ BD ; BA ก็ไม่ทับ BC พอดี

ดังนั้น BD ก็ไม่ใช่เส้นแกน (Axis of symmetry)

แต่ใน $\triangle$ BAC กับ $\triangle$ DAC

$$\therefore \begin{cases} AB = AD & \text{(โจทย์)} \\ CB = CD & (\ ,,\ ) \\ AC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$\therefore \widehat{BAC} = \widehat{DAC}$; $\widehat{BCA} = \widehat{DCA}$ (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore$ $\triangle$ BAC ก็ทับ $\triangle$ DAC พอดี เมื่อพับที่ AC

$\therefore$ AC ก็เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

Q. E. D.

๖. จงพิสูจน์โดยวิธีวางทับกันว่า

(๑) รูป □ ด้านขนานสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้าด้านประชิดสองด้านของรูปที่หนึ่งยาวเท่ากับด้านประชิดสองด้านของรูปที่สองด้านต่อด้านและมีมุมเท่ากันอีก ๑ มุม.

(๒) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปจะเท่ากัน ถ้าด้านประชิดสองด้านของรูปที่หนึ่ง เท่ากับด้านประชิดสองด้านของรูปที่สอง ด้านต่อด้าน.

กำหนดให้ ABCD , EFGH เป็น □ ด้านขนานสองรูปซึ่งมี

$AB = EF$, $BC = FG$, และ $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$

จะต้องพิสูจน์ว่า รูป □ ABCD วางทับรูป □ EFGH สนิทพอดี

พิสูจน์ ลาก AC , EG

ใน △ ABC กับ △ EFG

$$\therefore \therefore \left\{\begin{array}{l} AB = EF \\ BC = FG \\ \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \end{array}\right\} \quad (\text{โจทย์})$$

$\therefore$ △ ABC ก็ทับรูป △ EFG ได้พอดี (ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore AC = EG$

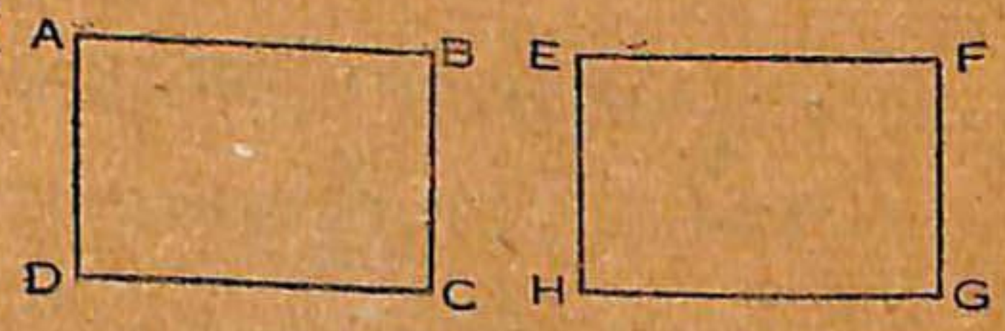
ใน △ ADC กับ △ EHG

$$\therefore \therefore \left\{\begin{array}{l} AC = EG \quad \text{พิสูจน์แล้ว} \\ AD = EH \\ DC = HG \end{array}\right\} (\text{ด้านตรงข้ามของ□ด้านขนานย่อมเท่ากัน})$$

$\therefore$ △ ADC ก็ทับ △ EHG ได้สนิทพอดี (ทฤษฎีบทที่ ๗)

$\therefore$ □ ABCD ก็ทับรูป □ EFGH สนิทพอดี

(๒) ให้ ABCD , EFGH เป็น □ ผืนผ้าสองรูปมี



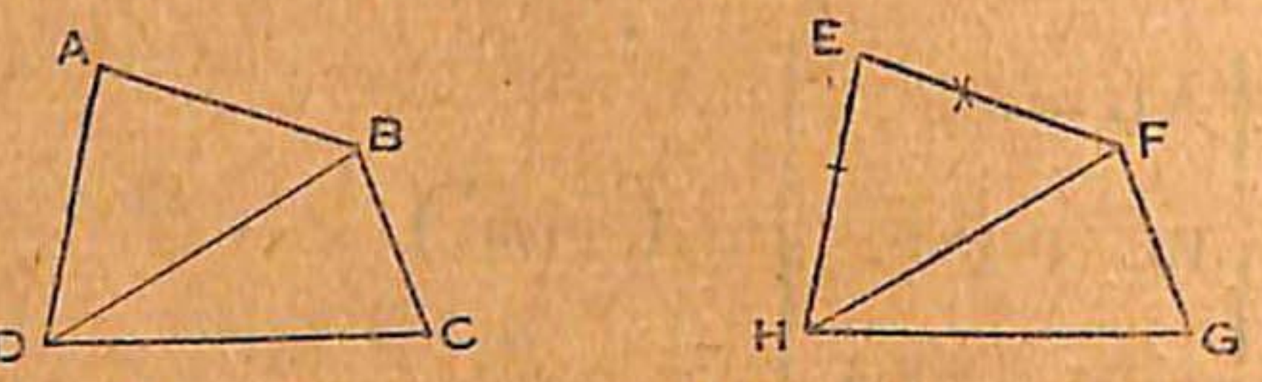
$AB = EF$, $BC = FG$

$\therefore \widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ (ต่างก็เป็นมุมฉาก)

$\therefore$ ABCD ก็ทับ EFGH พอดี (ดังข้อ ๑ ข้างบนนี้)

Q. E. D.

๗. รูปสี่เหลี่ยม ABCD , EFGH สองรูปมีด้าน AB , BC , CD , DA เท่ากับด้าน EF , FG , GH , HE ตามลำดับ และมี $\hat{BAD} = \hat{FEH}$ จงพิสูจน์ว่า สี่เหลี่ยมทั้งสองอาจทับกันสนิท.



กำหนดให้ ABCD , EFGH เป็น □ สองรูป มีด้าน AB , BC, CD , DA เท่ากับด้าน EF , FG , GH , HE ตามลำดับ และมี $\hat{BAD} = \hat{FEH}$

จะต้องพิสูจน์ว่า □ ABCD อาจทับ □ EFGH ได้สนิท

พิสูจน์ ยก △ BAD ทับ △ FEH

ให้ A ทับ E , AB นอนบน EF , และ ∵ $\hat{BAD} = \hat{FEH}$

∴ AD ต้องนอนบน EH และ ∵ AB = EF , AD = EH

∴ จุด B และ D ต้องทับจุด F และ D พอดี

และรูป △ DBC = △ HFG (ทฤษฎีบทที่ ๗)

∴ $\hat{BDC} = \hat{FHG}$ และ $\hat{DBC} = \hat{HFG}$

เช่นนี้ DC , BC ต้องนอนบน HG , FG ตามลำดับ

แต่ DC = HG , BC = FG

∴ จุด C ต้องทับจุด G พอดี

∴ □ ABCD ต้องทับ □ EFGH สนิท

Q.E.D.

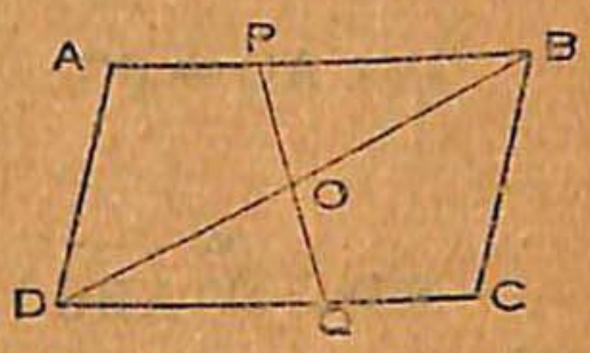
๘. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงใดๆลากผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ไปหยุดที่ด้านตรงข้ามทั้งสอง เส้นตรงนั้นจะถูกแบ่งครึ่งที่จุดนั้น.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

BD เป็นเส้นทะแยงมุมถูกแบ่งครึ่งที่ O

POQ เป็นเส้นตรงลากผ่าน O ไปจดด้าน

AB , DC ที่จุด P และ Q



จะต้องพิสูจน์ว่า PO = OQ

พิสูจน์ ใน △ POB กับ △ QOD

$$\therefore \begin{cases} P\hat{O}B = Q\hat{O}D & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ O\hat{B}P = O\hat{D}Q & \text{(,, ,, ๑๔)} \\ BO = OD & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore$ PO = OQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

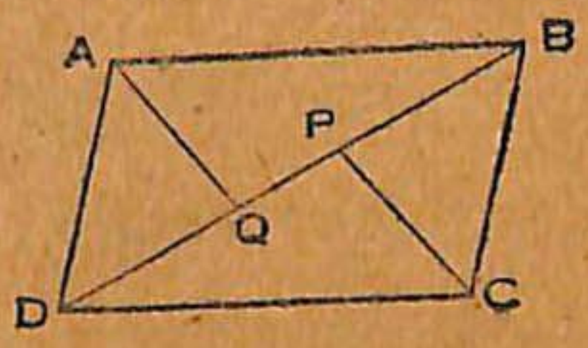
Q.E.D.

๙. จงพิสูจน์ว่าในรูป □ ด้านขนาน เส้นตั้งฉากสองเส้นลากจากมุมตรงข้ามคู่หนึ่งไปยังเส้นทะแยงมุม ซึ่งต่อมุมอีกคู่หนึ่งจะยาวเท่ากัน.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

BD เป็นเส้นทะแยงมุม

AQ , CP ลากตั้งฉากกับ BD



จะต้องพิสูจน์ว่า AQ = PC

พิสูจน์ ใน $\triangle ADQ$ กับ $\triangle CBP$

$$\therefore \begin{cases} \hat{ADQ} = \hat{CBP} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๑๔)} \\ \hat{AQD} = \hat{CPB} & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \\ AD = CB \end{cases}$$

$\therefore AQ = PC$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

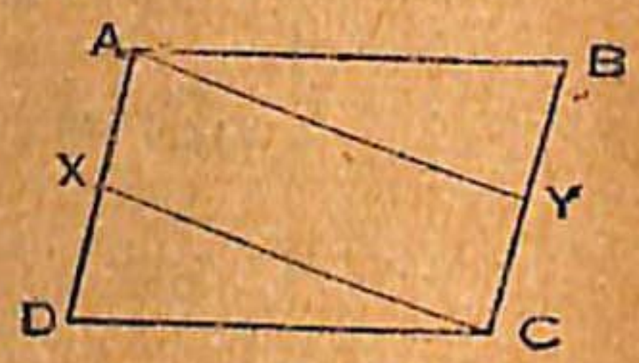
Q.E.D.

๑๐. ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AYCX เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD, BC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า AYCX เป็น □ ด้านขนาน



พิสูจน์ $\therefore AX = \frac{1}{2} AD$ โจทย์

$\therefore YC = \frac{1}{2} BC$,,

แต่ $AD = BC$ และขนานกันด้วย

$\therefore AX = YC$ และขนานกันด้วย

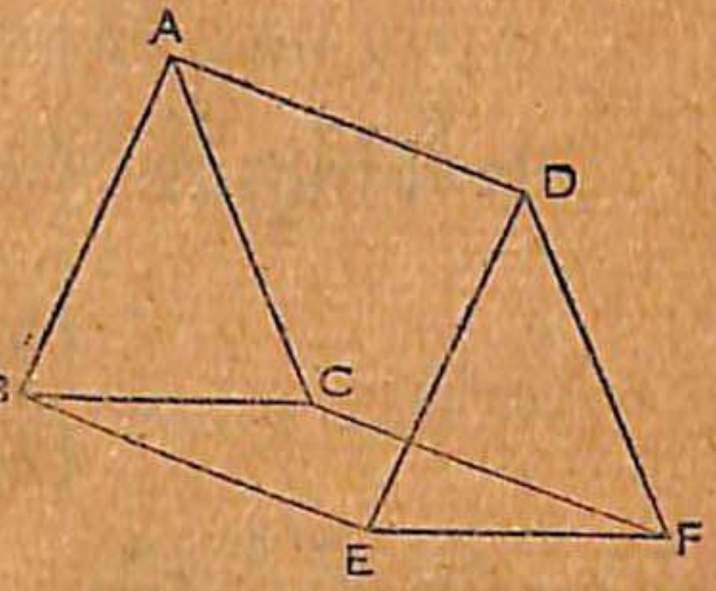
$\therefore AY = XC$ และขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

$\therefore AYCX$ เป็น □ ด้านขนาน

Q.E.D.

๑๑. ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้าน AB, BC ยาวเท่ากับและขนานกับ DE, EF ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AC เท่ากับและขนานกับ DF.

กำหนดให้ ABC, DEF เป็น △ สองรูป ซึ่งมี AB. BC ยาวเท่ากับและขนานกับ DE และ EF ตามลำดับ



จะต้องพิสูจน์ว่า AC เท่ากับและขนานกับ DF

พิสูจน์ ลาก BE, AD, CF

∴ AB เท่ากับและขนานกับ DE

∴ AD ก็เท่ากับและขนานกับ BE (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

ในทำนองเดียวกัน CF ก็เท่ากับและขนานกับ BE

∴ AD และ CF ต่างก็เท่ากันและขนานกัน (ทฤษฎีบทที่ ๑๕)

∴ AC กับ DF ก็เท่ากันและขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

Q.E.D.

๑๒. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่ง AB ขนานกับ DC และ AD เท่ากับ BC แต่ไม่ขนานกัน.

จงพิสูจน์ว่า (๑) $\hat{A} + \hat{C} = ๑๘๐^\circ = \hat{B} + \hat{D}$

(๒) เส้นทะแยงมุม AC = เส้นทะแยงมุม BD

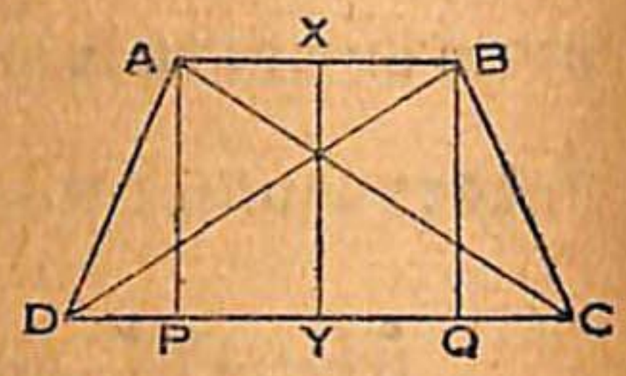
(๓) รูปสี่เหลี่ยมนี้เมื่อพับไปตามเส้นตรงซึ่งต่อ

จุดกึ่งกลางของ AB และ DC จะทับกันสนิท

กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

ซึ่ง AB ขนานกับ DC ; DC > AB

AD = BC ; ดาก AC , BD



จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) $\hat{A}+\hat{C}=๑๘๐^{\circ}=\hat{B}+\hat{D}$

(๒) AC = BD

(๓) เมื่อพับที่เส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางของAB

กับ DC รูปจะทับกันสนิท (เส้นแกน)

พิสูจน์ จาก A , B ดาก AP , BQ ให้ตั้งได้ฉากกับ DC ที่ P และ Q

$\therefore$ ABQP เป็น □ ด้านขนาน

$\therefore$ AP = BQ

ใน $\triangle$ APD กับ $\triangle$ BQC

$\therefore$ $\begin{cases} AD = BC & (\text{โจทย์}) \\ AP = BQ & \\ \hat{APD} = \hat{BQC} & (\text{สร้าง}) \end{cases}$

$\therefore$ $\hat{ADP} = \hat{BCQ}$; PD = CQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๘)

(๑) $\therefore$ $\hat{BAD} + \hat{BCD} = \hat{BAD} + \hat{ADC}$

แต่ $\hat{BAD} + \hat{ADC} = ๑๘๐^{\circ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore$ $\hat{BAD} + \hat{BCD}$ หรือ $\hat{A} + \hat{C} = ๑๘๐^{\circ}$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\hat{B} + \hat{D} = ๑๘๐^{\circ}$

(๒) $\therefore$ DP = QC

$\therefore$ DP + PQ = QC + PQ หรือ DQ = PC

ใน $\triangle$ BQD กับ $\triangle$ APC

$\therefore$ $\begin{cases} BQ = AP \\ QD = PC \\ \widehat{BQD} = \widehat{APC} \quad \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ BD = AC (ทฤษฎีบทที่ ๔)

(๓) ให้ X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, CD ตามลำดับ

และ Y ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ ด้วย (เพราะ DP=QC)

$\therefore$ $AX = \frac{๑}{๒} AB ; PY = \frac{๑}{๒} PQ$

แต่ AB = PQ

$\therefore$ AX = PY

$\therefore$ AP = XY และขนานกันด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

$\therefore$ XY ก็ตั้งได้ฉากกับ AB และ CD (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

เมื่อ XA = XB, YD = YC

และ $A\widehat{X}Y = B\widehat{X}Y$, $X\widehat{Y}D = X\widehat{Y}C$ อยู่แล้ว

เราพับรูปตรง XY เส้น XA, YD ต้องนอนบน XB, YC พอดี

และมันยาวเท่ากันอยู่แล้ว จุด A,D ก็ต้องทับจุด B, C พอดี

$\therefore$ XY ก็เป็นเส้นแกน (Axis of symmetry)

Q.E.D.

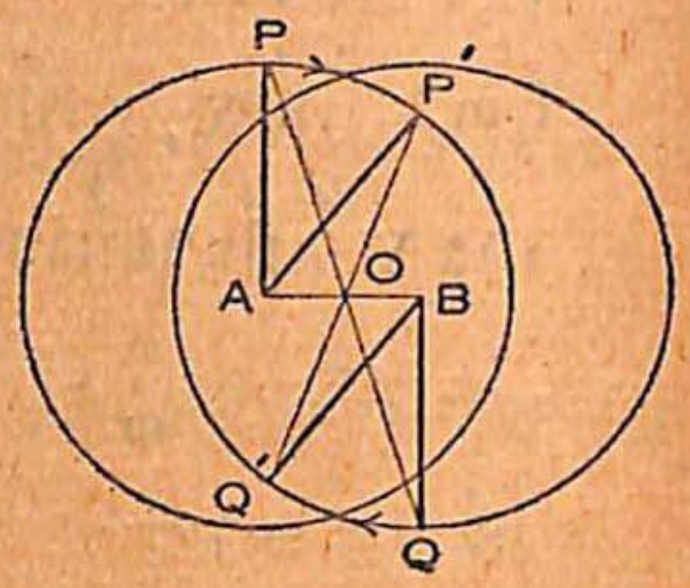
๑๓. AP, BQ เป็นไม้ตรงสองอันยาวเท่ากัน ตั้งอยู่บนแกน A และ B ตามลำดับ ไม้สองอันนี้หมุนไปในทางเดียวกัน ทำนองเดียว

กับเข็มนาฬิกามีความเร็วเท่ากัน ไม้สองอันเมื่อจะเริ่มหมุนขนานกันอยู่แล้ว แต่ปลายไม้ทั้งสองชี้ไปในทางตรงข้าม จงพิสูจน์ว่า

(๑) ไม้สองอันนี้จะขนานกันเสมอ

(๒) เส้นตรงที่ต่อ PQ จะผ่านจุดคงที่จุดหนึ่งเสมอ

กำหนดให้ AP, BQ เป็นไม้สองอันยาวเท่ากันตั้งอยู่บนแกน A และ B ตามลำดับ และชี้ไปในทางตรงข้าม ขนานกัน หมุนไปในทางเดียวกัน ตามลูกศร มีความเร็วเท่ากัน



ให้ AP', BQ' เป็นที่หยุดของ AP, BQ ในเวลาใด ๆ

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) ไม้สองอันนี้ขนานกันเสมอ

(๒) เส้นที่ต่อ PQ จะผ่านจุดหนึ่งคงที่เสมอ

พิสูจน์ ∵ AP ขนานกับ BQ (โจทย์) และ AB เป็นเส้นตัด

∴ $P\hat{A}B = A\hat{B}Q$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

(๑) AP กับ BQ หมุนไปมีความเร็วเท่ากันเสมอ

∴ มุมระหว่าง AP กับ AP' ใหม่ก็เท่ากับมุมระหว่าง BQ กับ BQ' ใหม่เสมอคือ $P\hat{A}P' = Q\hat{B}Q'$

แต่ $P\hat{A}B = A\hat{B}Q$ (พิสูจน์แล้ว)

∴ $P\hat{A}B - P\hat{A}P' = A\hat{B}Q - Q\hat{B}Q'$

$\therefore \hat{PAB} = \hat{ABQ}$ ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ AP ก็ขนานกับ BQ

$\therefore$ เส้น AP ก็ขนานกับ BQ เสมอไป

(๒) ลาก PQ ตัด AB ที่ O

ใน $\triangle$ AOP กับ $\triangle$ BQO

$$\therefore \begin{cases} \hat{AOP} = \hat{BOQ} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ \hat{OAP} = \hat{OBQ} & \text{(พิสูจน์แล้ว)} \\ AP = BQ & \text{(โจทย์)} \end{cases}$$

$\therefore$ AO = BO (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และเป็นจุดคงที่

และเส้นซึ่งลากต่อปลายไม้นี้ย่อมผ่านจุดคงที่ O เสมอ

Q.E.D.

๑๔. จงคำนวณหามุมต่าง ๆ ของ $\triangle$ ABC จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ คือ มุม A ซึ่งเป็นมุมภายในเท่ากับ $\frac{๓}{๗}$ ของมุม A ซึ่งเป็นมุมภายนอก และ ๓B = ๔C

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

มุม A ภายใน $= \frac{๓}{๗}$ ของมุม A ภายนอก

๓B = ๔C

A = ?, B = ?, C = ?

มุมภายใน A = ๑๘๐° − มุมภายนอก A

$\therefore$ $\frac{๓}{๗}$ ของมุมภายนอก A $=$ ๑๘๐° $-$ มุมภายนอก A

$\frac{๓}{๗}$ ของ A นอก $+$ A นอก $=$ ๑๘๐°

$\frac{๑๐}{๗}$ ของ A นอก $=$ ๑๘๐°

$\therefore$ A นอก $=\frac{๑๘๐\times๗}{๑๐}=๑๒๖°=$ B $+$ C (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore$ A ใน $=$ ๑๘๐° $-$ ๑๒๖° $=$ ๕๔° (ทฤษฎีบทที่ ๑)

แต่ B $=\frac{๔}{๓}$ C

B $+$ C $=$ ๑๒๖°

$\frac{๔}{๓}$ C $+$ C $=$ ๑๒๖°

$\frac{๗}{๓}$ C $=$ ๑๒๖°

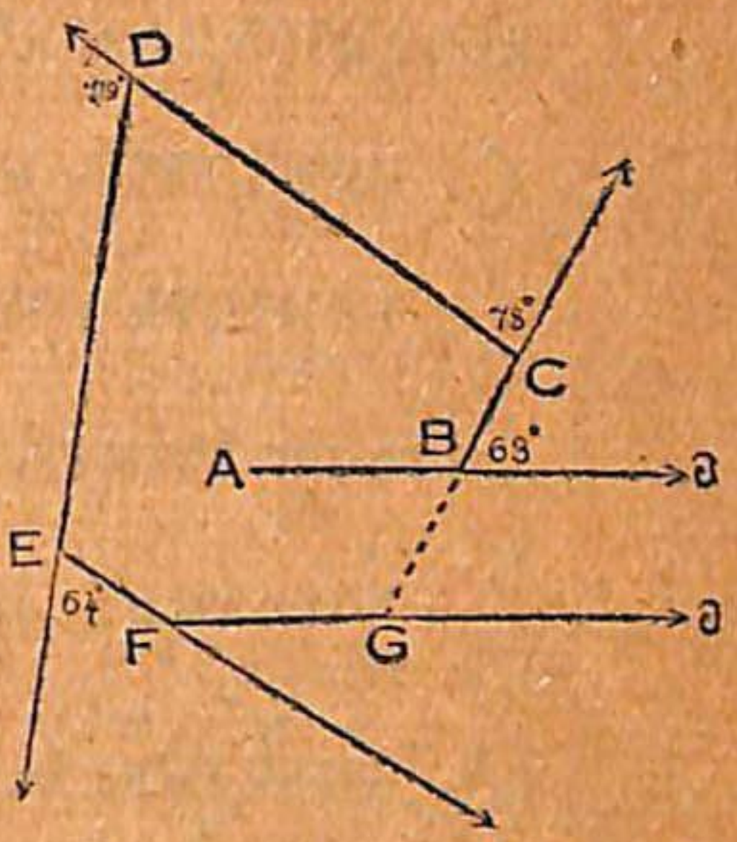
$\therefore$ C $=\frac{๑๒๖}{๗}\times๓=\frac{๓๗๘}{๗}=$ ๕๔°

$\therefore$ B $=$ ๑๒๖° $-$ ๕๔° $=$ ๗๒°

<u>ตอบ</u> A $=$ C $=$ ๕๔°, B $=$ ๗๒°

๑๕. เรือยอชลำหนึ่งแล่นผ่านไปทางทิศตะวันออก แล้วเปลี่ยนทางเดินของมันครั้งที่หนึ่ง ๖๓° ครั้งที่สอง ๗๘° ครั้งที่สาม ๑๑๙° ครั้งที่สี่ ๖๔° เพื่อแล่นรอบเกาะแห่งหนึ่ง เรือลำนี้จะต้องเปลี่ยนทางเดินอีกกี่องศาจึงจะเดินไปทางทิศตะวันออกเหมือนอย่างเดิม

ให้ B, C, D, E เป็นจุดแทนตำบลที่เรือยอชเปลี่ยนทางเดิน เป็น มุม ๖๓°, ๗๘°, ๑๑๙°, ๖๔° ตามลำดับ และ F เป็นตำบลที่เปลี่ยนทางเดินไปทาง อ ทิศตะวันออกครั้งสุดท้าย



จะต้องหาว่า เปลี่ยนทางเดินที่ F กี่องศา

วิธีหา ต่อ CB ตรงมาพบ F อ ที่จุด G

$\therefore$ ABอ ขนานกับ FGอ

$\therefore$ $C\hat{B}อ = B\hat{G}อ = ๖๓°$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และรูป CDEFG เป็นรูป ๕ เหลี่ยม

ผลบวกของมุมภายนอก ๕ มุม = ๓๖๐° (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ บทแทรกที่ ๒)

แต่มุมภายนอกที่ Q, C, D, E = $๖๓° + ๗๘° + ๑๑๙° + ๖๔°$

$= ๓๒๔°$

$\therefore$ มุมภายนอกที่ F = $๓๖๐° - ๓๒๔° = ๓๖°$

$\therefore$ เรือต้องเปลี่ยนทางเดิน ๓๖° ตอบ

๑๖. ถ้าผลบวกของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับผลบวกของมุมภายนอก ถามว่ารูปเหลี่ยมนั้นกี่ด้าน เพราะอะไร

วิธีทำ ผลบวกของมุมภายนอก = ๔ ∠ฉ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖ บทแทรกที่ ๒)

แต่ผลบวกมุมภายนอก = ผลบวกของมุมภายใน (โจทย์)

∴ ผลบวกของมุมภายใน = ๔ ∟ฉ

∴ ผลบวกของมุมภายในกับภายนอก = ๘ ∟ฉ

แต่ผลบวกของมุมภายในกับมุมภายนอก ๑ มุม = ๒ ∟ฉ

∴ จำนวนมุมของรูปนี้ = $\frac{๘}{๒}$ = ๔ มุม

∴ ดังนั้นรูปนี้จึงมี ๔ ด้าน ตอบ

๑๗. จงใช้ไม้โปรแทคเตอร์สร้างรูป ๕ เหลี่ยม ABCDE ให้ $\hat{B} = ๑๑๐^\circ$, $\hat{C} = ๑๑๕^\circ$, $\hat{D} = ๙๓^\circ$, $\hat{E} = ๑๕๒^\circ$ แล้วใช้ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียนวัดสอบสวนดูว่า AE ขนานกับ BC จริงหรือไม่ และอ้างบทพิสูจน์ประกอบความจริงข้อนี้ด้วย

(ให้นักเรียนเขียนรูปเอง)

ผลบวกของมุมภายในของ ๕ เหลี่ยม = (๒ × ๕) − ๔ = ๖ ∟ฉ

(ทฤษฎีบทที่ ๑๖ บทแทรกที่ ๑)

$\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = ๑๑๐ + ๑๑๕ + ๙๓ + ๑๕๒ = ๔๗๐^\circ$

$\therefore \hat{A} = ๕๔๐^\circ - ๔๗๐ = ๗๐^\circ$

และ $E\hat{A}B + A\hat{B}C = ๗๐^\circ + ๑๑๐^\circ = ๑๘๐^\circ$

∴ AE ก็ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

Q.E.D.

๑๘. A และ B เป็นจุดคงที่สองจุด AP และ BQ เป็นเส้นตรงสองเส้นยาวไม่จำกัดลากไปทาง P และ Q AP และ BQ ตั้งอยู่

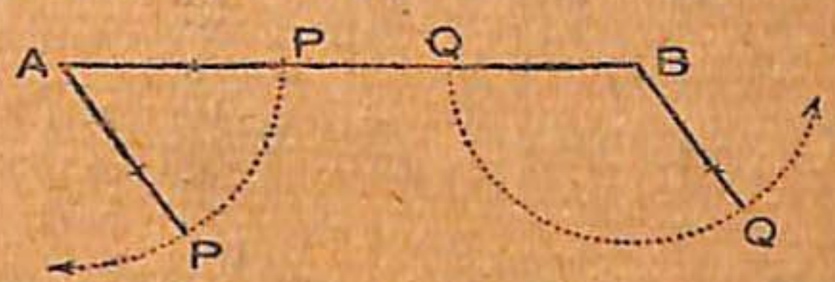
บนแกน A และ B AP เริ่มหมุนจาก AB ไปรอบ A หมุนอย่างเร็ม
นาพิกา หมุนไปโดยสม่ำเสมอวินาฑีละ $๙\frac{๑}{๒}^{\circ}$ และ BQ เริ่มหมุน
ไปในเวลาเดียวกัน จาก BA หมุนรอบ B หมุนไปทางตรงข้ามกับ
เข็มนาพิกาวินาฑีละ $๓\frac{๓}{๔}^{\circ}$

(๑) จะเป็นเวลากี่วินาฑีก่อนที่ AP และ BQ จะขนานกัน

(๒) จงหามุมระหว่าง AP และ BQ เมื่อหมุนไปได้ ๑๒
วินาฑี โดยสร้างรูปและคำนวณ

(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ นี้จะเล็กลงวินาฑีละกี่องศา

กำหนดให้ AP, BQ เป็น
เส้นตรงสองเส้นตั้งอยู่บนแกน A,



B ยาวพอสมควร และ AP, BQ
หมุนตามลูกศรวินาฑีละ $๙\frac{๑}{๒}^{\circ}$, $๓\frac{๓}{๔}^{\circ}$ ตามลำดับ

จะต้องหาว่า (๑) ก่อนที่ AP จะขนานกับ BQ นั้น เป็นเวลา
เท่าไร

(๒) หามุมระหว่าง AP กับ BQ เมื่อหมุนไป
ได้ ๑๒ วินาฑี สร้างรูปและคำนวณ

(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ เล็กลงวินาฑีละ
เท่าไร

วิธีทำ (๑) เส้นตรง AP จะขนานกับ BQ ได้ต่อเมื่อ
$P\hat{A}B + A\hat{B}Q = ๑๘๐^{\circ}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

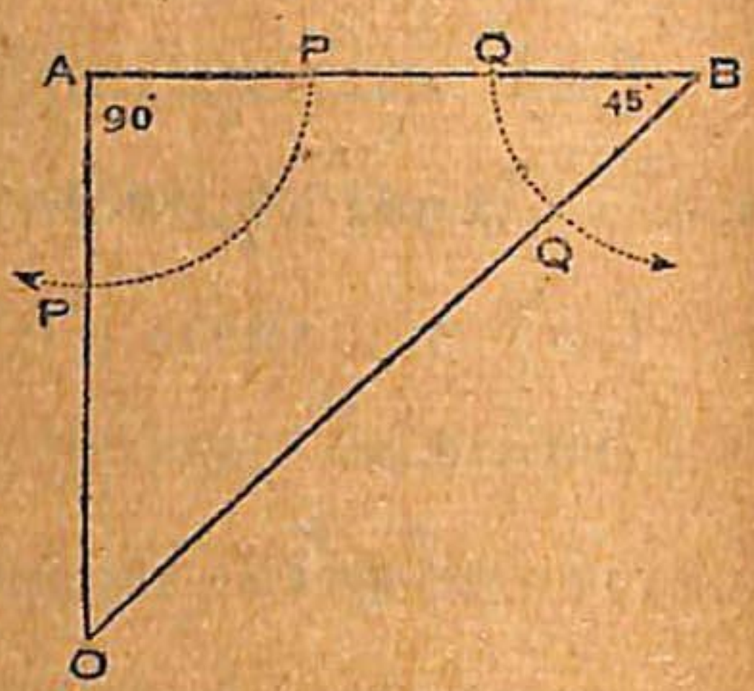
ในเวลา ๑ วินาฑี AP หมุนมาทำ $B\hat{A}P$ ได้ $๙\frac{๑}{๒}^{\circ}$

และ ,, ๑ ,, BQ ,, ,, $A\hat{B}Q$,, $๓\frac{๓}{๔}^{\circ}$

∴ เวลา ๑ วินาฑี AP กับ BQ หมุนออกทำมุมได้ ๙ $\frac{๑}{๒}^{\circ}$ + ๓ $\frac{๓}{๔}^{\circ}$ = ๑๑ $\frac{๑}{๔}^{\circ}$ และ AP กับ BQ ต้องหมุนออกทำมุมได้ ๑๘๐° จึงจะชนกัน

∴ AP และ BQ ต้องหมุนในเวลา $\frac{๑๘๐}{๑๑\frac{๑}{๔}}$ = ๑๖ วินาฑี

(๒)



๑ วินาฑี AP หมุนได้ ๙ $\frac{๑}{๒}^{\circ}$

๑๒ ,, AP ,, ๙ $\frac{๑}{๒}^{\circ}$ × ๑๒ = ๙๐°

๑ ,, BQ ,, ๓ $\frac{๓}{๔}^{\circ}$

๑๒ ,, BQ ,, ๓ $\frac{๓}{๔}$ × ๑๒ = ๔๕°

มุมระหว่าง AP และ BQ ก็คือ $A\hat{O}B$

$A\hat{O}B$ = ๑๘๐° − $B\hat{A}P$ − $A\hat{B}Q$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

= ๑๘๐° − ๙๐° − ๔๕°

= ๔๕° ตอบ

(๓) มุมระหว่าง AP และ BQ คือ $A\hat{O}B$ นี่ย่อมเล็กลงวินาฑีละเท่ากับ $O\hat{A}B$ กับ $A\hat{B}O$ เพิ่มขึ้น เพราะว่า $O\hat{A}B + A\hat{B}O + B\hat{O}A$ ย่อมได้คงที่เสมอ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

แต่ $O\hat{A}B$, $A\hat{B}O$ เพิ่มขึ้นวินาฑีละ ๙ $\frac{๑}{๒}^{\circ}$ + ๓ $\frac{๓}{๔}^{\circ}$ = ๑๑ $\frac{๑}{๔}^{\circ}$

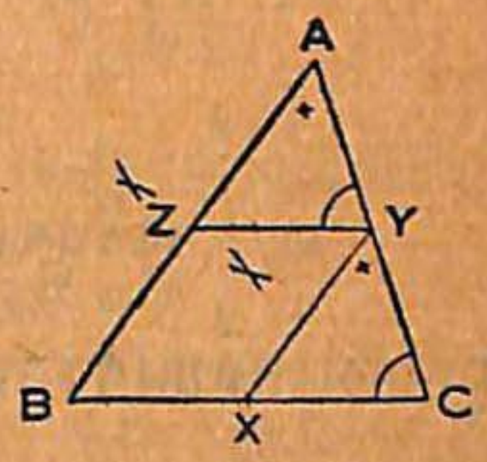
∴ $A\hat{O}B$ ก็เล็กลงวินาฑีละ ๑๑ $\frac{๑}{๔}^{\circ}$ ตอบ

แบบฝึกหัดที่ ๑๔

เมื่อเรียนจบทฤษฎีบทที่ ๒๒ แล้ว

๑. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้าน ๆ หนึ่ง ของรูป △ ให้ขนานกับด้านฐาน จะแบ่งครึ่งด้านที่สาม

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง



Z เป็นจุดกึ่งกลางของ AB จาก Z ลาก ZY ขนานกับ BC พบ AC ที่ Y

จะต้องพิสูจน์ว่า AY = YC

พิสูจน์ ลาก YX ให้ขนานกับ AB พบ BC ที่ X

และ ∴ ZY ขนานกับ BX (โจทย์)

∴ ZYXB จึงเป็น □ ด้านขนาน

∴ YX = ZB (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

แต่ AZ = ZB (โจทย์)

∴ YX = AZ

และ ∵ ZY // BC, AC เป็นเส้นตัด

∴ $A\hat{Y}Z = Y\hat{C}X$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

และ ∵ AB // กับ YX, AC เป็นเส้นตัด

∴ $Z\hat{A}Y = X\hat{Y}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

ใน △ AZY กับ △ YXC

$$\therefore \begin{cases} ZA = YX \\ Z\hat{A}Y = X\hat{Y}C \\ A\hat{Y}Z = Y\hat{C}X \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle$ AZY = $\triangle$ YXC ทุกอย่าง (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

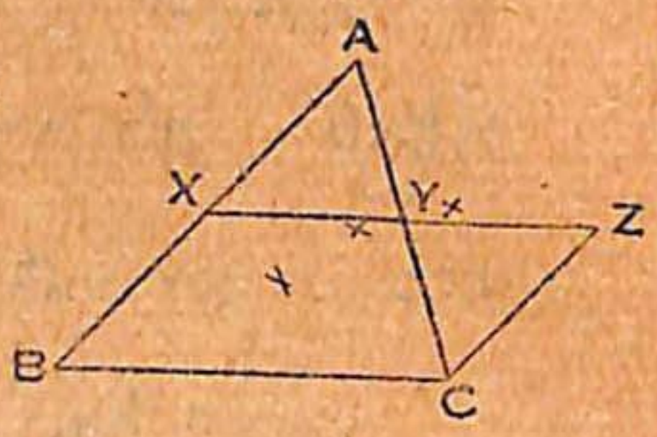
$\therefore$ AY = YC

Q.E.D.

๒. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของ ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สาม

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่ง

X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC



ตามลำดับ

ลาก XY

จะต้องพิสูจน์ว่า XY ขนานกับ BC

พิสูจน์ ต่อ XY ตรงไปถึง Z ทำ YZ ให้เท่ากับ XY

ลาก ZC

ใน $\triangle$ AXY กับ $\triangle$ YZC

$$\therefore \begin{cases} AY = YC & \text{(โจทย์)} \\ XY = YZ & \text{(สร้าง)} \\ A\hat{Y}X = Z\hat{Y}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

$\therefore$ XA = ZC, $X\hat{A}Y = Y\hat{C}Z$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

แต่ $X\hat{A}Y$ กับ $Y\hat{C}Z$ เป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ AX ก็ขนานกับ ZC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

แต่ $AX = \frac{๑}{๒} AB = BX$

$\therefore$ XB = ZC และขนานกันด้วย

$\therefore$ XZ ก็ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

Q.E.D.

๓. จงพิสูจน์ว่าเส้นซึ่งต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป △ จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม (ในรูปข้อ ๒)

พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ ๒ เมื่อได้ XB เท่ากับและขนานกับ ZC แล้ว XZ ก็เท่ากับและขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

แต่ $XY = YZ = \frac{๑}{๒} XZ$

$\therefore$ XY ก็เป็น $\frac{๑}{๒}$ ของ BC ด้วย

Q.E.D.

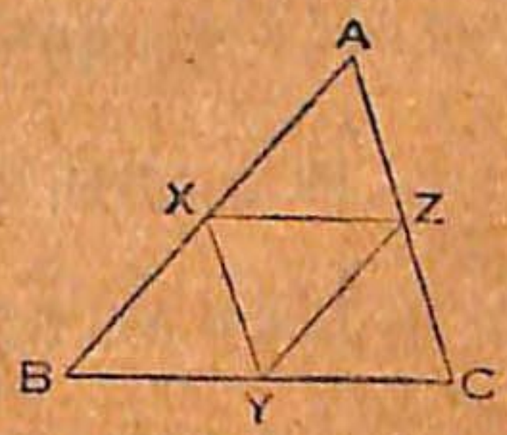
๔. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสามเส้นซึ่งลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านของรูป △ จะแบ่ง △ นั้นออกเป็นรูปสามเหลี่ยม ๔ รูปเท่ากันทุกประการ

กำหนดให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของ

AB, BC, CA ตามลำดับ

ลาก XZ, XY, YZ



จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AXZ = \triangle XBY = \triangle XZY = \triangle ZYC$

พิสูจน์ $\therefore$ XB ขนานกับ ZY
XZ ,, BY } (ข้อ ๒)

$\therefore$ XZYB เป็น □ ด้านขนาน XY เป็นเส้นทะแยงมุม

$\therefore \triangle XBY = \triangle XYZ$ (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle AXZ, \triangle ZYC$ ต่างก็เท่ากับ $\triangle XYZ$

$\therefore \triangle AXZ = \triangle XBY = \triangle XZY = \triangle ZYC$

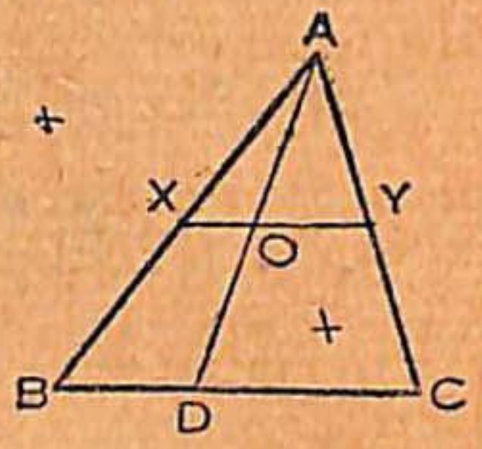
Q.E.D.

๕. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงใด ๆ ที่ลากจากจุดยอดของรูป $\triangle$ ไปยังฐาน จะถูกเส้นตรงซึ่งต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านอื่นสองด้านของรูป $\triangle$ นั้นแบ่งครึ่ง.

กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ รูปหนึ่ง

XY ลากต่อจุดกึ่งกลางของ AB, AC

AOD ลากผ่าน XY ที่ O พบ BC ที่ D



จะต้องพิสูจน์ว่า AO = OD

พิสูจน์ $\because$ X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, AC

$\therefore$ XY ขนานกับ BC (ข้อ ๒)

ใน $\triangle$ ABD, XO ลากจากจุด X กึ่งกลางของ AB ขนานกับฐาน BD

ไปพบ AD ที่ O ย่อมแบ่งครึ่ง AD ที่ O (ข้อ ๑)

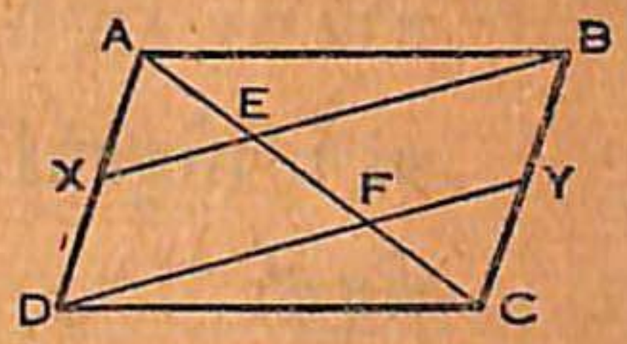
$\therefore$ AO = OD

Q. E.D.

๖. ABCD เป็น □ ด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม AD, BC จงพิสูจน์ว่า BX และ DY แบ่งเส้นทะแยงมุม AC

ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง



X, Y, เป็นจุดกึ่งกลางของ AD, BC

ลาก XB, DY และ AC

จะต้องพิสูจน์ว่า XB, DY แบ่ง AC

ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ สมมติให้ AC พบ XB ที่ E และ DY ที่ F

∴ XD = BY (ด้านก็เป็นครึ่งหนึ่งของด้านเท่า)

และ XD ขนานกับ BY ด้วย

∴ XB ก็เท่ากับและขนานกับ DY (ทฤษฎีบทที่ ๒๐)

ใน △ ADF ∵ X เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ XE ขนาน

กับ DF

∴ AE = EF (โดยข้อ ๑)

ใน △ CEB, ∵ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ BC และ YF ขนาน

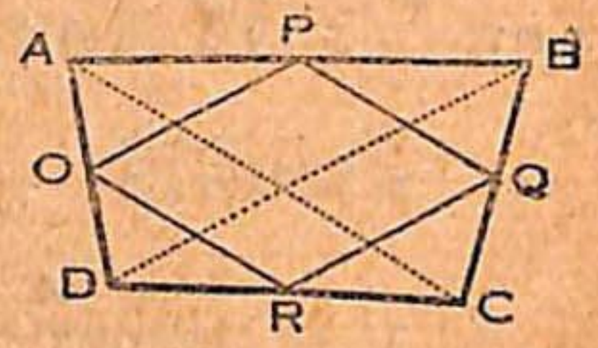
กับ BE

∴ CF = EF (โดยข้อ ๑)

∴ AC ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันที่ E และ F

Q.E.D.

๙. ถ้าต่อจุดกึ่งกลางของด้านประชิดของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง สี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

O, P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางของ

ด้าน DA, AB, BC, CD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า OPQR เป็น □ ด้านขนาน

พิสูจน์ ∵ P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, BC

∴ PQ ขนานกับ AC (ข้อ ๒)

ทำนองเดียวกัน OR ก็ขนานกับ AC

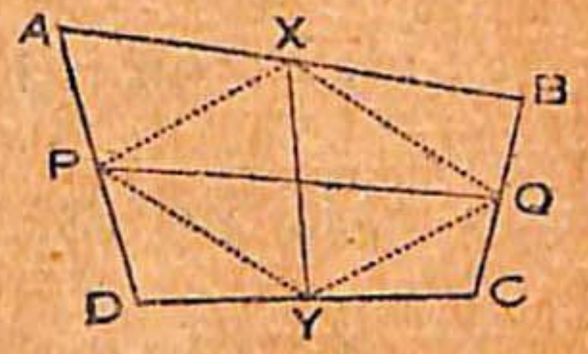
∴ OR ก็ขนานกับ PQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๕)

ทำนองเดียวกัน OP ก็ขนานกับ QR

∴ OPQR เป็น □ ด้านขนาน

Q.E.D.

๘. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน.



กำหนดให้ ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง

X, Q, Y, P เป็นจุดกึ่งกลาง

ของ AB, BC, CD, DA ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า XY กับ PQ แบ่งครึ่งกันและกัน

สร้าง ลากเส้น PX, XQ, QY, YP

พิสูจน์ XQYP เป็น □ ด้านขนาน (ข้อ ๗)

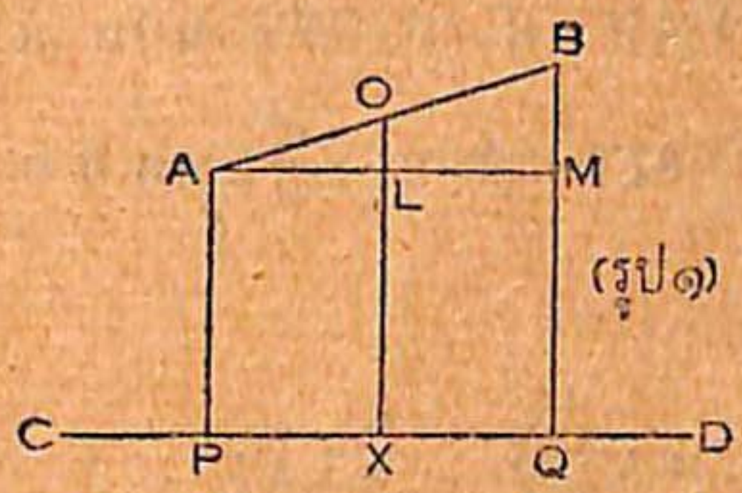
XY กับ PQ เป็นเส้นทะแยงมุม

∴ XY กับ PQ ตัดครึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรก ๓)

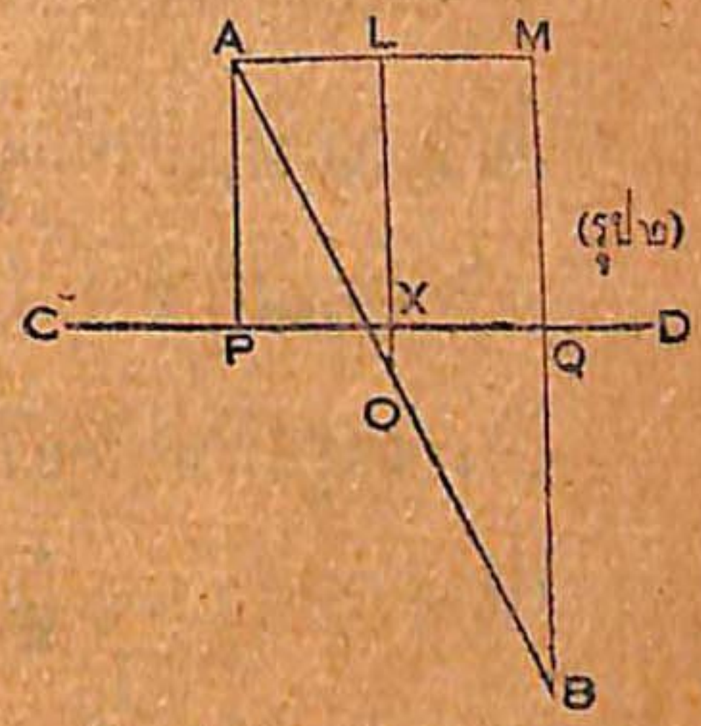
Q.E.D.

๙. เส้นตั้งฉาก AP, BQ, OX ตากจากจุด A, B และจาก O ซึ่ง
เป็นจุดกึ่งกลางของ A และ B ไปยังเส้นตรง CD ถ้า AP วัดได้ ๔·๒
ซม. และ BQ วัดได้ ๕·๘ ซม. ตามลำดับ จงหาความยาวของ OX
และวัดสอบดูผลที่ได้ว่าจะจริงหรือไม่ จงพิสูจน์ว่า

$$OX = \frac{๑}{๒}(AP + BQ) \text{ หรือ } \frac{๑}{๒}(BQ - PA)$$ แล้วแต่ A และ B
จะอยู่ข้างเดียวกันหรือคนละข้างของ CD



(รูป๑)



(รูป๒)

กำหนดให้ A, B เป็นจุดสองจุด O เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง
A กับ B ; CD เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง
จาก A, O และ B ตาก AP, OX และ BQ ตั้งได้ฉากกับ CD ที่จุด
P, X และ Q ตามลำดับ
ให้ AP ยาว ๔·๒ ซม. BQ ยาว ๕·๘ ซม.
จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) OX ยาวเท่าไร (วัดสอบดูด้วย)

(๒) $OX = \frac{๑}{๒}(AP + BQ)$ ถ้า A, B อยู่

ทางเดียวกัน

หรือ $OX = \frac{1}{2}(BQ - PA)$ ถ้า A, B อยู่คนละข้าง

พิสูจน์ จาก A ลาก ALM ให้ขนานกับ CD ตัด OX, BQ (หรือที่ต่อ) ที่ L และ M ตามลำดับ

และ AP, OX, BQ ต่างก็ขนานกัน เพราะต่างตั้งได้ฉากกับ CD

$\therefore$ ALXP, LMQX เป็น □ ด้านขนาน

$\therefore$ $AP = LX = MQ$ และ $LX = \frac{1}{2}(AP + MQ)$

ใน $\triangle$ ABM, O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, OL ลากขนานกับ MB

$\therefore$ $OL = \frac{1}{2}BM$ (ข้อ ๓ หรือบทแทรกของทฤษฎีบทที่ ๒๒)

$\therefore$ ในรูปที่ ๑ โดยวิธีบวก

$$OX = OL + LX = \frac{1}{2}(BM + AP + MQ) = \frac{1}{2}(AP + BQ)$$

และ $\therefore$ ในรูปที่ ๒ โดยวิธีลบ

$$OX = OL - LX = \frac{1}{2}\{BM - (MQ + AP)\} = \frac{1}{2}(BQ - AP)$$

$$OX = \frac{1}{2}(๕\cdot๘ + ๔\cdot๒) = ๕ \text{ ซม.} \quad \text{รูปที่ ๑}$$

หรือ $OX = \frac{1}{2}(๕\cdot๘ - ๔\cdot๒) = ๐\cdot๘ \text{ ซม.}$ รูปที่ ๒

Q.E.D.

๑๐. เส้นตรงขนานกันสามเส้นตัดเส้นขวางสองเส้นออกมีระยะเท่ากัน จงพิสูจน์หาความยาวของเส้นขนานสามเส้นซึ่งอยู่ระหว่างเส้นขวาง เส้นที่อยู่กลางจะเป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของอีกสองเส้น (ดูรูปในทฤษฎีบทที่ ๒๒)

กำหนดให้ AB, CD, EF เป็นเส้นขนานสามเส้น ตัดเส้นขวาง
สองเส้นคือ XZ กับ PR มีระยะ XY = YZ, PQ = QR

จะต้องพิสูจน์ว่า QY เป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของ
PX กับ RZ

พิสูจน์ ∵ PXMQ, QYNR เป็น □ ด้านขนาน

∴ PX = QM และ QY = RN

MY = NZ, (ทฤษฎีบทที่ ๒๒)

∴ PX + RZ = QM + QY + NZ

= QM + QY + MY

= ๒QY

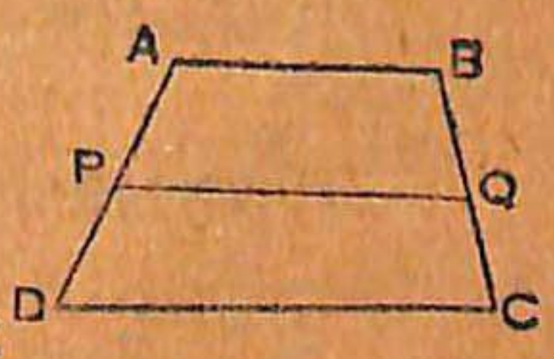
∴ QY $= \frac{๑}{๒}(PX + RZ)$

∴ QY เป็นส่วนเฉลี่ย (Arithmetic mean) ของ PX กับ RZ

Q.E.D.

๑๑. ด้านขนานของรูป □ คางหมูรูปหนึ่งยาว a ซม. และ b ซม. จงพิสูจน์ว่าเส้นต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านเฉลี่ยงจะขนานกับด้านขนาน และเส้นต่อนั้นจะยาว $\frac{๑}{๒}(a + b)$ ซม.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ คางหมูรูปหนึ่ง



AB ขนานกับ DC, P และ Q เป็นจุด
กึ่งกลางของด้าน AD, BC ตามลำดับ และ

ให้ AB ยาว a ซม. BC ยาว b ซม.

จะต้องพิสูจน์ว่า (๑) PQ ขนานกับ AB หรือ DC

(๒) $PQ = \frac{๑}{๒}(a+b)$ ซม.

พิสูจน์ เส้นที่ลากจาก P ขนานกับ AB ย่อมแบ่งครึ่ง BC คือผ่าน Q

$\therefore$ PQ ก็ขนานกับ AB (ทฤษฎีบทที่ ๒๒)

$\therefore$ PQ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยระหว่าง AB กับ DC (ข้อ ๑๐)

$\therefore PQ = \frac{๑}{๒}(a+b)$

Q.E.D.

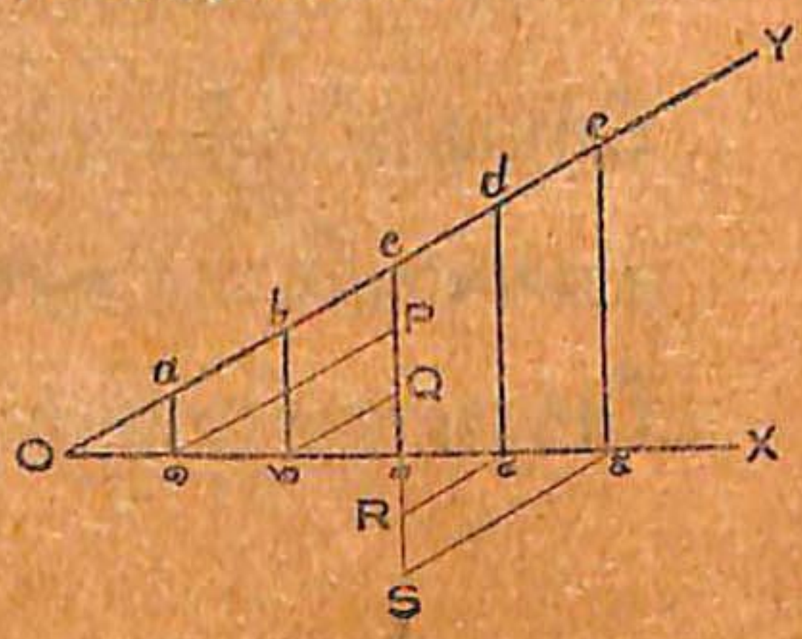
๑๒. OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้นและมีจุด ๕ จุดอยู่บนเส้น OX คือจุด ๑, ๒, ๓, ๔, ๕ จุดทั้ง ๕ นี้ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน จากจุดทั้ง ๕ นี้ลากเส้นตรงขนานกันไปที่ OY จงวัดหาความยาวของเส้นขนานเหล่านี้ และหาส่วนเฉลี่ยของเส้นเหล่านี้เปรียบเทียบส่วนเฉลี่ยกับความยาวของเส้นขนานเส้นที่สาม จงพิสูจน์โดยวิธีเรขาคณิตว่าเส้นขนานเส้นที่สามเป็นส่วนเฉลี่ย (mean) ของเส้นทั้งห้า

ถ้าลากเส้นขนาน $(๒n+๑)$ เส้น (ให้มีจำนวนคี่ไม่ใช่คู่)

เส้นใดจะเป็นส่วนเฉลี่ย (mean) ของเส้นขนานเหล่านี้

กำหนดให้ OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้น

๑, ๒, ๓, ๔ และ ๕ เป็นจุดอยู่บน OX ระยะห่างเท่า ๆ กัน



ลาก ๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e ให้ขนานกันและตัด OY ที่ a, b, c, d, e ตามลำดับ

จะต้องการหา (๑) ความยาวของเส้นเหล่านี้ คือ

๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e โดยวัด

(๒) เปรียบเทียบส่วนเฉลี่ยความยาว

ของ ๑a, ๒b, ๓c, ๔d, ๕e กับ ๓c

(๓) พิสูจน์ว่า ๓c เป็น (mean) ของเส้นทั้งหมด

คือห้าเท่าของ $3c = 1a + 2b + 3c + 4d + 5e$

วิธีทำ (๑) ให้วัดจากรูปแล้วตอบ

(๒) สร้างรูปให้ถูกต้องแล้ววัดดูจะได้ผลอย่าง (๓)

(๓) พิสูจน์ จาก ๑, ๒, ๔, ๕ ลากเส้นให้ขนานกับ OY ให้พบ ๓c (ถ้าจำเป็นให้ต่อ) ที่ P, Q, R, S ตามลำดับ

ใน $\triangle$ ๑ ๓P กับ $\triangle$ ๓ ๕S

$\therefore$ ๑ ๓ = ๓ ๕ (โจทย์)

$\therefore$ $1\hat{3}P = S\hat{3}5$ (ทฤษฎีบทที่ ๓)

$P\hat{1}3 = 3\hat{5}S$ (,, ,, ๑๔)

$\therefore$ 3P = 3S (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ $\square$ aP กับ $\square$ c๕ เป็น $\square$ ด้านขนาน

$\therefore$ 1a = cP ; cS หรือ c๓ + ๓S = ๕e

$$\therefore \quad ๑a + ๕e = cP + ๓c + ๓S$$

$$= ๓c - ๓P + ๓c + ๓S$$

$$= ๓c + ๓c \qquad (\text{เพราะ } ๓P = ๓S)$$

$$= ๒ \text{ เท่าของ } ๓c$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$๒b + ๔d \quad = ๒ \text{ เท่าของ } ๓c$$

$\therefore$ ห้าเท่าของ $๓c$ ก็ยาว $= ๑a + ๒b + ๓c + ๔d + ๕e$

$\therefore$ $๓c$ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยของเส้นทั้ง ๕

ในทำนองเดียวกันถ้ามี $(๒n + ๑)$ เส้น

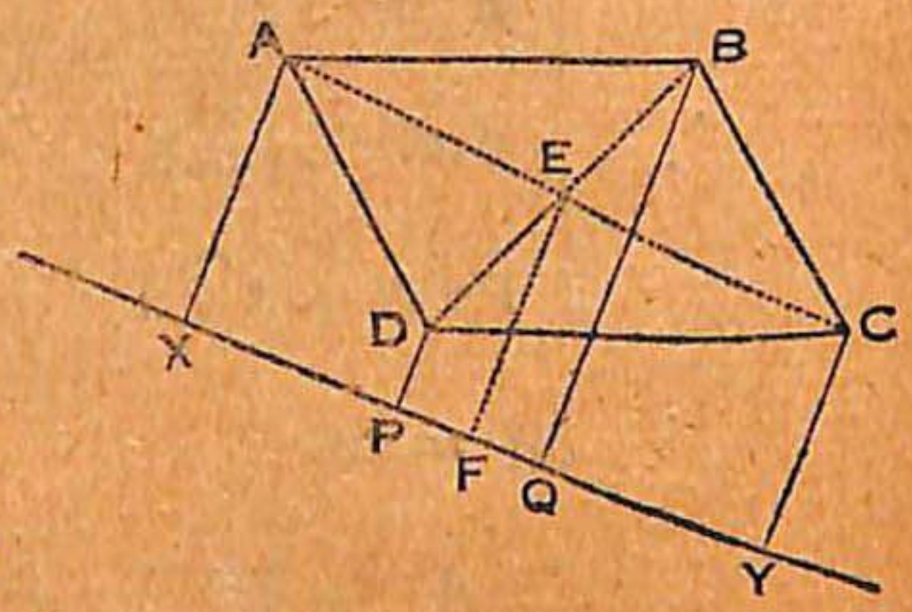
เส้นที่ $(n + ๑)$ ก็เป็นส่วนเฉลี่ยของเส้นขนานทั้งหมด

Q.E.D.

๑๓. เส้นตั้งฉากลากจากจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปยังเส้นใดๆ ซึ่งอยู่ภายนอกของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นตั้งฉากลากจากมุมตรงข้ามคู่หนึ่ง จะเท่ากับผลบวกของเส้นตั้งฉากลากจากมุมตรงข้ามของอีกคู่หนึ่ง.

กำหนดให้ ABCD เป็น □ ด้านขนานรูปหนึ่ง

AX, CY กับ DP, BQ เป็นเส้นตั้งฉากลากจากมุมไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ภายนอกรูป □ นั้น



จะต้องพิสูจน์ว่า $AX + CY = DP + BQ$

พิสูจน์ ลากเส้นทะแยงมุมตัดกันที่ E

และลาก EF ให้ตั้งฉากกับ XY ที่ F

$\therefore$ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรก ๓)

และ AX, EF, CY, ต่างก็ตั้งได้ฉากกับ XY จึงขนานกัน

$\therefore$ EF ก็ยาว $= \frac{๑}{๒}(AX + CY)$ (ข้อ๙ ของแบบฝึกหัดนี้)

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$EF = \frac{๑}{๒}(DP + BQ)$$

$$\therefore \frac{๑}{๒}(AX + CY) = \frac{๑}{๒}(DP + BQ)$$

$$\therefore AX + CY = DP + BQ$$

Q.E.D.

๑๔. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด ๆ หนึ่งบนฐานของรูป $\triangle$ หน้าจั่วไปยังด้านเท่าสองด้าน จะเท่ากับเส้นตั้งฉากลากจากปลายด้านฐานไปที่ด้านตรงข้าม.

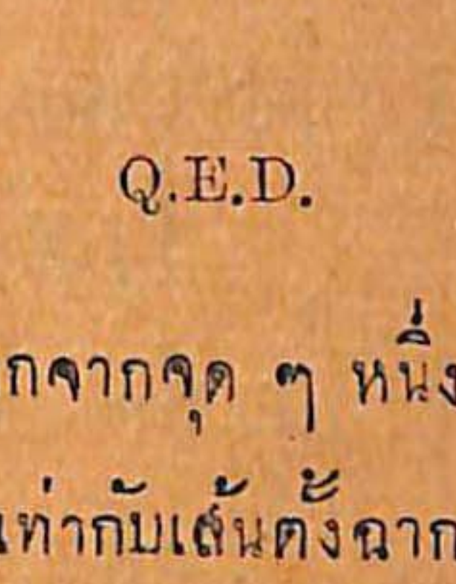
กำหนดให้ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่ง

ซึ่งมี $AB = AC$, D เป็นจุด ๆ หนึ่ง

อยู่บนฐาน BC ลาก DE, DF ให้ตั้งฉาก

กับ AB, AC ที่ E และ F และจาก C ลาก CH

ให้ตั้งฉากกับ AB ที่จุด H



จะต้องพิสูจน์ว่า $DE + DF = CH$

พิสูจน์ ลาก CG ให้ // กับ AB ให้พบ ED ที่ต่อออกไปที่ G

$\therefore$ HG เป็น □ ด้านขนาน (โดยสร้าง)

$\therefore$ $EH = GC$, $EG = HC$

และ $\therefore$ AB ขนานกับ CG, BC เป็นเส้นตัด

$\therefore$ $A\hat{B}C = B\hat{C}G$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (,, ,, ๕)

$\therefore$ $B\hat{C}G = A\hat{C}B$

ใน $\triangle DFC$ กับ $\triangle CDG$

$\therefore$ $\begin{cases} D\hat{C}F = D\hat{C}G & \text{(พิสูจน์แล้ว)} \\ DC \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ D\hat{F}C = D\hat{G}C & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$

$\therefore$ $DF = DG$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ $ED + DF = ED + DG = EG$

แต่ $EG = HC$ (พิสูจน์แล้ว)

$\therefore$ $DE + DF = CH$

ถ้าจุด D เคลื่อนไปอยู่บน BC ต่อทาง C แล้ว จะได้ผลดังนี้คือ

$DE - DF = CH$

หรือถ้าต่อมาทาง B จะได้ $DF - ED = CH$

Q.E.D.

๑๕. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของเส้นตั้งได้ฉากฉากจากจุดใดจุดหนึ่งภายในรูป △ ด้านเท่าไปยังด้านทั้งสามจะเท่ากับเส้นตั้งฉากฉากจากจุดยอดจุดใดจุดหนึ่งไปยังด้านตรงข้าม และผลบวกนั้นจะไม่เปลี่ยนแปลง.

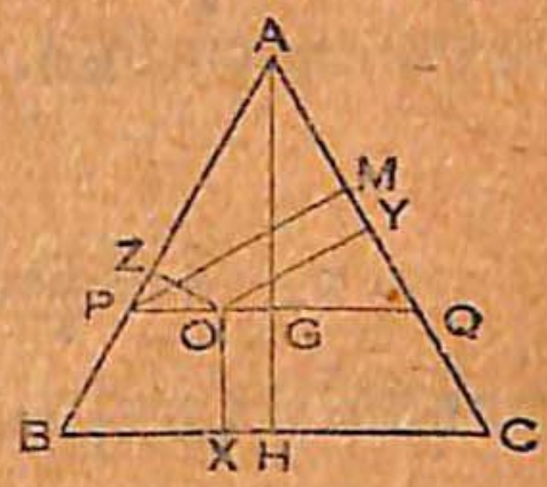
กำหนดให้ ABC เป็น △ ด้านเท่ารูปหนึ่ง

O เป็นจุดหนึ่งภายใน △ ABC

ฉาก OX, OY, OZ ตั้งฉากกับ

BC, CA, AB ตามลำดับ

จาก A ฉาก AH ให้ตั้งฉากกับ BC



จะต้องพิสูจน์ว่า $OX + OY + OZ = AH$ และคงที่

พิสูจน์ ฉาก POQ ให้ขนานกับ BC ตัด AH ที่จุด G

$\therefore A\hat{P}Q, A\hat{Q}P$ ต่างก็เท่ากับ $A\hat{B}C, A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่๑๔)

และ $A\hat{P}Q = B\hat{A}C$ ด้วยเพราะเป็น △ ด้านเท่า

ฉาก PM ให้ตั้งฉากกับ AC ที่จุด M

ใน △ APM กับ △ APG

$\therefore$ $\begin{cases} A\hat{M}P = A\hat{G}P & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ P\hat{A}M = A\hat{P}G & \text{(พิสูจน์แล้ว)} \\ AP & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$

$\therefore PM = AG$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

และ $\because OZ + OY = PM$ (โดยข้อ ๑๔ แบบฝึกหัดนี้)

$\therefore OZ + OY = AG$

$\therefore$ OX + OY + OZ = AG + OX

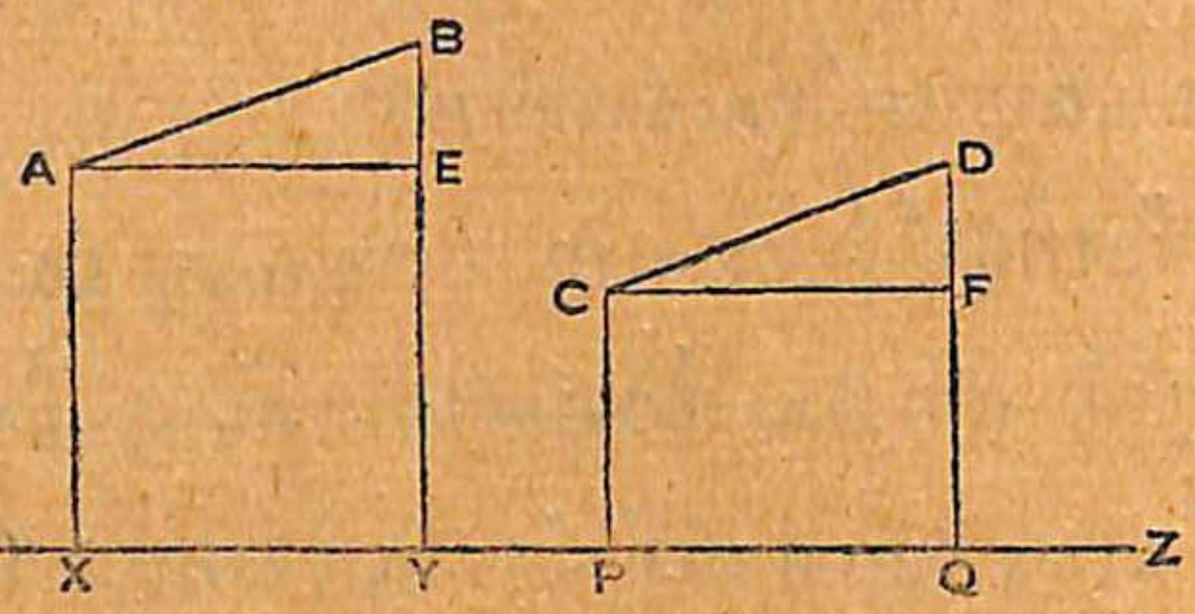
= AG + GH (OH เป็น □ ด้านขนาน)

= AH

O จะไปอยู่ในที่ใด ๆ ใน △ นั้น ผลบวกก็จะได้เท่ากับ AH ซึ่งเป็นจำนวนคงที่เสมอ.

Q.E.D.

๑๖. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ยาวเท่ากันและขนานกันจะมีส่วนที่ทอดออกไป (Projection) บนเส้นตรงเส้นอื่นเท่ากัน.



กำหนดให้ AB , CD เป็นเส้นตรงสองเส้นเท่ากันและขนานกัน

XY , PQ เป็น Projection ของ AB และ CD บนเส้นตรง OZ

จะต้องพิสูจน์ว่า XY = PQ

พิสูจน์จาก A , C ลาก AE , CF ให้ขนานกับ OZ พบ BY และ DQ ที่ E และ F ตามลำดับ

$\therefore$ □ AEYX , □ CFQP เป็น □ ด้านขนาน

$\therefore$ AE = XY , CF = PQ

AB กับ CD ขนานกัน

และ AE กับ CF ขนานกัน

$\therefore$ มุมในระหว่าง AB , AE ก็เท่ากับมุมในระหว่าง CD กับ CF

ฉะนั้น $B\hat{A}E = D\hat{C}F$ (ข้อ ๔ แบบฝึกหัดที่ ๘)

ใน $\triangle ABE$ กับ $\triangle CDF$

$$\therefore \begin{cases} AB=CD \\ B\hat{A}E = D\hat{C}F \\ A\hat{E}B = C\hat{F}D \quad \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore$ $AE = CF$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ $XY = PQ$

Q.E.D.

แบบฝึกหัดที่ ๑๕

เมื่อเรียน Diaganal Scales แล้ว

๑. จงเขียนเส้นตรงสามเส้นยาว ๑.๒๕ นิ้ว ๒.๗๒ นิ้ว และ ๓.๐๔ นิ้ว

๒. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๒.๖๔ นิ้ว แล้ววัดหาความยาวของเส้นตรงเส้นนี้เป็น ซม. และ มม. ให้ได้ผลใกล้เคียงความจริงที่สุด

(มีอยู่ละเอียดในหนังสือเรขาคณิตของ ร.อ.ค. ส่งฮั้ว ลิมปีนันท์ ป.ม. เนติบัณฑิต หน้า ๑๑๕ — ๑๑๗ แล้ว)

๓. จงเขียนเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๕.๗ ซม. แล้ววัดหาความยาวของเส้นนี้เป็นนิ้ว (ให้ได้ใกล้เคียงกับส่วนร้อยของนิ้วที่สุดที่จะใกล้ได้) แล้วคำนวณสอบดูผลที่ได้ ให้ ๑ ซม. = .๓๙๓๗ นิ้ว

เมื่อเขียน ๕.๗ ซม. แล้ววัดเป็นนิ้วจะได้ ๒.๒๔ นิ้ว

วิธีคำนวณ ๑ ซม. = ๐.๓๙๓๗ นิ้ว

๕.๗ ,, = .๓๙๓๗ × ๕.๗ นิ้ว

= ๒.๒๔๔ นิ้ว

๔. จงวัดดูว่า ๓.๑๕ นิ้ว จะเท่ากับกี่ ซม และ มม. จงคำนวณดูว่า ๑ ซม. เท่ากับกี่นิ้ว (ทำให้ถูกเพียงทศนิยมสองตำแหน่ง)

โดยวิธีวัด ๓.๑๕ นิ้ว = ๘.๐๐ ซม.

$$๑ \text{ ซม.} = \frac{๓.๑๕}{๘} \text{ นิ้ว}$$

= .๓๙ นิ้ว

๕. จงเขียนเส้นตรงสองเส้นยาว ๒.๙ ซม. และ ๖.๒ ซม. ตามลำดับ แล้ววัดดูว่ายาวเส้นละกี่นิ้ว เมื่อได้เท่าไรแล้วจงหาค่าของ ๑ นิ้วดูว่าเท่ากับกี่ ซม. และ มม แล้วหาส่วนเฉลี่ยจากผลที่ได้ด้วย

โดยวิธีวัด ๒.๙ ซม. = ๑.๑๔ นิ้ว

$$\therefore ๑ \text{ นิ้ว} = \frac{๒.๙}{๑.๑๔} = ๒.๕๔๓ \text{ ซม.}$$

และวัด ๖.๒ ซม. = ๒.๔๔ นิ้ว

$$\therefore ๑ \text{ นิ้ว} = \frac{๖.๒}{๒.๔๔} = ๒.๕๔๑ \text{ ซม.}$$

$$\therefore \text{ส่วนเฉลี่ย } ๑ \text{ นิ้ว} = \frac{๒.๕๔๓ + ๒.๕๔๑}{๒}$$

$$= \frac{๕.๐๘๔}{๒} = ๒.๕๔๒$$

= ๒.๕๔ ตอบ

๖. ระยะทาง ๑๐๐ ไมล์เขียนลงในแผนที่ยาว ๑ นิ้ว จงเขียนเส้นตรงแทนระยะ ๓๓๖ ไมล์ และ ๔๐๙ ไมล์ อย่างละเส้น

ระยะทาง ๑๐๐ ไมล์ เขียนลงในแผนที่ ๑ นิ้ว

" ๓๓๖ " " " ๓.๓๖ "

" ๔๐๘ " " " ๔.๐๘ "

แล้วให้วัดจาก Diaganal Scales เขียนลงไป

๗. ถ้าระยะ ๑ นิ้วในแผนที่แทนระยะ ๑ กิโลเมตร จงเขียนเส้นตรงแทนระยะ ๘๕๐ เมตร, ๒๙๘๐ เมตร และ ๑๐๑๐ เมตร

เส้นตรงยาว ๐.๘๕ นิ้ว ๒.๙๘ นิ้ว ๑.๐๑ นิ้ว

๘. แผนผังแห่งหนึ่งใช้มาตราส่วน ๑ นิ้ว แทน ๑๐๐ ลูกโซ่ (Links) จงวัดเส้นตรงเส้นหนึ่งแทนระยะ ๔๑๗ ลูกโซ่ว่าเป็นกี่ ซม. และ มม.

เส้นตรงยาว = ๔.๑๗ นิ้ว

วัด = ๑.๐๖ ซม.

๙. เส้นตรงเส้นหนึ่งในแผนที่แทนระยะ ๔๒.๕ กม. ใช้มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๕ กม. จงหาความยาวของเส้นตรงนั้น

๕ กม. แทน ๑ ซม.

∴ ๔๒.๕ " " $\frac{๔๒.๕}{๕}$ = ๘.๕ ซม.

โดยวิธีวัด ๘.๕ ซม. = ๓.๓๕ นิ้ว

๑๐. ระยะทางจากลอนดอนถึงออกสฟอรด (เป็นเส้นตรง) ยาว ๕๕ ไมล์ ถ้าระยะนี้เขียนลงในแผนที่เพียง ๒.๗๕ นิ้ว แผนที่นี้ใช้มาตราส่วนเท่าไร และระยะ ๑ นิ้วแทนกี่ไมล์ ระยะ ๑ ซม. แทนกี่ กม.

(๑ ซม. = ๐·๓๙๓๗ นิ้ว, ๑ กม. = $\frac{๕}{๘}$ ไมล์)

๒.๗๕ นิ้ว แทน ๕๕ ไมล์

∴ ๑ ,, ,, $\frac{๕๕}{๒·๗๕}$ = ๒๐ ไมล์

แต่ ๑ ซม. = ๐·๓๙๓๗ นิ้ว

และ ๑ กม. = $\frac{๕}{๘}$ ไมล์ (ใกล้ที่สุด)

∴ ·๓๙๓๗ นิ้วแทน (๒๐ × ·๓๙๓๗ × $\frac{๘}{๕}$) กม.

นิ้วคือ ๑ ซม. แทน ๑๒·๖ กม.

๑๑. แผนที่ในฝรั่งเศสใช้มาตราส่วน ๑ นิ้ว แทน ๓๕ ไมล์ จากปารีสถึงคาเลส์เขียนไว้ยาว ๔.๒ นิ้ว จงหาระยะทางว่าเป็นกี่ไมล์และกี่กิโลเมตร และบอกมาตราส่วนเป็นมาตราเมตริกด้วย (๑ กม. = $\frac{๕}{๘}$ ไมล์ตอบเป็น กม. ใกล้ความจริง)

๔.๒ นิ้วแทน (๓๕ × ๔.๒) ไมล์ = ๑๔๗ ไมล์

∴ เท่ากับ (๑๔๗ × $\frac{๘}{๕}$) = ๒๓๕ กม. ใกล้ที่สุด

โดยวิธีวัด ๔.๒ นิ้ว = ๑๐.๗ ซม.

∴ ๑๐·๗ ซม. แทน ๒๓๕ กม.

∴ ๑ ,, ,, $\frac{๒๓๕}{๑๐·๗}$ = ๒๒ กม. ใกล้ที่สุด

๑๒. ระยะทางจากเอคซีเตอร์ถึงปลีมัทยาว ๓๗ $\frac{๑}{๒}$ ไมล์ เขียนลงในแผนที่แห่งหนึ่งยาวเพียง ๒ $\frac{๑}{๒}$ นิ้ว และระยะจากลินคันถึงยอร์ค

ยาว ๘๘ กม. เขียนลงในแผนที่อีกแผ่นหนึ่งยาวเพียง ๗ ซม. จง เปรียบเทียบมาตราส่วนของแผนที่สองแผ่นนี้ว่า ๑ นิ้วแทนกี่ไมล์

แผนที่แผ่นที่ ๑ ใช้มาตราส่วน ๒$\frac{๑}{๒}$ นิ้ว ต่อ ๓๗$\frac{๑}{๒}$ ไมล์

$\therefore$ ๑ ,, ,, $\frac{๓๗\frac{๑}{๒}}{๒\frac{๑}{๒}}$ ไมล์

$= \frac{๗๕}{๒} \times \frac{๒}{๕} = ๑๕$ ไมล์

แผ่นที่ ๒ ใช้มาตราส่วน ๗ ซม. ต่อ ๘๘ กม.

๑ ซม. = ๐๓๙๓๗ นิ้ว

๗ ,, = ๗ × ๐๓๙๓๗ นิ้ว

๑ กม. = $\frac{๕}{๘}$ ไมล์

๘๘ ,, = ๘๘ × $\frac{๕}{๘}$ ไมล์

$\therefore$ ๗ × ๐๓๙๓๗ นิ้ว ต่อ ๘๘ × $\frac{๕}{๘}$ ไมล์

๑ ,, ,, = $\frac{๘๘ \times ๕}{๘ \times ๗ \times ๐๓๙๓๗}$ ไมล์

$= \frac{๕๕}{๒๐๗๕๕๘}$,,

$\therefore$ ๑ นิ้ว = ๒๐ ไมล์ (ใกล้ที่สุด)

๑๓. จงสร้าง Diaganal Scale อันหนึ่ง ใช้มาตราส่วน ๒ ซม. แทน ๑ หลา ให้สเกลอันนี้แสดง หลา ฟุต และนิ้วได้

วิธีสร้าง ลากเส้นตรง OX ให้ยาวพอสมควร แบ่ง OX ออกเป็น ๕ หรือ ๖ ส่วนเท่า ๆ กัน ส่วนหนึ่ง ๆ ให้ยาว ๒ ซม. ที่ O ลาก

OY ให้ตั้งฉากกับ OX กะให้ยาวพอเหมาะแล้วแบ่ง OY ออกเป็น ๑๒ ส่วนเท่า ๆ กัน จากส่วนแบ่งใน OY นี้ ลากเส้นตรงขนานกับ OX และแบ่งส่วนแบ่งที่หนึ่งของ OX ออกเป็น ๓ ส่วนเท่า ๆ กัน ส่วนที่หนึ่งลากเส้นตรงต่อ Y ส่วนที่สองที่สามลากให้ขนานกันไปตามลำดับ เป็นอันเสร็จ

แบบฝึกหัดที่ ๑๖

เมื่อเรียนถึงบทสร้างที่ ๗ แล้ว

๑. จงสร้างมุม ๖๐° หนึ่งมุม (ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียน) แล้วแบ่งครึ่งมุมนี้ครั้งหนึ่ง เมื่อเสร็จแล้วให้แบ่งซ้ำอีกให้เป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน

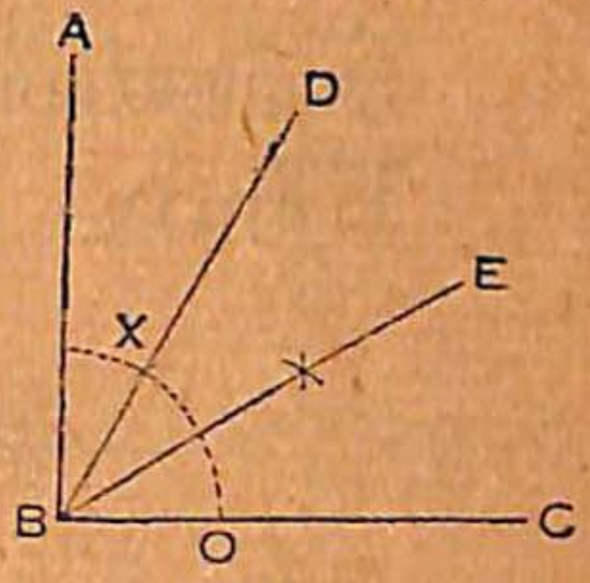
วิธีสร้าง สร้างรูป △ ด้านเท่า ABC โดยกำหนด AB ให้ยาวพอสมควร ที่ A และ B รัศมี AB เขียนส่วนโค้งตัดกันที่ C ฉะนั้น △ ABC ก็เป็น △ ด้านเท่า และมุม A, B, C ก็เท่ากัน (ทฤษฎีบทที่ ๕) ผลบวกของมุมทั้งหมดก็เท่ากับ ๑๘๐° (ทฤษฎีบทที่ ๑๖) ฉะนั้นก็กางมุมละ ๖๐°

แล้วแบ่งมุม ABC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันตามบทสร้างที่ ๑ แล้วแบ่งครึ่งมุมที่แบ่งออกอีกหนหนึ่ง

๒. จงแบ่งมุมฉากมุมหนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียน) จงแสดงถึงวิธีแบ่งมุม ๔๕° ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน (โดยใช้วิธีแบ่งครึ่ง)

(ยังไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับใช้แบ่งมุม ๆ หนึ่งออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน)

(๑) ให้ ABC เป็นมุมฉากมุมหนึ่ง



จะต้องสร้าง แบ่ง ABC ออกเป็น ๓ ส่วนเท่า ๆ กัน

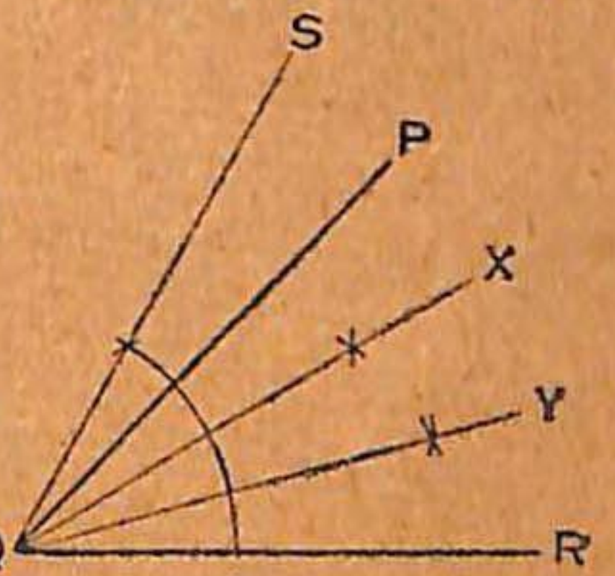
วิธีสร้าง ที่ B สร้างมุมให้กาง ๖๐° อย่างข้อ ๑ คือ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่ O

O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเดิม เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่ X ลาก BXD $\therefore D\hat{B}C = ๖๐^\circ$ $A\hat{B}D = ๙๐^\circ - ๖๐^\circ = ๓๐^\circ$

และแบ่ง $D\hat{B}C$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย BE โดยบทสร้างที่ ๑

$\therefore A\hat{B}C$ ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันด้วย DB, EB

(๒) ให้ $P\hat{Q}R$ เป็นมุม ๔๕° ที่กำหนดให้



จะต้องแบ่งมุมนี้ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง ที่ Q ทำ $S\hat{Q}R$ ให้กาง ๖๐° และให้ QS อยู่ทางเดียวกับ QP แล้วแบ่ง $S\hat{Q}R$ ออกเป็นสองส่วนเท่าๆกันด้วย QX และแบ่ง $X\hat{Q}R$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย QY

$\therefore P\hat{Q}R$ ก็ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันด้วย XQ, YQ

เพราะมุมเหล่านี้กางมุมละ ๑๕°

๓. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๖.๗ ซม. แล้วแบ่งออกเป็น ๕ ส่วนเท่า ๆ กัน วัดส่วนหนึ่ง ๆ ว่ายาวกี่นิ้ว (ให้ใกล้กับส่วนร้อยของนิ้ว) แล้วคำนวณดูว่าที่วัดนั้นได้จริงหรือไม่

(๑ ซม. = ๐.๓๙๓๗ นิ้ว)

ให้ใช้บทสร้างที่ ๗ แบ่งออกเป็น ๕ ส่วนแล้วลองวัดเป็นนิ้วดู

วิธีคำนวณ ส่วนหนึ่งยาว $= \frac{๑}{๕} \times ๖.๗$ ซม.

แต่ ๑ ซม. $= .๓๙๓๗$ นิ้ว

$\therefore \frac{๖.๗}{๕}$,, $= \frac{๖.๗}{๕} \times .๓๙๓๗$

$= .๕๓$ นิ้ว ใกล้ที่สุด

๔. จงแบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว ๓.๗๒ นิ้วออกเป็น ๗ ส่วนเท่า ๆ กัน แล้ววัดดูว่าส่วนหนึ่ง ๆ ยาวกี่ ซม. และกี่ มม. แล้วคำนวณดูว่าจะได้เท่านั้นจริงหรือไม่

ใช้วิธีสร้างตามบทสร้างที่ ๗ เหมือนข้อ ๓ แล้วให้วัดดู

วิธีคำนวณ ส่วนหนึ่ง $= \frac{๑}{๗} \times ๓.๗๒$ นิ้ว

$= \frac{๑}{๗} \times \frac{๓.๗๒}{.๓๙๓๗}$ ซม.

$= ๑.๓๔๙$ ซม.

$= ๑.๓$ ซม. (ใกล้ มม. ที่สุด)

๕. ที่จุด X บนเส้นตรง AB จงลากเส้น XP ให้ตั้งฉากกับ AB และทำ XP ให้ยาว ๑.๙ นิ้ว ลากเส้นเฉียง PQ ยาว ๓.๐ นิ้ว จาก P พบกับ AB ที่ Q จงวัดหาความยาวของ XQ

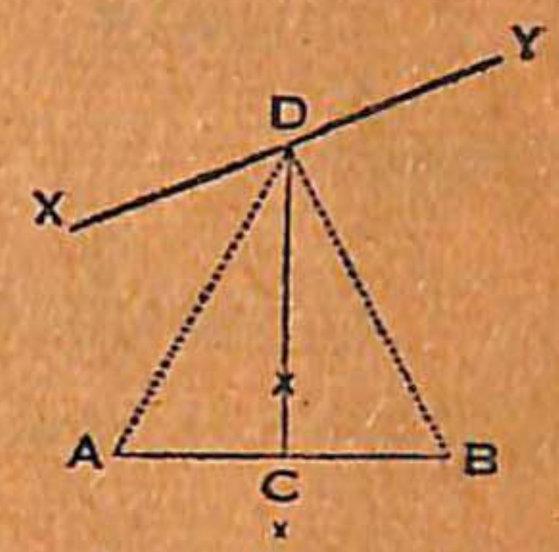
ตอบ ๒.๔ นิ้ว

๖. ในเส้นตรง XY จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะเท่ากันจากจุด A และจุด B ที่กำหนดให้ เมื่อไรจึงจะหาไม่ได้

กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

A, B เป็นจุดสองจุด

จะต้องหา จุด ๆ หนึ่งใน XY ที่อยู่ห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน



วิธีหา ลาก AB แบ่งครึ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ C

ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB ที่ C พบ XY ที่ D

ดังนั้นจุด D เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ลาก AD, DB

ใน $\triangle$ ADC กับ $\triangle$ DCB

$$\left.\begin{array}{l} AC = CB \\ CD \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ D\hat{C}A = D\hat{C}B \quad (\text{เป็นมุมฉาก}) \end{array}\right\} \therefore$$

$\therefore$ AD = DB (ทฤษฎีบทที่ ๔)

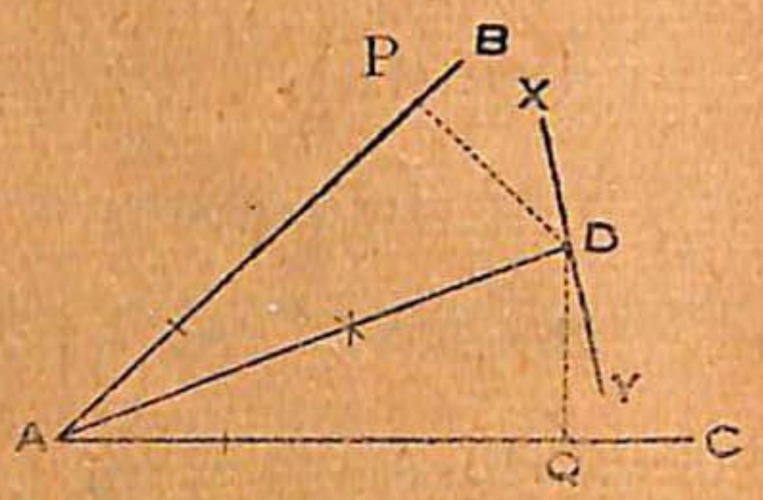
$\therefore$ D ก็อยู่ห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน

วิธีหาจะเป็นไปไม่ได้ต่อเมื่อ XY ขนานกับ CD

หรือ XY ตั้งได้ฉากกับ AB

๗. ในเส้นตรง XY จงหาจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งมีระยะเท่า ๆ กันจาก เส้นตรง AB, AC ซึ่งตัดกัน เมื่อไรจึงจะหาไม่ได้

กำหนดให้ XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง



AB, AC เป็นเส้นตรงสองเส้นพบกันที่ A

จะต้องหา จุด ๆ หนึ่งใน XY ซึ่งอยู่ห่างจาก AB และ AC เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง แบ่ง $B\hat{A}C$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันด้วย AD พบ XY ที่ D

∴ จุด D เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จาก D ลาก DP, DQ ให้ตั้งฉากกับ AB, AC ที่จุด P และ Q ตามลำดับ

ใน $\triangle$ APD กับ $\triangle$ ADQ

$$\therefore \begin{cases} A\hat{P}D = A\hat{Q}D & \text{(ต่างก็เป็นมุมฉาก)} \\ P\hat{A}D = D\hat{A}Q & \text{(สร้าง)} \\ AD \quad \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

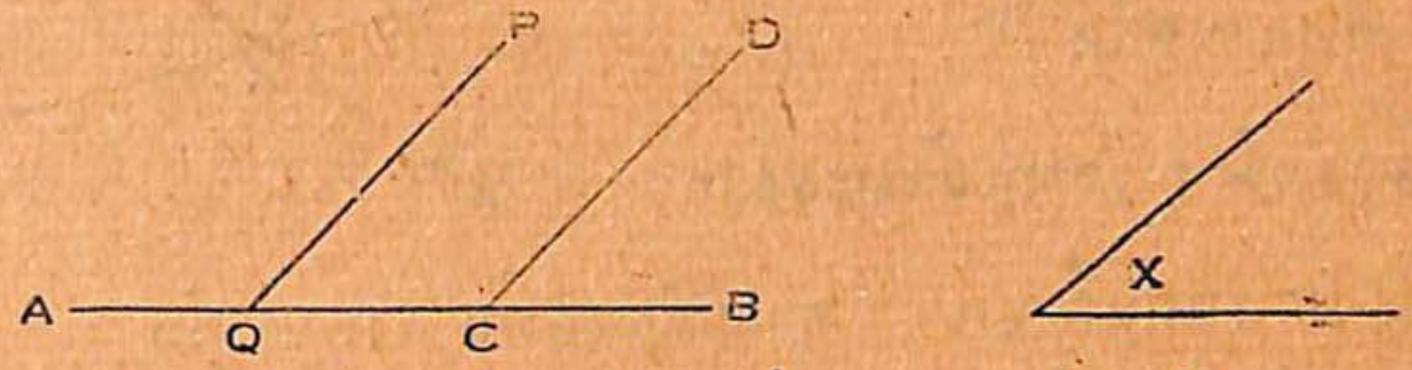
∴ DP = DQ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

∴ D ก็อยู่ห่างจาก AB และ AC เท่า ๆ กัน

∴ D จึงเป็นจุดที่ต้องการ

ถ้า XY ขนานกับเส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ จะหาจุดบน XY ซึ่งอยู่ห่างจาก AB และ AC เท่า ๆ กันไม่ได้

๘. จากจุด P ที่กำหนดให้ จงเขียนเส้นตรง PQ ทำมุมกับเส้นตรง AB ที่กำหนดให้ ให้เท่ากับมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้



กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ X เป็นมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง จาก P ลากเส้นตรง PQ ทำมุมกับ AB ให้เท่ากับมุม X ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง ให้ C เป็นจุดใด ๆ ใน AB ทำ $B\hat{C}D$ ให้กาง เท่ากับ $\hat{X}$ ที่กำหนดให้ (บทสร้างที่ ๕)

จาก P ลาก PQ ให้ขนานกับ DC ตัด AB ที่ Q (บทสร้างที่ ๖)

$\therefore$ PQ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ PQ ขนานกับ DC, AB เป็นเส้นตัด

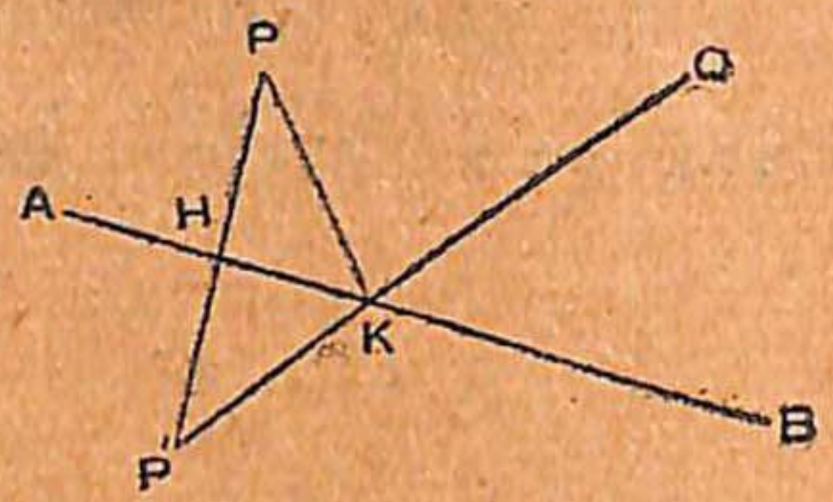
$\therefore$ $P\hat{Q}B = D\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $D\hat{C}B = \hat{X}$ (สร้าง)

$\therefore$ $P\hat{Q}B = \hat{X}$

$\therefore$ PQ เป็นเส้นที่ต้องการ

๙. จากจุด P และจุด Q ที่กำหนดให้สองจุดอยู่ข้างเดียวกันของเส้นตรง AB จงเขียนเส้นตรงสองเส้นพบกันที่ AB และต่างก็ทำมุมเท่ากันกับ AB



กำหนดให้ P, Q เป็นจุดสองจุด ที่กำหนดให้ อยู่ทางเดียวกันของเส้นตรง AB ที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงจาก P และ Q มาพบกันที่ AB ต่างก็ทำมุมกับ AB เท่ากัน

วิธีสร้าง จาก P ลาก PH ให้ตั้งฉากกับ AB

ต่อ PH ตรงออกไปถึง P′ ทำ HP′ ให้เท่ากับ PH ลาก PQ ตัด AB ที่ K

ลาก PK

∴ PK, QK เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle$ PHK กับ $\triangle$ HP′K

$$\therefore \begin{cases} PH = HP' & \text{(สร้าง)} \\ HK \quad \text{เป็นด้านร่วม} \\ P\hat{H}K = K\hat{H}P' & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore P\hat{K}H = H\hat{K}P'$ (ทฤษฎีบทที่ ๔)

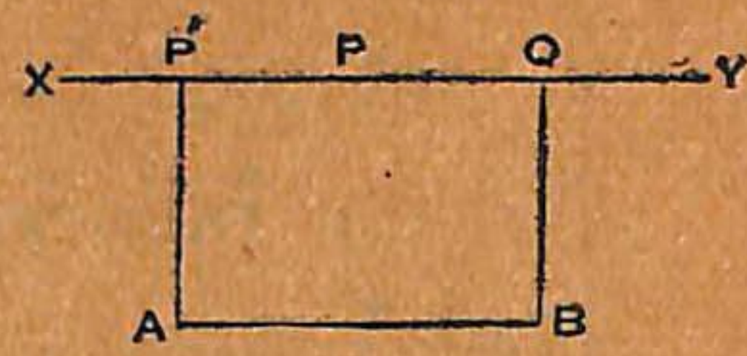
และ $\therefore H\hat{K}P' = Q\hat{K}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๓)

$\therefore P\hat{K}H = Q\hat{K}B$

∴ PK กับ QK ทำมุมกับ AB เท่ากันที่ K จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

๑๐. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด P ที่กำหนดให้ ให้เส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุด A และ B ไปยังเส้นตรงนั้นยาวเท่ากัน จะสร้างได้เสมอไปหรือไม่

กำหนดให้ P, A, B เป็นจุดที่



กำหนดให้สามจุด

จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่าน P ให้เส้นตั้งฉากลากจาก A และ B ไปยังเส้นตรงนั้นยาวเท่ากัน

วิธีสร้างที่ ๑ ลาก AB แล้วลาก XPY ให้ขนานกับ AB (บทสร้างที่ ๖) แล้วลาก AP′, BQ ให้ตั้งได้ฉากกับ XY

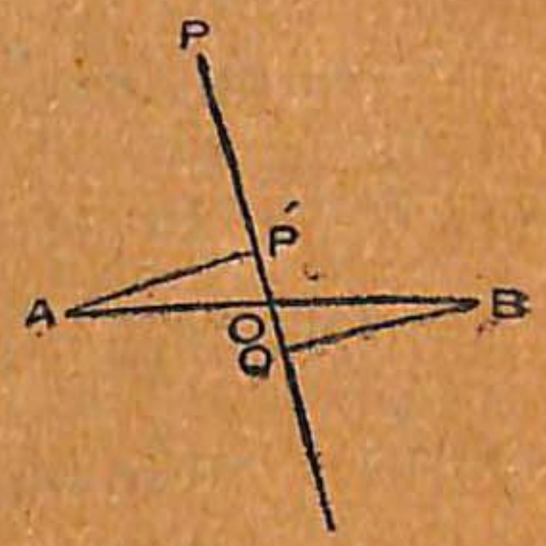
XY เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ P′B เป็น □ ด้านขนาน

$\therefore$ AP′ = BQ

XPY จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

วิธีสร้างที่ ๒ แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ O ลาก PO



และจาก A และ B ลาก AP′, BQ ให้ตั้งฉากกับ PO หรือ PO ต่อ

$\therefore$ PO เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle$ AP′O กับ $\triangle$ BOQ

$$\therefore \begin{cases} AO = BO & \text{(สร้าง)} \\ \hat{AOP} = \hat{BOQ} & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \\ \hat{AP'O} = \hat{OQB} & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{cases}$$

$\therefore$ $AP' = BQ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

$\therefore$ $PP'O$ จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

วิธีสร้างนี้ ถ้าจุด A, B และ P อยู่บนเส้นตรงอันเดียวกันแล้ว สร้างไม่ได้

ทท ๘๔ แบบฝึกหัดที่ ๑๗

เมื่อเรียนจบบทสร้างที่ ๑๐ แล้ว

๑. จงสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งซึ่งมีด้านเป็น ๗.๕ ซม., ๖.๒ ซม. และ ๕.๓ ซม.

จงเขียนเส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุดยอดตรงข้ามมาที่ด้านทั้งสามนี้ และวัดเส้นตั้งฉากว่ายาวเท่าไร

(สังเกตเส้นตั้งฉาก ถ้าเขียนอย่างถูกต้อง จะมาพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จะได้แสดงให้เห็นในภาค ๓) ให้นักเรียนสร้างวัดเอง

๒. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ ให้ $a = ๓.๐๐''$, $b = ๒.๕๐''$, $c = ๒.๗๕''$

แบ่งครึ่งมุม A ด้วยเส้นตรงที่ลากมาจากด้านฐานที่ X วัด BX, XC (ให้ใกล้กับส่วนร้อยของนิ้ว) และคำนวณหาค่าของ $\frac{BX}{CX}$ เพียงทศนิยมสองตำแหน่ง แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับค่าของ $\frac{c}{b}$

โดยวิธีวัด $BX = ๑\cdot๕๗$ นิ้ว, $XC = ๑\cdot๔๓$ นิ้ว

$$\therefore \frac{BX}{CX} = \frac{๑\cdot๕๗}{๑\cdot๔๓} = ๑\cdot๐๙๘$$

และ $$\frac{c}{b} = \frac{๒\cdot๗๕}{๒\cdot๕} = ๑\cdot๑๐$$

๓. ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว ๓๑๕ หลา กับ ๒๖๐ หลา และมุมในระหว่างด้านเป็น ๓๙° จงเขียนแผนผัง (มาตราส่วน ๑ นิ้วแทน ๑๐๐ หลา) แล้ววัดหาความยาวของด้านที่สาม

ลาก BC ให้ยาว ๓·๑๕ นิ้ว แทน ๓๑๕ หลา

ที่ B ทำ $C\hat{B}A$ ให้กาง ๓๙° และตัด AB ให้เท่ากับ ๒·๖ นิ้ว แทน ๒๖๐ หลา แล้ววัด AC ดูจะได้ ๒·๐๐ นิ้ว

ฉะนั้นด้านที่สามของสามเหลี่ยมยาว ๒๐๐ หลา

๔. ABC เป็นนารูป △ ด้านฐาน BC ยาว ๗๕ เมตร และมุมที่ B และ C เป็น ๔๗° และ ๖๘° ตามลำดับ จงเขียนแผนผังของนานี้ (มาตราส่วน ๑ ซม. แทน ๑๐ ม.) จงหาขนาดของ $\hat{A}$ โดยไม่ต้องวัด แล้วจึงวัดแผนผังหาความยาวของด้านทั้งสองของนานั้น แล้ววัดเส้นตั้งได้ฉากลากจาก A มายัง BC

$$\hat{A} = ๑๘๐° - ๔๗° - ๖๘° = ๖๕°$$

ลาก BC ให้ยาว ๗·๕ ซม. ที่ B และ C ทำ $C\hat{B}A$, $B\hat{C}A$ ให้กาง ๔๗°, ๖๘° ตามลำดับ

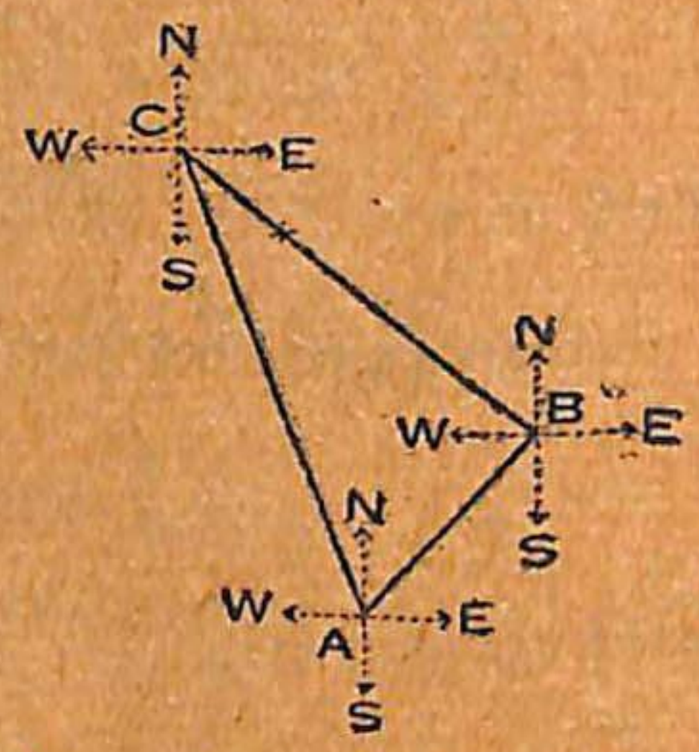
โดยวิธีวัดจากแผนผัง AB = ๗·๗ ซม. AC = ๖·๑ ซม. และเส้นตั้งได้ฉากลากจาก A มายัง BC = ๕·๖ ซม.

∴ ด้านของนายาว ๗๗ เมตร, ๖๑ เมตร และเส้นตั้งได้ฉาก ยาว ๕๖ เมตร

๕. เรือยอชต์ลำหนึ่งออกจากท่าแล่นไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือชั่วโมงละ ๙ นอต (Knots) เมื่อแล่นไปได้ ๒๐ นาทีก็เปลี่ยนแล่นไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ ๓๕ นาทีผ่านท้าคงเดิม ถามว่าเรืออยู่ห่างจากท่าเท่าไร และเรือจะต้องแล่นกลับทางไหน

จงเขียนแผนที่แสดงทางเดินของเรือใช้มาตราส่วน ๒ ซม. แทน ๑ นอต

กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดซึ่งเรือเปลี่ยนทางเดิน



๖๐ นาทีเรือแล่นไปได้ ๙ นอต

๒๐ ,, ,, ,, $\frac{๙}{๖๐} \times ๒๐ = ๓$,,

๓๕ ,, ,, ,, $\frac{๙}{๖๐} \times ๓๕ = ๕\frac{๑}{๔}$,,

ฉะนั้นจึงลาก AB ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือให้ยาว ๖ ซม. ที่ B ลาก BC ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือให้ยาว ๑๐ $\frac{๑}{๒}$ ซม.

โดยวิธีวัด CA = ๑๒.๑ ซม.

$S\widehat{C}A = ๑๕^\circ$ ราว ๆ นั้น

∴ ระยะทางจากท่าถึง C ไกล ๖.๐๕ นอต

และทางที่เรือจะแล่นกลับนั้นคือ ๑๕° ตะวันออกของทิศใต้

[รูปที่เขียนนี้ใช้มาตราส่วนเพียงครึ่งหนึ่งของที่กำหนดให้]

๖. จงเขียนรูป △ มุมฉากรูปหนึ่ง ให้ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

$c = ๑๐\cdot๖๐$ ซม. และด้าน $a = ๕\cdot๖๐$ ซม. แล้ววัดความยาวของด้าน b และจงหาค่าของ $\sqrt{c^๒ - a^๒}$ เมื่อเสร็จแล้วจงเปรียบเทียบผลทั้งสองว่าเป็นอย่างไรกัน.

ให้สร้างตามวิธีบทสร้างที่ ๑๐

$$\sqrt{c^๒ - a^๒} = \sqrt{๑๐\cdot๖^๒ - ๕\cdot๖^๒} = \sqrt{(๑๐\cdot๖ + ๕\cdot๖)\ (๑๐\cdot๖ - ๕\cdot๖)}$$

$$= \sqrt{๑๖\cdot๒ \times ๕\cdot๐} = \sqrt{๘๑} = ๙ \text{ ซม.}$$

เมื่อสร้างรูปให้ถูกต้องแล้ว b จะได้ ๙ ซม. เท่ากัน (ดูทฤษฎีบทที่ ๒๙)

๗. จงสร้างรูป △ รูปหนึ่งจากสิ่งที่กำหนดให้นี้ $B = ๓๔^\circ$ $b = ๕\cdot๕$ ซม. $c = ๘\cdot๕$ ซม. จงแสดงให้เห็นว่าสร้างได้สองรูป แล้ววัดหาค่าของ a กับ C ของ △ ทั้งสองรูป และแสดงให้เห็นว่ามุม C ทั้งสองมุมเป็นมุมประกอบสองมุมฉากซึ่งกันและกัน.

สร้างตามบทสร้างที่ ๙

มุม C ทั้งสองจะเป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน เพราะว่า $AC_1 = AC_2$ $\therefore A\hat{C}_1C_2 = A\hat{C}_2C_1$, แต่ $A\hat{C}B$ กับ $A\hat{C}_1C_2$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

$\therefore A\hat{C}_2B$, $A\hat{C}_1B$ ก็เป็นมุมประกอบสองมุมฉากกัน.

๘. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง $\hat{A} = ๕๐^\circ$, $b = ๖\cdot๕$ ซม. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมว่าจะสร้างได้กี่รูปในข้อหนึ่ง ๆ.

๑) a = ๗ ซม.　　๒) a = ๖ ซม.

๓) a = ๕ ซม.　　๔) a = ๔ ซม.

ลากเส้นตรง AX ให้ยาวพอสมควร ที่ A ทำมุม XÂY ให้กาง ๕๐° จาก AY ตัด AC ออกให้ยาว ๖·๕ ซม. C เป็นจุดศูนย์กลาง ใช้ความยาวของ a ในข้อ ๑—๔ เป็นรัศมีเขียนส่วนโค้งตัด AX ที่จุดต่าง ๆ ตามแต่จะตัดได้.

๑) ตัด AX ได้สองแห่ง แต่ที่ตัดทำมุมของ △ กาง ๕๐° ได้เพียงรูปเดียว อีกรูปหนึ่งกาง ๑๓๐°

ฉะนั้นข้อนี้จึงสร้าง △ ได้เพียงรูปเดียว

๒) ข้อนี้ตัดได้ ๒ แห่ง ที่ทำให้รูป △ มีมุม A กาง ๕๐°

∴ จึงสร้างได้ ๒ รูป

๓) ตัดแห่งเดียวคือ ส่วนโค้งเพียงสัมผัสเส้น AX เท่านั้น

ฉะนั้นจึงสร้างได้รูปเดียว

๔) ส่วนโค้งไม่ตัด AX เลย ฉะนั้นจึงสร้าง △ ไม่ได้

๙. ถนนตรงสองสายตัดกันเป็นมุมฉากที่ A มีคลองแห่งหนึ่งยาวเป็นเส้นตรงขวางถนนทั้งสองสาย ถนนสองสายมีสะพานข้ามคลองที่ B และ C ระยะระหว่างสะพานเป็น ๔๖๑ หลา และระยะจาก A ที่ตัดกันถึงสะพาน B เป็น ๒๖๑ หลา จงเขียนแผนผังและวัดระยะจาก A ถึง C ว่าเป็นเท่าไร

จะเห็นได้ว่าต้องสร้าง △ มุมฉากให้ A เป็นมุมฉาก AB, BC ยาว ๒๖๑, ๔๖๑ หลา เราสร้างได้โดยใช้บทสร้างที่ ๑๐ และใช้

มาตราส่วน ๑ นิ้วต่อ ๑๐๐ หลา จากรูปจะวัด AC ได้ ๓·๘ นิ้ว

∴ ระยะ AC ก็ใกล ๓๘๐ หลา

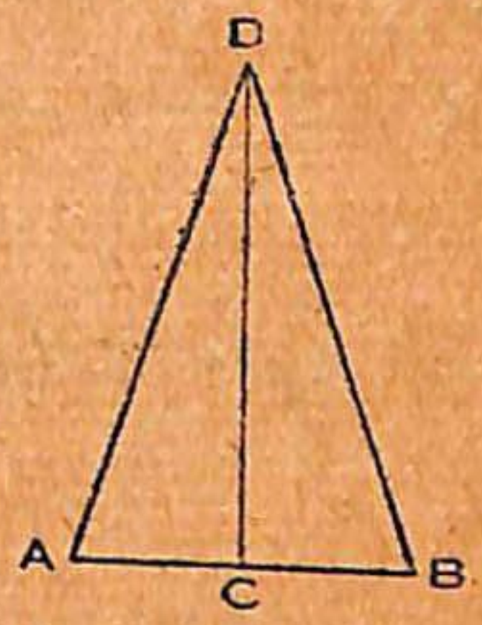
10-19 *๑๐. จงสร้างรูป △ หน้าจั่วรูปหนึ่งลงบนฐานยาว ๔ ซม. ส่วนสูงของรูป △ นั้น ๖·๒ ซม. จงพิสูจน์ว่าด้านสองด้านเท่ากัน และวัดด้านทั้งสอง (ให้ได้จำนวนใกล้เคียงกับมิลลิเมตร)

กำหนดให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้

ยาว ๔ ซม.

จะต้องสร้าง △ หน้าจั่วบนฐาน AB นี้

และให้มีส่วนสูง ๖·๒ ซม.



วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็น ๒ ส่วนเท่า ๆ กันที่ C ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB ให้ CD ยาว ๖·๒ ซม. ลาก DA , DB

∴ ABD เป็น △ ที่ต้องการ และวัดด้านเท่าได้ ๖·๕ ซ.ม.

พิสูจน์ ใน △ ADC กับ △ DCB

$$\left\{\begin{array}{ll} AC = CB & \text{(สร้าง)} \\ DC & \text{เป็นด้านร่วม} \\ A\hat{C}D = D\hat{C}B & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \end{array}\right.$$

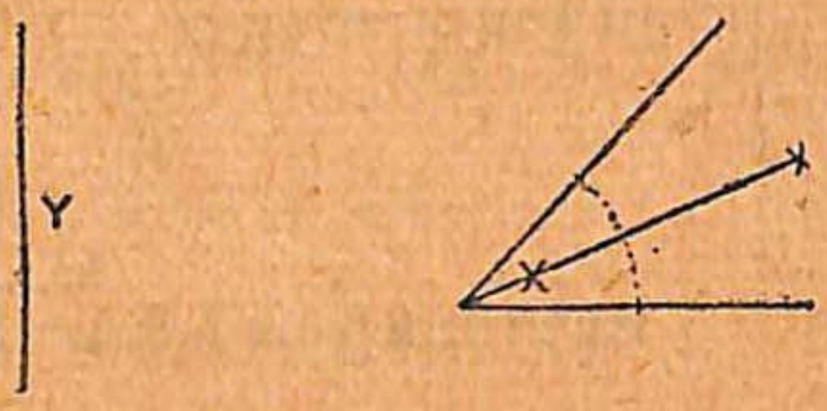
$$\therefore \quad AD = DB \qquad \text{(ทฤษฎีบทที่ ๔)}$$

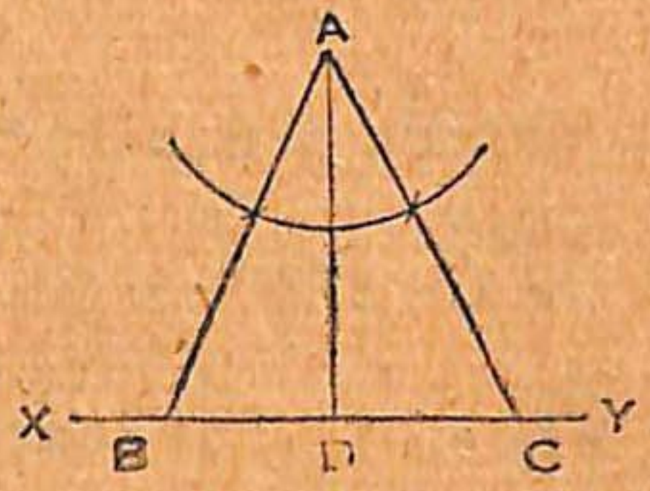
∴ △ ABD เป็น △ หน้าจั่ว

Q.E.D.

๑๑. (๑) จงสร้างรูป△หน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีมุมยอดเท่ากับมุมที่กำหนดให้มุมหนึ่ง และเส้นตั้งฉากจากจุดยอดมายังฐานยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง.

(๒) และสร้างรูป △ ด้านเท่ารูปหนึ่งให้เส้นตั้งฉากจากมุมยอดมายังด้านตรงข้ามยาว ๖ ซม. แล้ววัดด้านของรูป △ นี้ว่ายาวเท่าไร (ให้ได้จำนวนใกล้เคียงกับมิลลิเมตร)





(๑) ให้ X เป็นมุมที่กำหนดให้

Y เป็นเส้นส่วนสูงที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับฐาน

จะต้องสร้าง △ หน้าจั่ว ให้มุมยอด $A = \hat{X}$

ส่วนสูง $AD = Y$

วิธีสร้าง ลาก AD ให้เท่ากับ Y

ที่ D ลาก XDY ให้ตั้งได้ฉากกับ AD

ที่ A ทำมุม $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \frac{\hat{X}}{๒}$

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่วที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle$ ABD กับ $\triangle$ ADC

$$\therefore \begin{cases} A\hat{D}B = A\hat{D}C & \text{(ต่างเป็นมุมฉาก)} \\ AD & \text{เป็นด้านร่วม} \\ B\hat{A}D = C\hat{A}D & \text{(สร้าง)} \end{cases}$$

$\therefore$ AB = AC (ทฤษฎีบทที่ ๑๗)

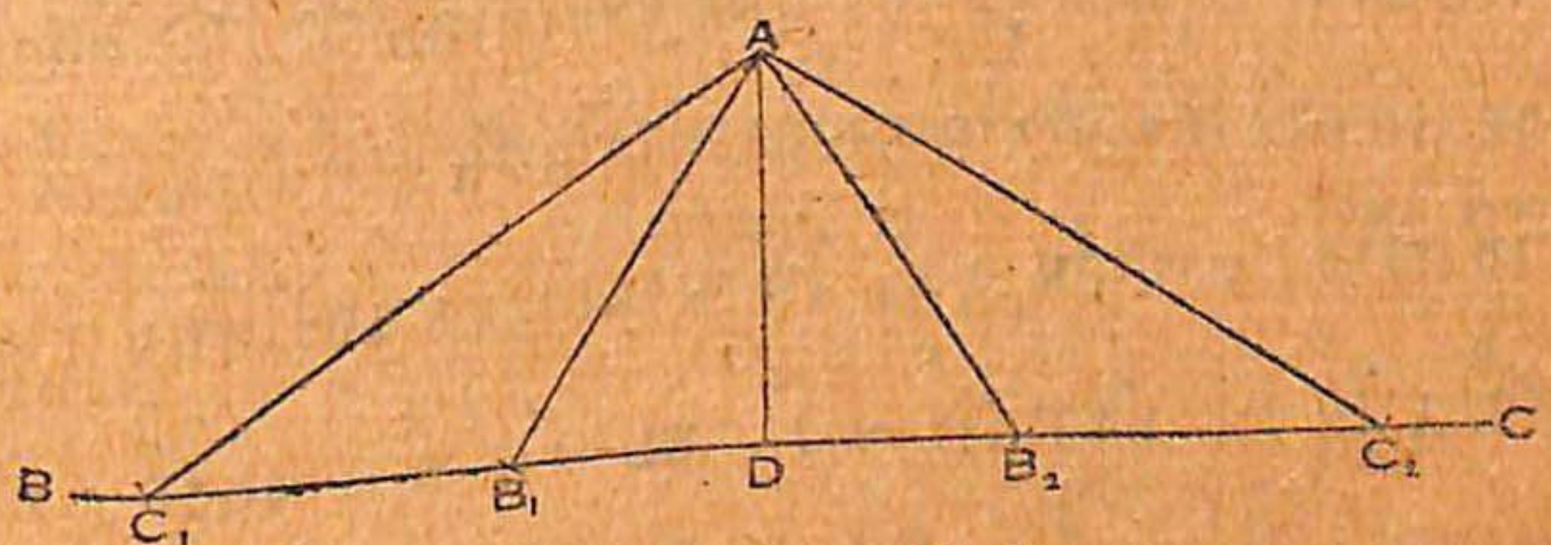
$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว มีมุมยอด $\hat{A} = \hat{X}$, AD = Y ตามที่กำหนดให้

(๒) ลาก AD ให้ยาว ๖ ซม. แล้วสร้างเหมือน (๑)

ให้ $D\hat{A}B = D\hat{A}C = ๓๐^\circ$

$\therefore$ มุมของ $\triangle$ ก็กางมุมละ ๖๐° จึงเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

๑๒. จงสร้าง $\triangle$ ABC ซึ่งมีเส้นตั้งฉากจาก A มาที่ BC ยาว ๕·๐ ซม. และด้าน AB, AC ยาว ๕·๘ ซม. และ ๙ ซม. ตามลำดับ แล้ววัดด้าน BC



ลาก AD ให้ยาว ๕ ซม. แทนเส้นตั้งฉากจากมุมยอด A มายังฐาน จาก D ลาก BDC ให้ตั้งฉากกับ AD A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๕·๘ ซม. เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่ B_1, B_2 และรัศมี ๙ ซม.

พิสูจน์ $\therefore$ EF ขนานกับ BC AB , AC เป็นเส้นตัด

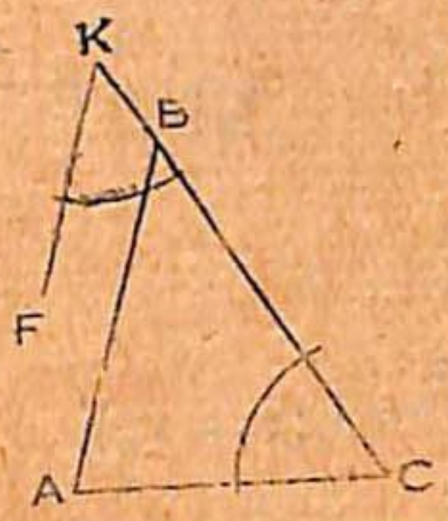
$\therefore$ $E\hat{A}B = A\hat{B}C$ และ $F\hat{A}C = A\hat{C}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

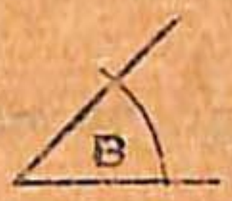
$\therefore$ $A\hat{B}C = \hat{L}$, $A\hat{C}B = \hat{M}$ และ A อยู่ห่างจาก BC เท่ากับ P

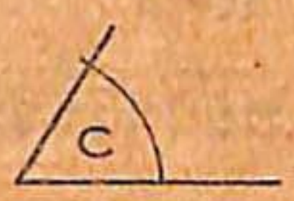
$\therefore$ $\triangle$ ABC จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๔. จงสร้างรูป $\triangle$ ABC (โดยไม่ใช้ไม้โปรเตคเตอร)

กำหนด $\hat{B}$, $\hat{C}$ และด้าน b ให้







ให้ B , C เป็นมุมที่กำหนดให้ b เป็นความยาวของด้าน AC ที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง รูป $\triangle$ รูปหนึ่งให้เท่ากับส่วนกำหนดนี้

สร้าง ลาก AC ให้ยาว = b , ที่ C ทำ $K\hat{C}A$ ให้กางเท่ากับ $\hat{C}$

ที่ K ทำ $F\hat{K}C$ กางเท่ากับ $\hat{B}$ ให้ F ชี้มาทาง A อยู่

ลาก AB ให้ขนานกับ FK ตัด CK ที่ B

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore$ FK // AB , KC เป็นเส้นตัด

$\therefore$ $F\hat{K}B = A\hat{B}C = \hat{B}$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๕. จงสร้างรูป $\triangle$ หน้าจั่วรูปหนึ่งลงบนฐานที่กำหนดให้ และให้มีมุมยอดเท่ากับ $\hat{L}$ ที่กำหนดให้

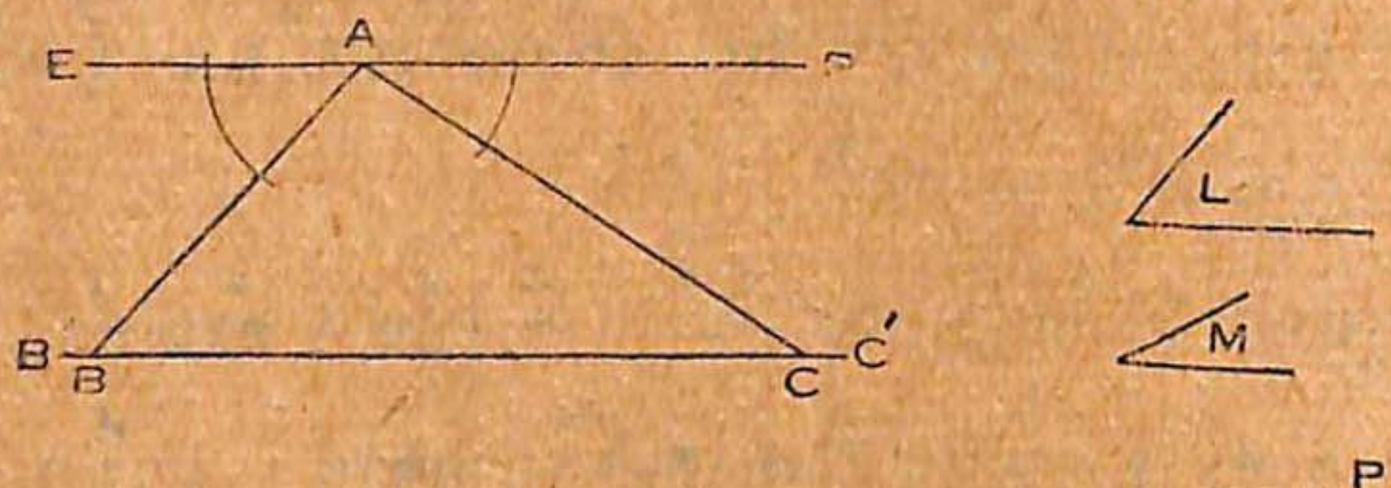
เขียนส่วนโค้งตัด BC ที่ C_1C_2

$\therefore$ $\triangle AB_1C_1, \triangle AB_1C_2, \triangle AB_2C_1, \triangle AB_2C_2$ ต่างก็เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

โดยวิธีวัด ฐาน $B_1C_1 = B_2C_2$ $= ๔\cdot๕$ ซม.

$B_2C_1 = B_1C_2$ $= ๑๐\cdot๔$ ซม.

๑๓. จงสร้างรูป$\triangle$ ABC มีมุมที่ B และ C เท่ากับ $\hat{L}$ และ $\hat{M}$ ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจาก A มาที่ BC เท่ากับเส้น P ที่กำหนดให้

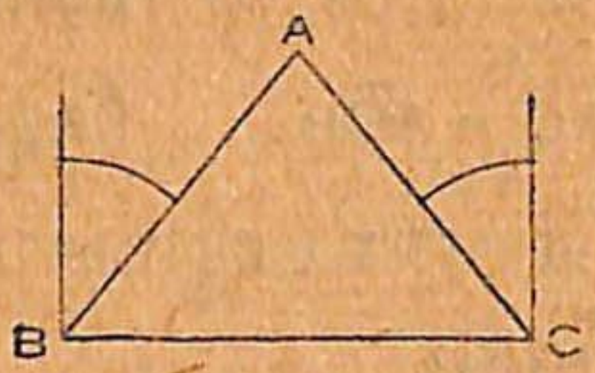


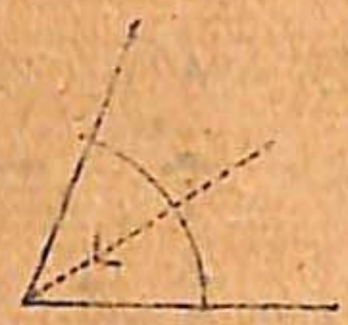
ให้ L, M เป็นมุม ๒ มุม P เป็นเส้นเส้นหนึ่งที่กำหนดให้

จะต้องสร้างรูป $\triangle$ รูปหนึ่ง มุมที่ฐานเท่ากับ $\hat{L}$, $\hat{M}$ ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งได้ฉากจากมุมยอดเท่ากับเส้น P ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง ลากเส้น BC' ให้ขนานกับ EF และให้อยู่ห่างกันเท่ากับ P ที่ A ใน EF ทำ $E\hat{A}B = \hat{L}$ พบ $B'C'$ ที่ B และที่ A ทำ $F\hat{A}C$ $= \hat{M}$ พบ $B'C'$ ที่ C (ทฤษฎีบทที่ ๕)

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ





ให้ $\widehat{L}$ เป็นมุมยอดที่กำหนดให้ BC เป็นฐานที่กำหนดให้
จะต้องสร้าง △ หน้าจั่วรูปหนึ่งให้มีส่วนตามกำหนดให้นี้
วิธีสร้าง ที่ B ทำมุม $C\widehat{B}A = ๙๐^\circ - \frac{๑}{๒}\widehat{L}$ และที่ C ก็ทำ

$A\widehat{C}B = ๙๐^\circ - \frac{๑}{๒}\widehat{L}$

$\therefore$ △ ABC เป็น △ หน้าจั่วซึ่งมีมุมยอด $= ๑๘๐^\circ - (B + C)$

$= ๑๘๐^\circ - ๒B$

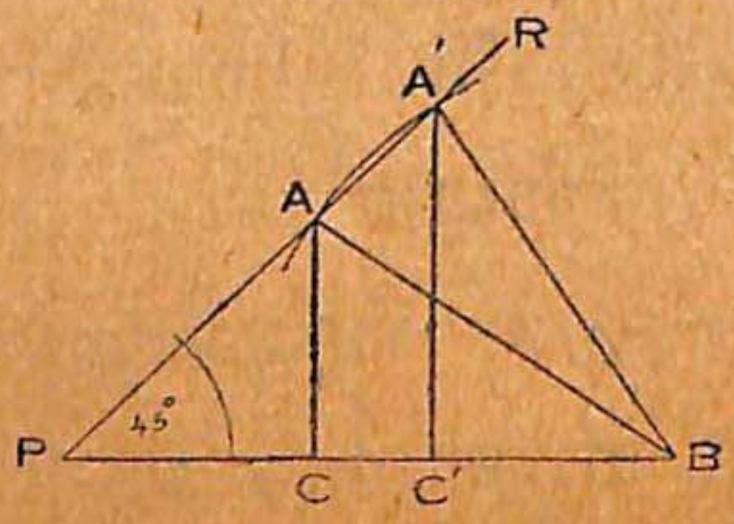
$= ๑๘๐^\circ - ๒\left(๙๐^\circ - \frac{๑}{๒}L\right)$

$= ๑๘๐ - ๑๘๐ + L = L$

๑๖. จงสร้างรูป △ มุมฉากรูปหนึ่งซึ่งมีด้านตรงข้ามกับมุมฉาก C เท่ากับด้านที่กำหนดให้ และผลบวกของ a กับ b เท่ากับด้านที่กำหนดให้อีกด้านหนึ่ง.

เช่น ถ้า $c = ๕\cdot๓$ ซม. และ $a + b = ๗\cdot๓$ ซม.

จงวัดหาความยาวของด้าน a กับ b และหาค่าของ $\sqrt{a^๒ + b^๒}$



วิธีสร้าง ลาก $PB = (a+b) =$ ๙.๓ ซม. ที่ P ลาก PR ให้ $\hat{BPR} = ๔๕^\circ$

B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $c =$ ๕.๓ ซม. เขียนส่วนโค้งตัด PR ที่ A และ A' ลาก $AC, A'C'$ ตั้งได้ฉากกับ PB ที่ C, C' ตามลำดับ

$\therefore$ ACB หรือ $A'C'B$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ $\hat{APC} = ๔๕^\circ$ และ $\hat{ACP}$ หรือ $\hat{A'PC'}$ เป็นมุมฉาก

$\therefore$ $\hat{PAC}$ หรือ $\hat{PA'C'} = ๔๕^\circ = \hat{APC}$ หรือ $\hat{A'PC'}$

$\therefore$ $AC = CP$ หรือ $A'C' = C'P$

$\therefore$ $AC + CB$ หรือ $A'C' + C'B = PB =$ ๙.๓ ซม.

(ถ้า c ยาวกว่าเส้นตั้งได้ฉากจาก B มายัง PR สร้างได้ ๒ รูป)

(„ c สั้น „ „ „ B „ PR „ ไม่ได้เลย)

(„ c เท่ากับ „ „ „ B „ PR „ ได้รูปเดียว)

โดยวิธีวัด ด้านทั้งสองของ $\triangle$ ที่เหลือยาว ๔.๕ ซม. ๒.๘ ซม

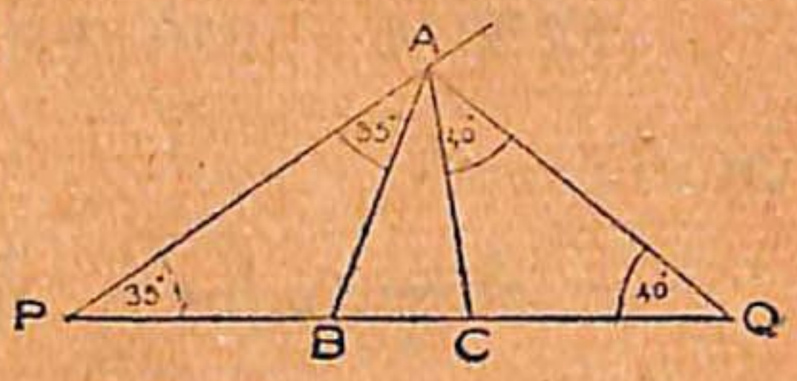
$$\sqrt{a^{๒}+b^{๒}} = \sqrt{(๔.๕)^{๒}+(๒.๘)^{๒}}$$

$$= \sqrt{๒๘.๐๙}$$

$$= ๕.๓ \text{ ซม.}$$

๑๗. จงสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งให้มีเส้นล้อมรอบยาวเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้ และมุมที่ฐานสองมุม เท่ากับมุมที่กำหนดให้สองมุม มุมต่อมุม ตัวอย่างเช่น $a+b+c =$ ๘ ซม., $\hat{B} = ๗๐^\circ$, $\hat{C} = ๘๐^\circ$

วิธีสร้าง ลาก PQ ให้ยาวเท่ากับความยาวของด้านทั้งสาม = ๘ ซม.



จาก P ลาก PA ทำ $A\hat{P}Q = \frac{B}{2} = ๓๕^\circ$

และจาก Q ลาก QA ทำ $P\hat{Q}A = \frac{C}{2} = ๔๐^\circ$

ที่ A ทำ $P\hat{A}B = A\hat{P}B$ พบ PQ ที่ B

และที่ A ทำ $C\hat{A}Q = A\hat{Q}C$ พบ PQ ที่ C

$\therefore$ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ $A\hat{P}B = P\hat{A}B$ (สร้าง)

$\therefore$ AB = BP

ทำนองเดียวกัน AC = CQ

$\therefore$ AB+BC+CA = PB+BC+CQ = PQ = ความยาวของด้านที่กำหนดให้ = ๘ ซม.

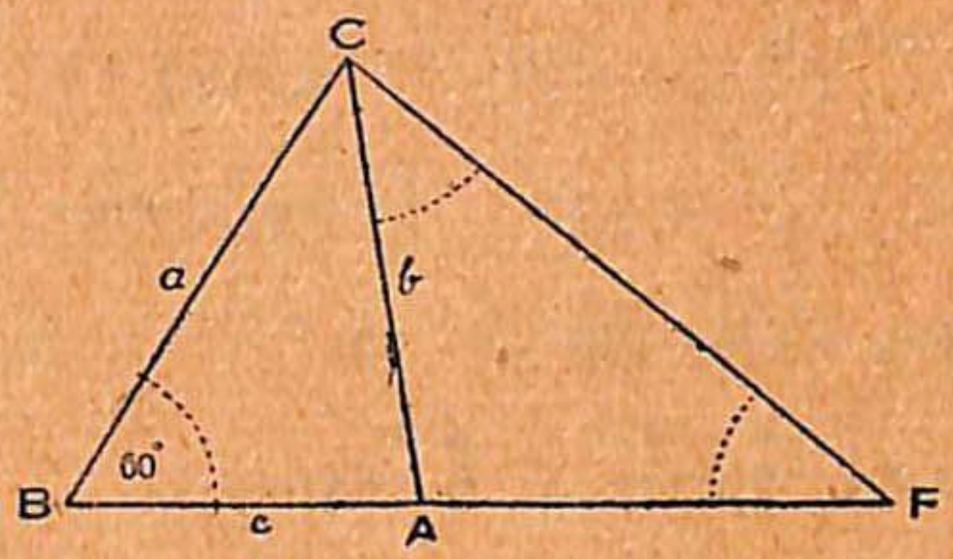
$A\hat{B}C = A\hat{P}B + P\hat{A}B$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$= ๗๐^\circ$

ทำนองเดียวกัน $A\hat{C}B = ๘๐^\circ$

$\therefore$ $\triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

๑๘. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ a = ๖.๕ ซม. c+b = ๑๐. ซม. และ $\hat{B} = ๖๐^\circ$ และวัดหาความยาวของ b และ c



สร้าง ทำ $C\hat{B}F = ๖๐^\circ$ ตัด $BC = ๖\cdot๕$ ซม. $BF = ๑๐$ ซม.

ลาก FC, และจาก C ลาก CA, ทำ $A\hat{C}F = A\hat{F}C$

$\therefore$ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because A\hat{F}C = A\hat{C}F$

$AF = AC$

$\therefore BA + AC = BA + AF = ๑๐$ ซม.

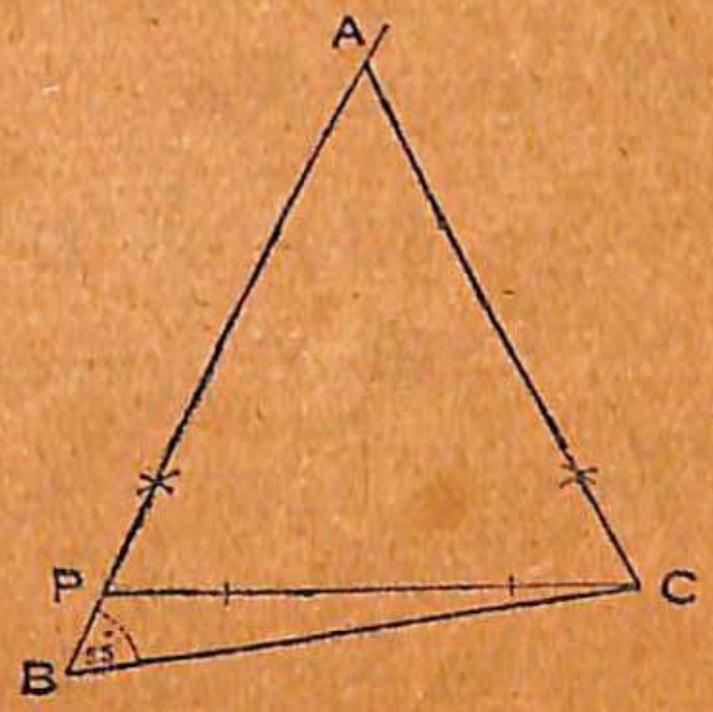
$\therefore$ $\triangle ABC$ จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

วัด $b = ๕\cdot๘$ ซม., $c = ๔\cdot๒$ ซม.

* ๑๙. จงสร้างรูป $\triangle ABC$ จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $a = ๗$ ซม. $c - b = ๑$ ซม. และ $\hat{B} = ๕๕^\circ$ แล้ววัดหาความยาวของ b และ c

สร้าง ทำ $P\hat{B}C = ๕๕^\circ$

ตัด $BC = ๗$ ซม. $BP = ๑$ ซม.



ลาก PC

ที่ C ทำมุม $A\hat{C}P$ เท่ากับ $C\hat{P}A$ พบ BP ต่อที่ A

$\therefore$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because \quad P\hat{C}A = A\hat{P}C \quad$ (สร้าง)

$\therefore \quad AC = AP \quad$ (ทฤษฎีบทที่ ๖)

และ $\therefore \quad BA - AC = BP =$ ๑ ซม.

$\therefore$ ABC จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

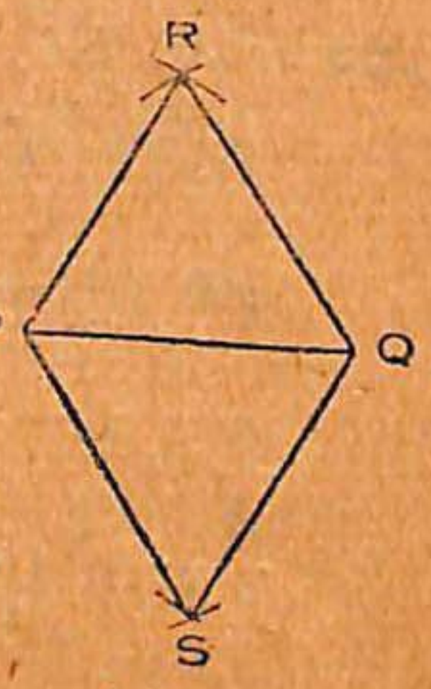
โดยวิธีวัด $AB =$ ๘·๓ ซม. $\quad AC =$ ๗·๓ ซม.

แบบฝึกหัดที่ ๑๙

เมื่อเรียนจบบทสร้างที่ ๑๓ แล้ว

๑. จงสร้างรูป □ ขนมเบียกปูนให้มีด้าน เท่ากับด้าน PQ ที่กำหนดให้ และมีเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่งยาวเท่ากับ PQ ด้วย และจงหามุมเหล่านั้นว่ากางมุมละกี่องศา (อย่าวัด) ให้ยกเหตุผลประกอบคำตอบด้วย

วิธีสร้าง บนฐาน PQ สร้างรูป $\triangle$ ด้านเท่า PQR กับ PQS



$\therefore$ PRQS เป็น □ ขนมเบียกปูนที่ต้องการ

พิสูจน์ $\because$ □ PRQS มีด้านเท่ากันหมดทั้งสี่ด้าน

และ $\because \quad R\hat{P}Q = P\hat{Q}S$ (ต่างก็กาง ๖๐°) และเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ PR ขนานกับ SQ

$\therefore$ PRQS เป็น $\square$ ขนมเบี้ยกปูน

$\hat{R}$ และ $\hat{S}$ เป็นมุม ๖๐° เพราะต่างเป็นมุมของ $\triangle$ ด้านเท่า

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S =$ ๑๒๐° เพราะต่างก็เป็น ๒ เท่าของมุมของ รูป $\triangle$ ด้านเท่า

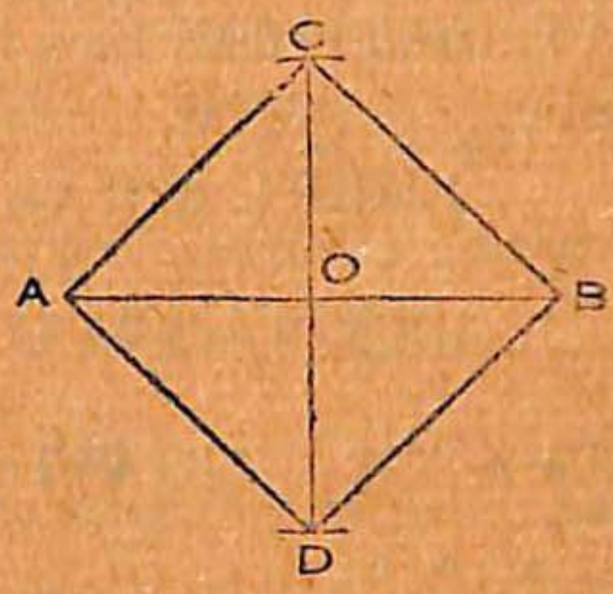
๒. จงสร้างรูป $\square$ จัตุรัสรองบนด้าน ๆ หนึ่งยาว ๒·๕ นิ้ว จงพิสูจน์ว่าเส้นทะแยงมุมยาวเท่ากัน และวัดเส้นทะแยงมุม (ให้ใกล้เคียงกับส่วนร้อยของนิ้ว) เพื่อสอบดูว่าสร้างรูปถูกหรือไม่

(ดูแบบฝึกหัดที่ ๓ ข้อ ๓)

๓. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรองบนเส้นทะแยงมุมยาว ๖ ซม. และวัดความยาวของด้านของรูปนี้ว่ายาวด้านละเท่าไร แล้วคิดเฉลี่ยหาผลที่ได้

ให้ AB เป็นเส้นทะแยงมุมที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง $\square$ จัตุรัสตามกำหนดนี้



วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ O

ลาก COD ให้ตั้งได้ฉากกับ AB

ทำ $OC = OD = OA$

ลาก AC, CB, BD, DA

$\therefore$ $\square$ ACBD เป็น $\square$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\triangle$ AOC = $\triangle$ OCB = $\triangle$ BOD = $\triangle$ DOA

(ทฤษฎีบทที่ ๔)

$\therefore$ AC=CB=BD=DA จึงเป็น □ ด้านเท่า

$A\hat{C}O = C\hat{A}O$ (ทฤษฎีบทที่ ๕)

และ $A\hat{C}O + C\hat{A}O = ๙๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

$\therefore$ $A\hat{C}O$ หรือ $C\hat{A}O$ ก็กาง ๔๕°

ทำนองเดียวกัน $B\hat{C}O = ๔๕^\circ$

$\therefore$ $A\hat{C}B = ๙๐^\circ$

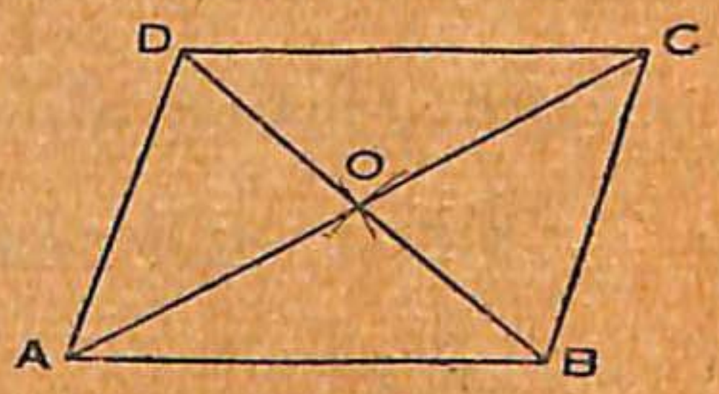
ทำนองเดียวกันมุมอื่น ๆ ของ □ก็กางมุมละ ๙๐°

$\therefore$ □ นี้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านเท่าซึ่งเรียกว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัส

๔. สร้าง □ ด้านขนาน ABCD ให้ด้าน AB = ๕·๗ ซม. และเส้นทะแยงมุม AC, BD ยาว ๘ ซม. และ ๖ ซม. ตามลำดับ จงวัดหาความยาวของด้าน AD

วิธีสร้าง ลาก AB ให้ยาว ๕·๗ ซม.

บนฐาน AB สร้าง $\triangle$ OAB ให้ OA ยาว ๔ ซม. BO ยาว ๓ ซม. ต่อ AO ตรงไปถึง C ทำ OC = AO ต่อ BO ตรงไปถึง D ทำ OD = OB



$\therefore$ □ ABCD เป็น □ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle$ AOD กับ $\triangle$ COB

$\therefore$ $\begin{cases} OD = OB & \text{(สร้าง)} \\ AO = OC & \text{(,,)} \\ D\hat{O}A = C\hat{O}B & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$

$\therefore$ $O\hat{D}A = O\hat{B}C$ (ทฤษฎีบทที่ ๔) ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ AD ขนานกับ BC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

ในทำนองเดียวกัน DC ก็ขนานกับ AB

$\therefore$ □ ABCD เป็น □ ด้านขนานที่ต้องการ

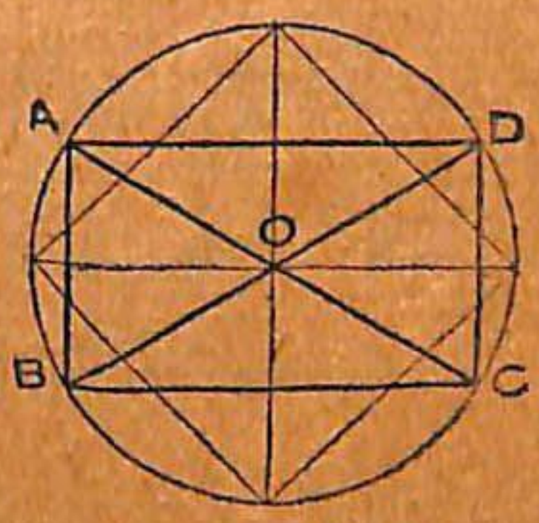
โดยวิธีวัด AD = ๔·๔ ซม.

๕. เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งยาวเท่ากัน (ยาวเส้นละ ๖·๐ ซม.) เส้นทั้งสองนี้แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นมุม ๖๐° จงชี้ให้เห็นว่าสิ่งที่กำหนดให้ห้าประการ ซึ่งไม่อาศัยกันได้กำหนดไว้ให้แล้วในข้อนี้

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมและบอกว่าเป็นสี่เหลี่ยมอะไร แล้วพิสูจน์คำตอบของท่านด้วย และจงวัดเส้นล้อมรอบ ถ้ามุมในระหว่างเส้นทะแยงมุมทวีขึ้นเป็น ๙๐° เส้นล้อมรอบนั้นจะทวีขึ้นร้อยละเท่าไร ?

สิ่งที่กำหนดให้ห้าประการโดยไม่อาศัยกัน ก็คือ เซกเมนท์ทั้งสี่ที่เกิดขึ้นโดยเส้นทะแยงมุมตัดกัน และมุมที่เส้นทะแยงมุมตัดกันอีกประการหนึ่ง

วิธีสร้าง (๑) O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๓ ซม. เขียนวงกลมลากเส้นผ่าศูนย์กลาง AOC, BOD ให้ $D\hat{O}C = ๖๐°$



ฉะนั้น ABCD เป็น □ ที่ต้องการ มีเส้น

ทะแยงมุมยาวเส้นละ ๖ ซม. ตัดครึ่งกันเป็นมุม ๖๐° รูปสี่เหลี่ยม
นี้เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เราพิสูจน์หาคำตอบได้ดังนี้

ใน $\triangle AOB$ กับ $\triangle DOC$

$$\therefore \begin{cases} AO = OC & \text{(โจทย์)} \\ BO = OD & \text{(โจทย์)} \\ A\hat{O}B = D\hat{O}C & \text{(ทฤษฎีบทที่ ๓)} \end{cases}$$

$\therefore B\hat{A}O = O\hat{C}D$ (ทฤษฎีบทที่ ๔) ซึ่งเป็นมุมแย้งกัน

$\therefore$ AB ขนานกับ DC (ทฤษฎีบทที่ ๑๓)

ทำนองเดียวกัน AD ก็ขนานกับ BC

$\therefore$ □ ABCD เป็น □ ด้านขนาน

โดยวิธีวัด AB = ๓ ซม. AD = ๕.๒ ซม.

$\therefore$ ด้านทั้งสี่ของ □ นี้ยาว ๒ (AB+AD) = ๑๖.๔ ซม.

(๒) ถ้ามุมในระหว่างเส้นทะแยงมุมทั้งสี่นี้เป็นมุมละ ๙๐°
จะวัดด้านยาวได้ด้านละ ๔.๒๔ ซม.

$\therefore$ ทั้งสี่ด้านยาวประมาณ ๔.๒๔ × ๔ = ๑๖.๙๖

$\therefore$ ความยาวของด้านทั้งสี่นี้ ๑๖.๙๖ − ๑๖.๔ = .๕๖

$\therefore$ ทั้งสี่นี้ร้อยละ $\frac{.๕๖}{๑๖.๔} \times ๑๐๐ = ๓.๔$ ใกล้ที่สุด

๖. ABCD เป็น □ รูปหนึ่ง AB = ๕.๖ ซม. BC = ๒.๕ ซม.
CD = ๔.๐ ซม. และ DA = ๓.๓ ซม.

จงแสดงให้เห็นว่าสิ่งที่กำหนดให้นี้เมื่อสร้างรูป □ แล้ว สี่เหลี่ยม
ที่สร้างยังไม่มีขนาดแน่นอน

และจงสร้างรูป □ เมื่อ (๑) $\hat{A} = ๓๐^\circ$ (๒) $\hat{A} = ๖๐^\circ$ ทำไมจึงสร้างไม่ได้ในเมื่อ $\hat{A} = ๑๐๐^\circ$ และอย่างน้อยที่สุดมุม A จะกางเท่าไร จึงจะสร้างรูป □ นี้ไม่ได้ จงสร้างรูปแสดงไว้ด้วย

ในเมื่อไม่กำหนดขนาดของมุมให้เช่นนี้ อาจสร้างได้หลายอย่าง แล้วแต่จะให้ $B\hat{A}D$ ใหญ่เล็กเพียงใด

∴ รูป □ จึงไม่มีขนาดแน่นอน

วิธีสร้าง เมื่อกำหนด $\hat{A}$ ให้ ๓๐°, ๖๐° นั้นให้ดูบทสร้างที่ ๑๑

ถ้า $\hat{A} = ๑๐๐^\circ$, BD ต้องยาวกว่า ๖·๕ ซม. จากนั้นส่วนโค้งซึ่ง D, B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๔·๐ ซม. และ ๒·๕ ซม. จะเขียนให้ตัดกันไม่ได้

ถ้า BD = ๖·๕ ซม. ส่วนโค้งสองเส้นนี้จะตัดกันบน BD เมื่อ BD ยาวกว่า ๖·๕ ซม. ไปแล้วย่อมสร้างไม่สำเร็จ และเมื่อสั้นลงมาถึง ๖·๕ ซม. ก็จะสร้างได้เป็นรูป △ ที่มี AD = ๓·๓ ซม. AB = ๕·๖ ซม. DB = ๖·๕ ซม. โดยวิธีวัด $\hat{A} = ๙๐^\circ$

∴ อย่างน้อยที่สุดมุม A กาง ๙๐° จึงสร้าง □ นี้ไม่ได้ (คือถ้ามุม A เล็กกว่า ๙๐° ลงมาอีกก็สร้าง □ ได้) ให้นักเรียนสร้างเอง

๗. จงแสดงวิธีสร้างรูป □ รูปหนึ่ง เมื่อรู้ความยาวของด้านสี่ด้าน และเส้นทะแยงมุมเส้นหนึ่ง จากบรรดาสิ่งที่เรารู้เหล่านี้ด้านไหนจะต้องมีลักษณะเป็นอย่างไร จึงจะสร้างรูปได้ตามที่กำหนดให้นั้น

จงแสดงวิธีของท่านโดยสร้างรูป □ ABCD เมื่อ

(๑) AB = ๓·๐", BC = ๑·๗" CD = ๒·๕", AD = ๒·๘"
และเส้นทะแยงมุม BD = ๒·๖" แล้ววัดหาความยาวของ AC

(๒) AB = ๓·๖ ซม., BC = ๗·๗ ซม., CD = ๖·๘ ซม.
DA = ๕·๑ ซม. และเส้นทะแยงมุม AC = ๘·๕ ซม. แล้ววัดมุมที่ B และ D

วิธีสร้าง ลาก BD ให้ยาวเท่ากับเส้นทะแยงมุมที่กำหนดให้ บนฐาน BD สร้าง △ ๒รูปให้อยู่รูปละทางของ BD และให้ส่วนยาวของด้านของรูป △ ทั้งสองรูปนี้ เท่ากับส่วนยาวของด้านของรูป □ ที่กำหนดให้ เราก็จะได้รูป □ ตามต้องการ

ให้เทียบดูข้อ ๑ ของแบบฝึกหัดนี้

ตามทฤษฎีบทที่ ๑๑ ว่า ด้านใดด้านหนึ่งของรูป △ ต้องสั้นกว่าอีก๒ด้านรวมกัน และมันต้องยาวกว่าผลต่างของอีก ๒ ด้านด้วย

ในที่นี้จึงเห็นว่า BD ต้องยาวกว่าผลต่างของด้าน BA กับ AD หรือด้าน BC กับ CD และต้องสั้นกว่าผลบวกของ BA กับ AD หรือ BC กับ CD จึงจะสร้าง □ สำเร็จ

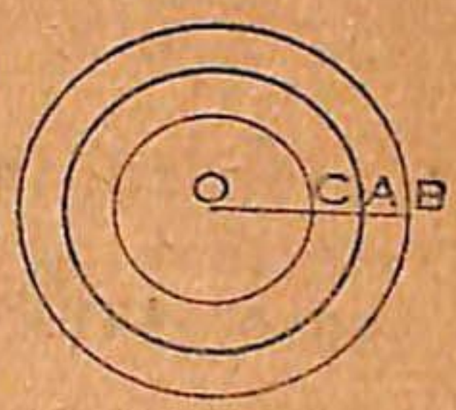
หน้า 94

* แบบฝึกหัดที่ ๑๙

เมื่อเรียนจบบทสร้างที่ ๑๕ แล้ว

๑. จงหาโลคัสของจุด ๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนไปมีระยะห่างจากเส้นรอบวงของวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่งเท่ากันเสมอ

ให้ A เป็นวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลางที่กำหนดให้ จะต้องหาโลคัสของจุด ๆ หนึ่ง ซึ่งเคลื่อนที่ไปมีระยะห่างจากเส้นรอบวงของวงกลม A เท่ากับระยะ P ที่กำหนดให้เสมอ



P

วิธีหา ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับผลบวกหรือลบของรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้กับ P (คือ AO + P หรือ AO — P) เขียนวงกลม B หรือ C

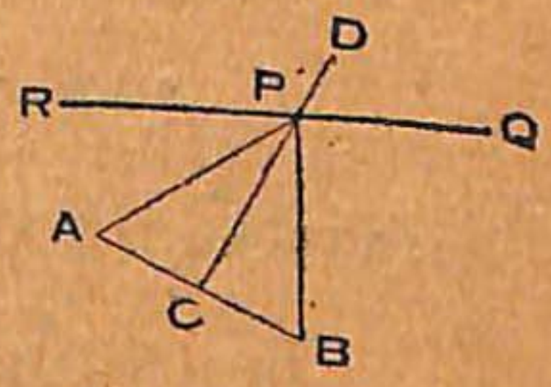
เส้นรอบวงของวงกลม B หรือ C นั้นเป็นโลคัสที่ต้องการ เพราะอยู่ห่างจากเส้นรอบวง A เท่า ๆ กันตลอด และเท่ากับระยะ P ที่กำหนดให้ด้วย

๒. จุด P เคลื่อนไปตามเส้นตรง RQ จงหาที่ซึ่งจุด P มีระยะห่างเท่ากันจากจุด A และ B ที่กำหนดให้สองจุด

ให้ RQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

A , B เป็นจุดสองจุดที่กำหนดให้

จะต้องหาว่า จุด P จะอยู่ตรงไหนใน RQ จึงมีระยะห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน



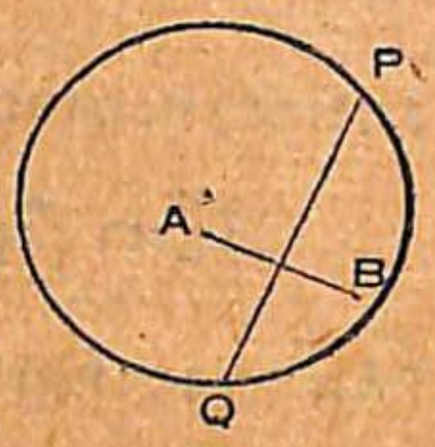
วิธีสร้าง ลาก AB แบ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ C

ลาก CD ให้ตั้งฉากกับ AB พบ RQ ที่ P

∴ P เป็นจุดที่ต้องการ เพราะจุดทุก ๆ จุดบน CD จะอยู่ห่างจากจุด A และ B เท่า ๆ กัน (บทสร้างที่ ๑๔)

๓. A กับ B เป็นจุดคงที่สองจุดอยู่ภายในวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมนี้ให้มีระยะห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน และจุดเช่นนั้นมีกี่จุด.

ให้ A , B เป็นจุด ๒ จุดอยู่ในวงกลมวงหนึ่ง



จะต้องหาจุดบนเส้นรอบวงซึ่งมีระยะห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง ลาก AB แบ่งครึ่ง AB เป็นมุมฉากให้เส้นแบ่งครึ่งพบเส้นรอบวงที่ P และ Q

∴ จุด P และ Q เป็นจุดที่ต้องการสองจุด

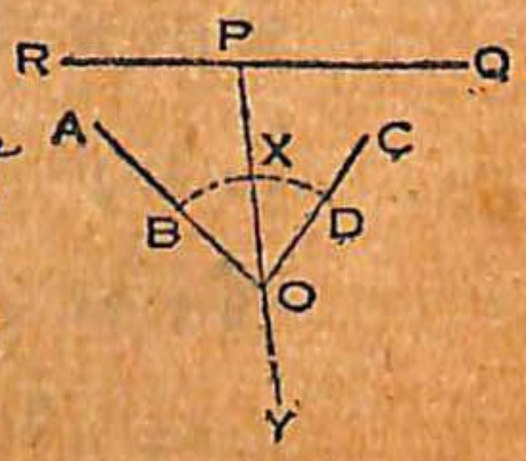
เพราะว่า P จะอยู่ห่างจาก A และ B เท่า ๆ กัน

และ Q ,, ,, ,, A ,, B ,, ,,

(บทสร้างที่ ๑๔)

๔. จุด P เคลื่อนไปตามเส้นตรง RQ จงหาจุดซึ่ง P มีระยะห่างจากเส้นตรง AB และ CD ที่กำหนดให้เท่ากัน.

ให้ RQ เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง



AB , CD เป็นเส้นตรงอีกสองเส้นที่กำหนดให้

จะต้องสร้าง หาจุด P บน RQ ให้อยู่ห่างจาก AB , CD เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง ต่อ AB , CD ไปพบกันที่ O

แบ่งครึ่งมุม $A\hat{O}C$ ทั้งภายในและภายนอก ด้วยเส้น OX , OY

ตามลำดับ และให้เลยไปพบ RQ ที่ P

จุดทุกจุดบน OX , OY ย่อมอยู่ห่างจาก ABO , CDO เท่า ๆ กัน

(บทสร้างที่ ๑๕)

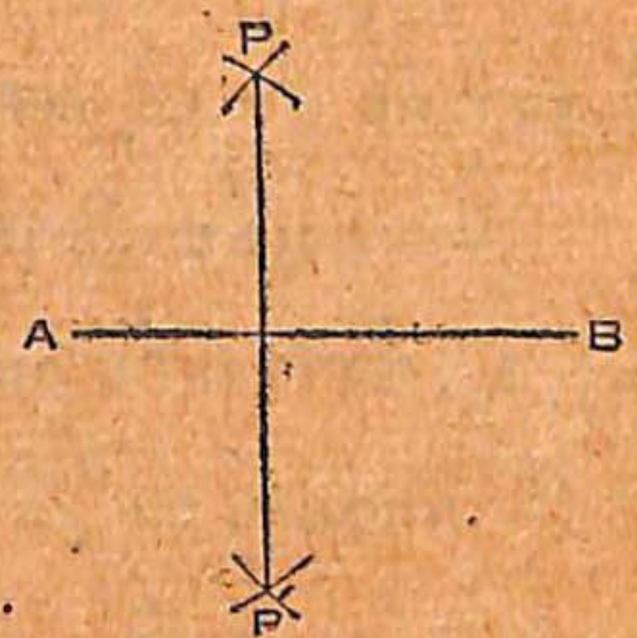
∴ P ก็อยู่ห่างจาก AB , CD เท่า ๆ กัน

๕. A และ B เป็นจุดคงที่สองจุดอยู่ห่างกัน ๖ ซม. จงหาจุด ๒ จุด ซึ่งมีระยะห่างจาก A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.

ให้ A และ B เป็นจุดสองจุด

อยู่ห่างกัน ๖ ซม.

จะต้องหา จุดสองจุดซึ่งอยู่ห่างจาก A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.



วิธีสร้าง A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๔ ซม.

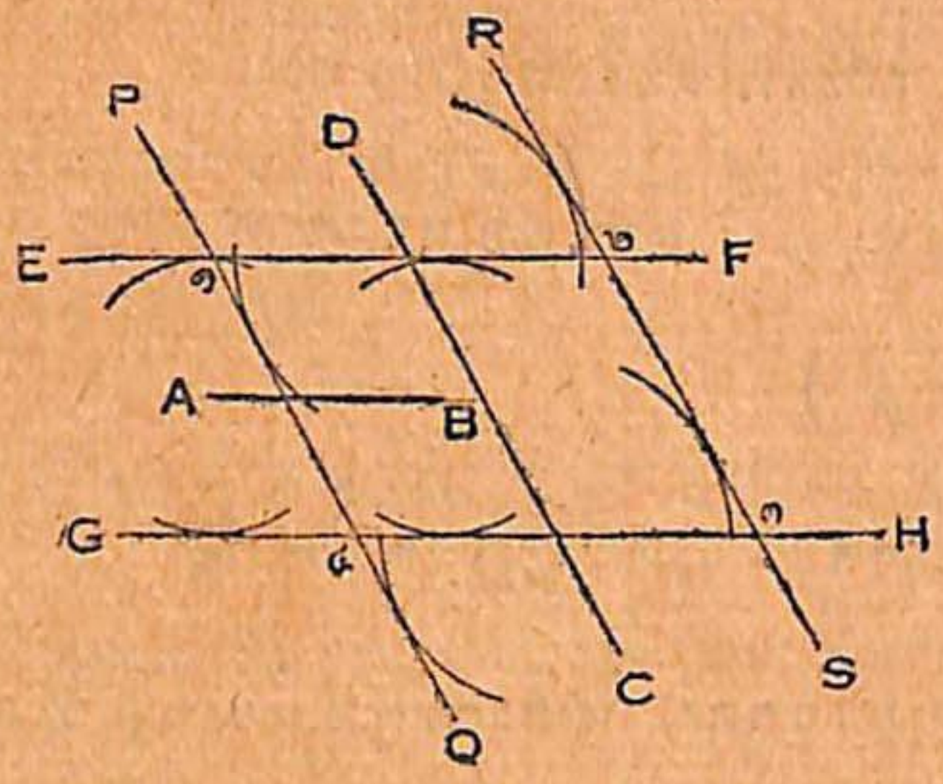
เขียนส่วนโค้ง, B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๕ ซม.

เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด P และ P′

∴ จุด P และ P′ เป็นจุดที่ต้องการ

เพราะว่า P หรือ P′ อยู่ห่างจาก A ๔ ซม. จาก B ๕ ซม.

๖. AB และ CD เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้สองเส้น จงหาจุดซึ่งมีระยะห่างจาก AB ๓ ซม. จาก CD ๔ ซม. ทำได้กี่วิธี หรือหาได้กี่จุด.



จุดทุกจุดซึ่งอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม. ต้องอยู่บนเส้นตรง EF, GH ซึ่งขนานกับ AB อยู่คนละทาง และอยู่ห่างจาก AB ๓ ซม.

ทำนองเดียวกันจุดทุก ๆ จุดซึ่งอยู่ห่างจาก CD ๔ ซม. ก็อยู่บน PQ, RS ซึ่งขนานกับ CD และอยู่ห่างจาก CD ๔ ซม. คนละข้าง

เส้นขนาน EF, GH ตัดกับเส้นขนาน PQ, RS ๔ แห่ง ที่ ๑, ๒, ๓, ๔ ตามลำดับ

จึงหาได้ ๔ จุดซึ่งเป็นจุดที่ต้องการ

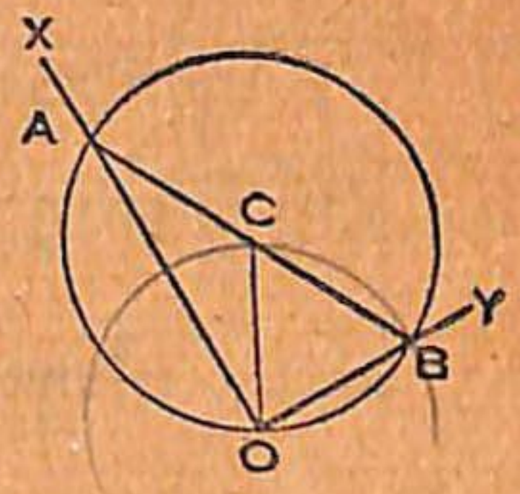
คืออยู่ห่างจาก AB ๓ ซม., CD ๔ ซม. ทั้ง ๔ จุด

[รูปที่เขียนให้ดูนี้ใช้มาตราส่วน ๒ : ๑]

๗. ไม้ตรงท่อนหนึ่งมีขนาดยาวตามที่กำหนดให้ เคลื่อนที่ไปมาอยู่ในระหว่างไม้บรรทัดตรงสองอันวางตั้งฉากกัน.

จงหาเส้นโลคัสของจุดกึ่งกลางของไม้ตรงท่อนนั้น และพิสูจน์ให้เห็นว่า เส้นโลคัสเส้นนี้เป็น $\frac{1}{4}$ ของเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง

ให้ XO, OY เป็นเส้นตรงสองเส้น
ตั้งได้ฉากกัน แทนไม้บรรทัด ให้AB เป็น
ไม้หมุนอันหนึ่ง C เป็นจุดกึ่งกลางของ AB



ตามบทสร้างที่ ๑๐ เราจะเห็นว่า เส้นซึ่งลาก
ต่อจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉากไปยังมุมฉากย่อมเท่ากับ $\frac{๑}{๒}$ ของ
เส้นตรงข้ามมุมฉากนั้น

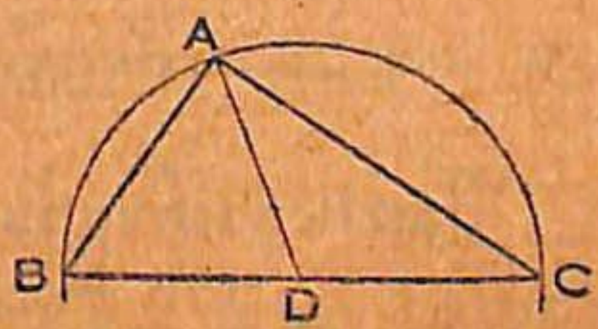
$\therefore$ OC $= \frac{๑}{๒}$ AB = จำนวนคงที่

$\therefore$ C ก็ต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีจุดศูนย์
กลางO รัศมีเท่ากับจำนวนคงที่ OC

C จะต้องอยู่ในระหว่าง $X\hat{O}B$ เสมอ ไม่ออกนอกเขตต์มุมนั้นได้
ฉะนั้นโลคัสของมันก็อยู่ในมุมฉาก คือ $\frac{๑}{๔}$ ของ เส้นรอบวงของวงกลม
วงหนึ่ง

๙. รูป $\triangle$ มุมฉากจำนวนหนึ่งสร้างอยู่บนด้านตรงข้ามกับมุม
ฉากโดยใช้ด้านตรงข้ามกับมุมฉากเป็นด้านฐานซึ่งกำหนดให้ จงหา
เส้นโลคัสของจุดยอดของรูป $\triangle$ เหล่านั้น.

ให้ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉากรูปหนึ่ง
ตั้งอยู่บนฐาน BC ซึ่งเป็นด้านตรงข้าม
มุมฉาก



จะต้องหา โลคัสของจุดยอด A ของ $\triangle$ ABC นั้น
วิธีสร้าง แบ่ง BC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ D ลาก DA
ฉะนั้น AD $= \frac{๑}{๒}$ BC (ข้อ ๒๕ แบบฝึกหัดที่ ๙)

∴ โลคัสของจุด A ก็คือวงกลมวงหนึ่งซึ่ง D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $\frac{1}{2}$ ของฐาน BC

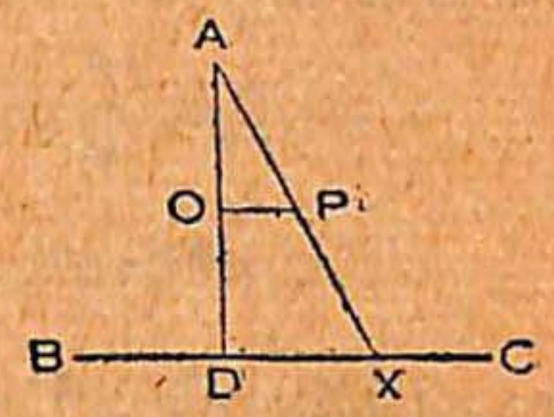
๙. A เป็นจุดคงที่ และ X เป็นจุดเคลื่อนที่ได้บนเส้นตรง BC ซึ่งเป็นเส้นคงที่ จงหาเส้นโลคัสของ P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่าเส้นโลคัสนั้นเป็นเส้นตรงขนานกับ BC

ให้ A เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง

BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ซึ่งมี X เป็นจุดเคลื่อนได้ใน BC

P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX



จะต้องหา โลคัสของจุด P และพิสูจน์ว่าเส้นโลคัสนั้นเป็นเส้นขนานกับ BC

วิธีสร้าง ลาก AD ให้ตั้งฉากกับ BC ที่ D, ลาก AX แบ่งครึ่ง AD ที่ O, แบ่งครึ่ง AX ที่ P ลาก OP และเส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป △ ย่อมขนานกับฐาน (ข้อ ๒ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

∴ OP ขนานกับ DX หรือ BC

ในทำนองเดียวกันจุดทุกจุดซึ่ง P เคลื่อนที่บนเส้นตรงผ่าน O แล้วก็ขนานกับ BC

∴ OP ก็เป็นโลคัสที่ต้องการ

และโลคัสนี้เป็นเส้นตรงที่ขนานกับ BC

๑๐. A เป็นจุดคงที่ X เป็นจุดเคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวง ของวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่ง จงหาเส้นโลคัสของ P ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ AX และพิสูจน์ว่าโลคัสนี้เป็นวงกลม

ให้ A เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง X เป็นจุดเคลื่อนที่ไปบนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่ง O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีพอสมควร P เป็นจุดกึ่งกลางของ AX

จะต้องหา โลคัสของจุด P และพิสูจน์ว่าโลคัสเป็นวงกลม

วิธีสร้าง ลาก OA, แบ่ง OA ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ C

ลาก AX, ,, AX ,, ,, ,, P

ลาก CP

เส้นที่ลากต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป △ ย่อมเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน (ข้อ ๓ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

$\therefore$ CP = $\frac{1}{2}$ OX = จำนวนคงที่ เพราะ OX เป็นรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้

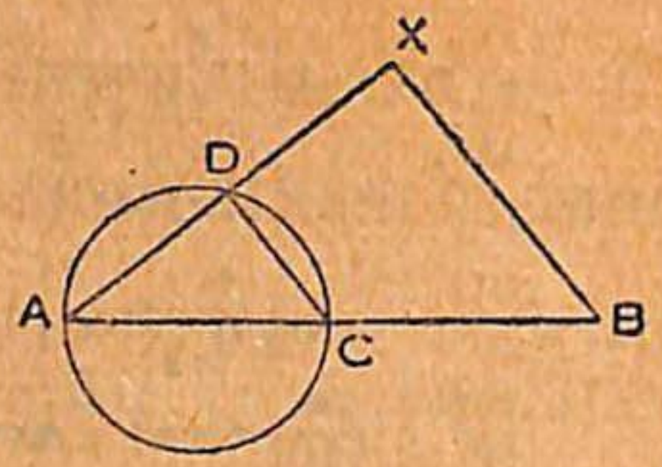
P จึงอยู่ห่างจาก C เป็นจำนวนคงที่เท่านี้เสมอ

นี่แหละคือโลคัสของมัน เพราะฉะนั้นโลคัสก็คือวงกลมวงหนึ่งซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้

๑๑. AB เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง AX เป็นเส้นตรงลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งลากผ่านจุด B ถ้า BX หมุนรอบ B จงหาเส้นโลคัสของจุดกึ่งกลางของ AX

ให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

AX ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่ลาก ผ่าน



จุด B

BX หมุนรอบ B

จะต้องหาโลคัสของจุดกึ่งกลางของ AX

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ C และแบ่งครึ่ง AX ที่ D

ลาก DC, DC ก็ขนานกับ BX (ข้อ ๒ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

∴ DC ก็ตั้งได้ฉากกับ AD ด้วย (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

∴ โลคัสที่ต้องการก็คือจุดทุก ๆ จุดของมุมฉาก ของ รูป △ มุมฉาก ซึ่งสร้างบนด้าน AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

(ต่อไปให้ใช้ข้อ ๙ ของแบบฝึกหัดนี้)

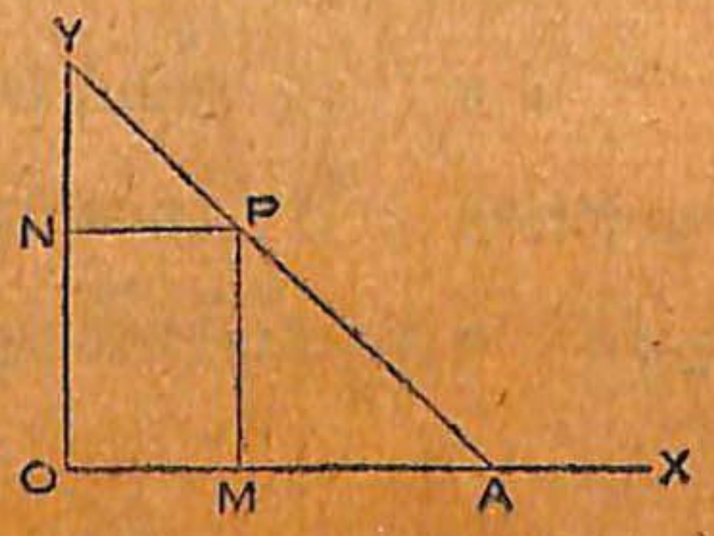
๑๒. เส้นตรง OX, OY สองเส้นตัดกัน เป็น มุมฉาก P เป็นจุด ๆ หนึ่งในระหว่างมุม XOY ลากเส้นตั้งฉาก PM, PN จาก P ไปที่ OX, OY ตามลำดับ จงหาโลคัสของ P เมื่อ

(๑) PM + PN เท่ากันเสมอไม่เปลี่ยนแปลง (เป็นต้นว่า = ๕ ซม.)

(๒) PM − PN เท่ากันเสมอไม่เปลี่ยนแปลง (เป็นต้นว่า =๒.๕ ซม.)

เมื่อทำเสร็จแล้วจงพิสูจน์มาให้ดูด้วย

ให้ OX,OY เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ระหว่างมุม YÔX แต่ว่าเส้นตั้งได้ฉาก PN, PM ซึ่งลากจาก P ไปยัง OY, OX



บวกกันหรือลบกันต้องเท่ากันเสมอ

จะต้องหาโลคัสของจุด P เมื่อ

(๑) PM+PN เท่ากันเสมอเป็นต้นว่า ๕ ซม.

(๒) PM − PN เท่ากันเสมอเป็นต้นว่า ๒.๕ ซม.

วิธีสร้าง (๑) วิธีหาจุด P นั้น ต้องตัด OM จาก OX ให้สั้นกว่า ๕ ซม. แล้วจาก M ตาก MP ให้ตั้งฉากกับ OX และให้ MP ยาวเท่ากับ ๕ ซม. − OM, แล้วตาก PN ให้ตั้งฉากกับ OY

∴ MN เป็น □ ผืนผ้า, NP = OM

∴ PM+PN = PM+OM = ๕ ซม.

จาก OX ตัด OA ให้ยาวเท่ากับ ๕ ซม.

ตาก PA

∴ PA เป็นโลคัสของจุด P ที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ MP=MA (ต่างก็เท่ากับ ๕ ซม. − OM)

P จะเลื่อนไปอยู่ตรงไหนใน PA, PM ก็เท่ากับ MA อยู่

และ PN+PM = OA = ๕ ซม. เสมอ

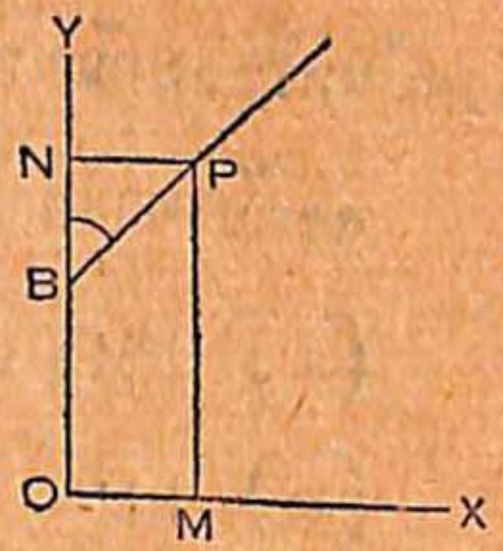
∴ PA จึงเป็นโลคัสของจุด P

และในเมื่อ MP=MA, $M\hat{P}A$ จึง = $M\hat{A}P$ และ = ๔๕° เพราะ $P\hat{M}A$ เป็นมุมฉาก, A จึงเป็นจุดคงที่ และ $O\hat{A}P$ ก็คงที่ ๔๕°

ฉะนั้นโลคัสของจุด P จึงอยู่บนเส้นตรงที่ทำมุม $O\hat{A}P$ กาง ๔๕°

และตัด OX, OY มีระยะจาก O ๕ ซม. เท่ากัน

(๒) จาก OY ตัด OB ให้ยาว ๒.๕ ซม.
ที่ B ทำ $\angle YBP = ๔๕^\circ$



BP เป็นโลคัสที่ต้องการ

พิสูจน์ ลาก PM, PN ตั้งได้ฉากกับ OX,OY

$\therefore$ NM เป็น □ ผืนผ้า PM จึง = NO

และ $\angle PNB$ เป็นมุมฉาก, $\angle NBP = ๔๕^\circ$

$\therefore \angle NPB = ๔๕^\circ = \angle NBP$

$\therefore$ NB = NP

$\therefore$ PM − PN = ON − BN = OB = ๒.๕ ซม.

$\therefore$ จุด P จะอยู่ที่ใดบนเส้นตรงซึ่งลากจาก B ห่างจาก O ๒.๕ ซม. เป็นมุม ๔๕° กับ BY แล้ว PM − PN ก็ต้องได้เป็นจำนวนคงที่ คือ ๒.๕ ซม. เสมอ

$\therefore$ BP ก็เป็นโลคัสที่ต้องการ

๑๓. เส้นตรง OX, OY สองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O P เป็นจุดเคลื่อนที่ได้ อยู่ในระหว่างมุม XOY ลากเส้น PM, PN จาก P ตั้งฉากกับ OX, OY ตามลำดับ จงหาเส้นโลคัสของ P (โดยไม่ต้องพิสูจน์) เมื่อ

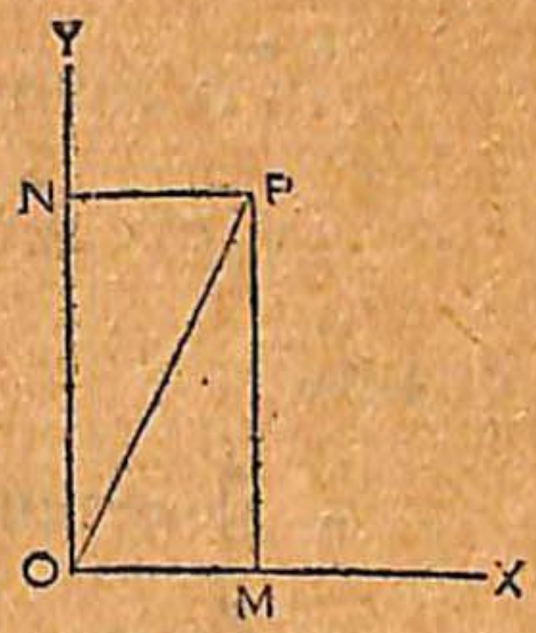
(๑) PM = ๒ PN

(๒) PM = ๓ PN

ให้ OX, OY ตัดกันเป็นมุมฉากที่ O

P เป็นจุดเคลื่อนที่ได้ในระหว่าง $Y\hat{O}X$

PM, PN เป็นเส้นตั้งได้ฉากตากจาก P



มายัง OX, OY

จะต้องหาโลคัสของจุด P เมื่อ

(๑) $PM = ๒\,PN$

(๒) $PM = ๓\,PN$

วิธีสร้าง (๑) จาก OX ตัด OM ให้ยาวพอสมควร ที่ M

ตาก MP ให้ตั้งได้ฉากกับ XO

ทำ MP ให้ยาวเท่ากับ ๒ OM

ตาก OP

ฉะนั้น OP เป็นโลคัสที่ต้องการ

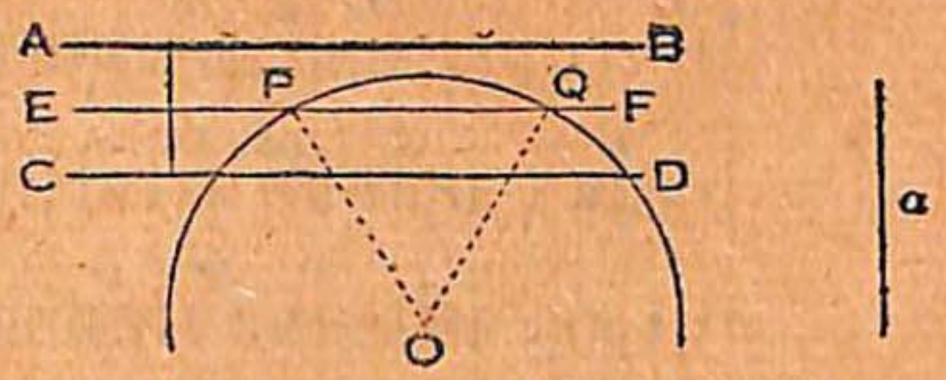
(๒) ทำนองเดียวกับ (๑) คือทำ MP ให้เท่ากับ ๓ OM

๑๔. จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะห่างจากจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่ง ระยะระหว่างจุดสองจุดนี้ก็ได้กำหนดให้ไว้ด้วยเหมือนกัน และจุดที่จะหานั้นต้องมีระยะห่างเท่ากันจากเส้นตรงซึ่งขนานกันสองเส้นซึ่งกำหนดให้

เมื่อไรโจทย์ข้อนี้จึงจะหาได้สองจุด เมื่อไรจะหาได้จุดเดียว และเมื่อไรจะหาไม่ได้เลย

ให้ O เป็นจุด ๆ หนึ่ง

AB, CD เป็นเส้นขนานกัน



สองเส้น

a เป็นความยาวระยะหนึ่ง

จะต้องหา จุดซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากับ a ที่กำหนดให้ และอยู่ห่างจากเส้นขนาน AB, CD เท่า ๆ กันด้วย

วิธีสร้าง ลาก เส้น ตั้งได้ฉาก ระหว่างเส้นขนาน AB กับ CD แล้วแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

ลาก EF ผ่านจุดแบ่งครึ่งให้ขนานกับ AB, CD

จุดที่ต้องการจะอยู่บนเส้น EF นี้ จึง จะอยู่ห่างจากเส้น ขนาน เท่า ๆ กัน

O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี a เขียนวงกลมตัด EF ที่ P,Q

∴ จุด P และ Q นี้เป็นจุดที่ต้องการ เพราะอยู่ห่างจาก O เท่ากับ a และอยู่ห่างจากเส้นขนานเท่า ๆ กันด้วย

จะได้สองจุดเมื่อ a ยาวกว่าเส้นตั้งได้ฉากลากจาก O ไปยัง EF

,, จุดเดียว ,, a ยาวเท่ากับ ,, ,, O ,, EF

จะไม่ได้เลย ,, a สั้นกว่า ,, ,, O ,, EF

๑๕. S เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง มีระยะห่างจากเส้นตรง MX ที่กำหนดให้ ๒ นิ้ว จงหาจุดสองจุดซึ่งมีระยะห่างจาก S เป็น ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว และห่างจาก MX ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว

(ใช้ ๑" : ๑ ซม.)

ให้ MX เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

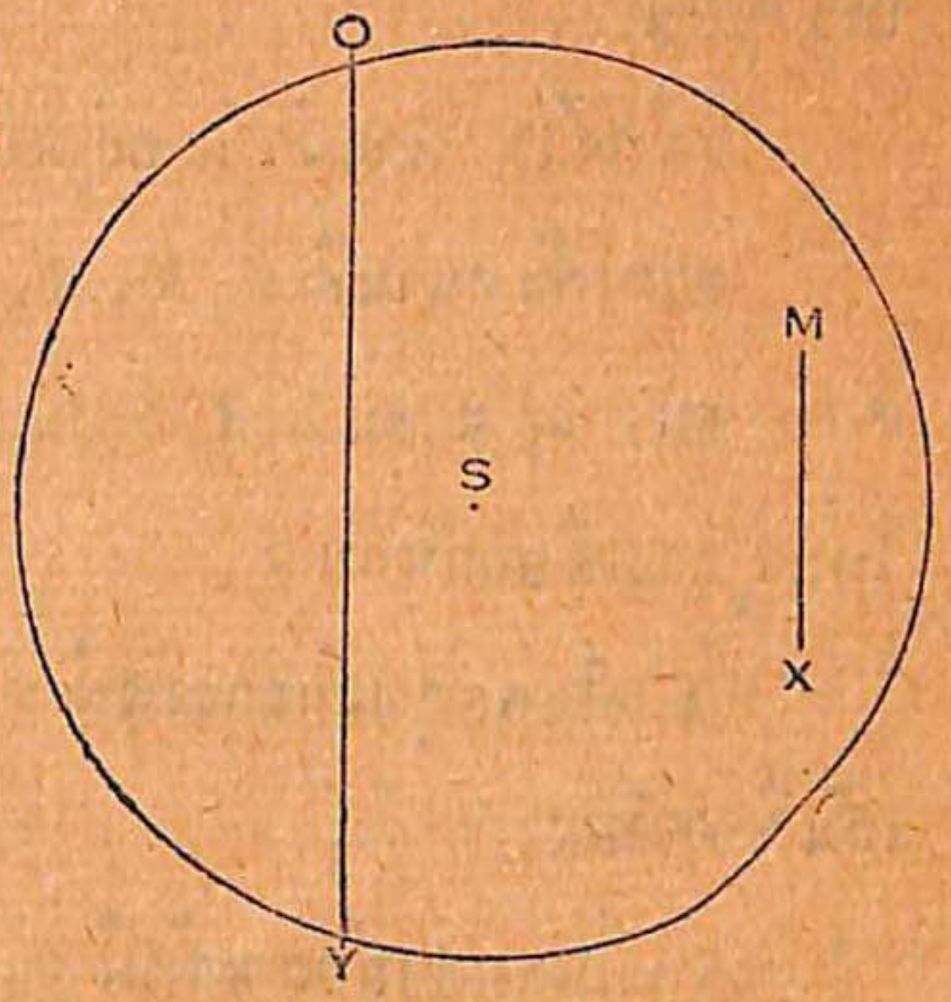
S เป็นจุด ๆ หนึ่ง อยู่ห่าง

จาก MX ๒ นิ้ว

จะต้องหา จุดสองจุดซึ่ง

อยู่ห่างจาก S ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว และอยู่

ห่างจาก MX ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว



วิธีสร้าง ลากเส้นขนาน

กับ MX ให้ห่างจาก MX ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว ฉะนั้นจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจาก MX

๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว ก็ต้องอยู่บนเส้นขนานทั้งสองข้างนี้

และจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจาก S ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว ก็ต้องอยู่บนเส้นรอบวง

ซึ่ง S เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี ๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว และถ้าเส้นรอบวงตัดเส้น

ขนานที่ O, Y, O, Y ก็เป็นจุดร่วมที่อยู่ห่างจาก S และจาก MX

๒ $\frac{๓}{๔}$ นิ้ว เท่า ๆ กัน

๑๖. จงหาจุดชุดหนึ่งซึ่งมีระยะห่างเท่า ๆ กันจากจุด S ที่

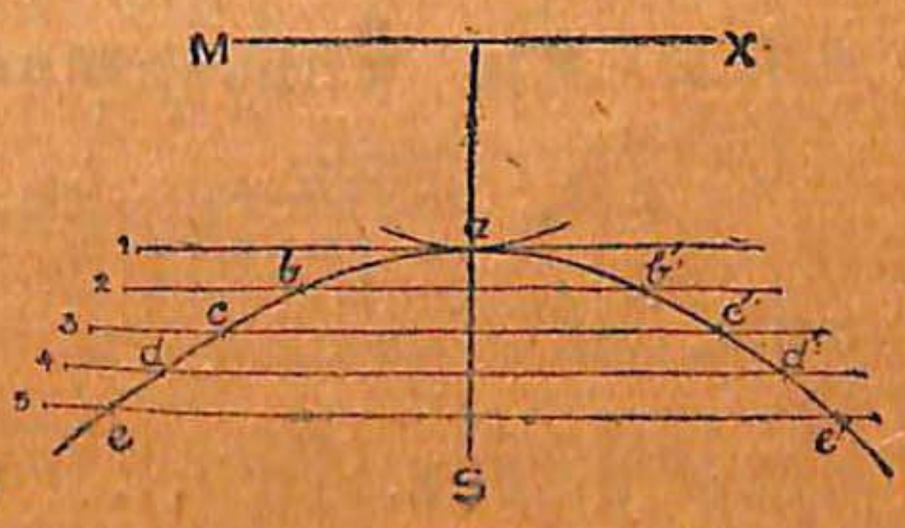
กำหนดให้ และห่างเท่า ๆ กันจากเส้นตรง MX ที่กำหนดให้ จง

เขียนส่วนโค้งด้วยมือผ่านจุดทั้งหลายที่หาได้

ให้ MX เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

S เป็นจุด ๆ หนึ่ง

จะต้องหา จุดจำนวนหนึ่ง



ให้อยู่ห่างจาก MX และอยู่ห่างจาก S

เท่า ๆ กัน

วิธีสร้าง หากว่า S อยู่ห่างจาก MX ๕ ซม.

ลากเส้นขนานที่ ๑, ๒, ๓, ๔, ๕ ให้ห่างจาก MX ๒.๕ ซม. ๓.๐ ซม. ๓.๕ ซม. ๔.๐ ซม. และ ๔.๕ ซม. ตามลำดับ และให้อยู่ทางเดียวกันกับ S

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๒.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นที่ ๑ ที่ a

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๓.๐ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นที่ ๒ ที่ b, b′

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๓.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นที่ ๓ ที่ c, c′

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๔.๐ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นที่ ๔ ที่ d, d′

S เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี ๔.๕ ซม. เขียนส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นที่ ๕ ที่ e, e′

แล้วลาก e d c b a b′ c′ d′ e′ เป็นเส้นโค้ง

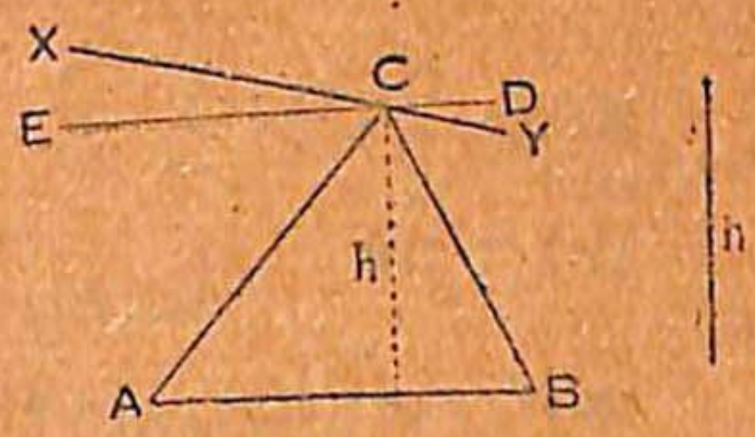
จุดเหล่านี้จะอยู่ห่างเท่า ๆ กัน จากจุด S และอยู่ห่าง เท่า ๆ กัน จาก MX ด้วย จึงเป็นจุดชุดที่ต้องการ

๑๗. จงสร้างรูป △ รูปหนึ่งลงบนฐานที่กำหนดให้ และให้รูป △ ที่สร้างขึ้นนั้นมีส่วนสูงเท่ากับส่วนสูงที่กำหนดให้ และทั้งมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ด้วย

ให้ AB เป็นฐานที่กำหนดให้

h เป็นส่วนสูงของ △ ที่กำหนดให้

XY เป็นเส้นตรงที่กำหนดให้



จะต้องสร้าง △ รูปหนึ่งให้ AB เป็นฐาน ส่วนสูง = h, และ

ให้มุมยอดอยู่ใน XY

วิธีสร้าง ลากเส้นตรง ED ให้ขนานกับ AB และให้อยู่ห่าง

จาก AB เท่ากับ h ที่กำหนดให้ ให้เส้นขนานนี้ตัด XY ที่ C

ลาก AC, CB ; ∴ ABC เป็น △ ที่ต้องการ มีส่วนสูง = h และ

มุมยอดอยู่บน XY ที่กำหนดให้

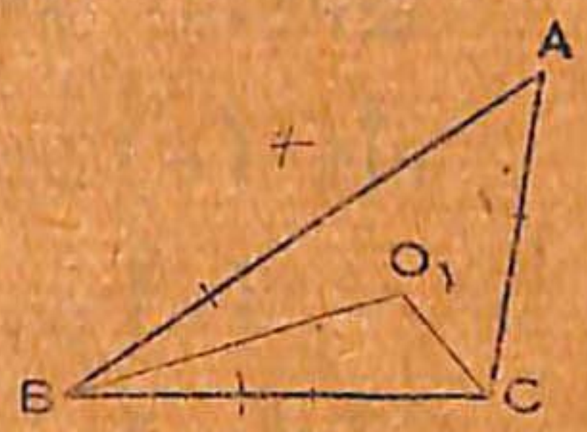
๑๘. จงหาจุด ๆ หนึ่งซึ่งมีระยะห่างเท่า ๆ กันจากด้านสามด้าน

ของรูป △ รูปหนึ่ง

ให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

จะต้องสร้าง หาจุด ๆ หนึ่งซึ่งห่างจาก

AB, BC, CA เท่า ๆ กัน



วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ด้วย BO, CO พบกันที่ O

∴ O เป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ จุดทุก ๆ จุดบน CO ต้องอยู่

ห่างจาก AC, BC เท่า ๆ กัน

และ จุดทุก ๆ จุดบน BO ต้องอยู่ห่าง

จาก BC, BA เท่า ๆ กัน

(บทสร้างที่ ๑๕)

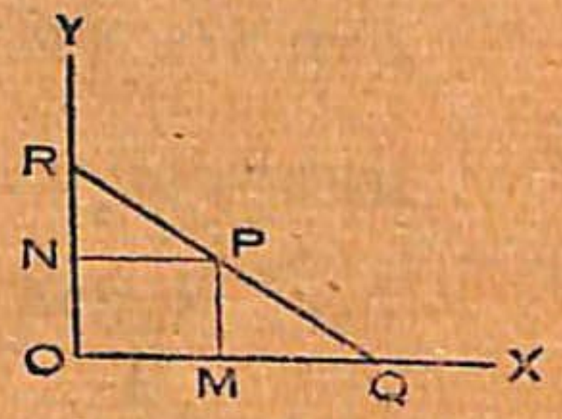
แต่ O เป็นจุดร่วม ∴ O จึงเป็นจุดที่อยู่ห่างจาก AB, BC, CA เท่า ๆ กัน

๑๙. เส้นตรง OX และ OY สองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก Q และ R เป็นจุดอยู่บนเส้น OX, OY ตามลำดับ จงหาเส้นโลคัสของจุดกึ่งกลางของ QR เมื่อ

(๑) OQ + OR เท่ากันเสมอ (ไม่เปลี่ยนแปลง)

(๒) OQ − OR ,, ,, (,, ,,)

ให้ OX, OY เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่ O ; Q, R เป็นจุดอยู่บน OX, OY ตามลำดับ



จะต้องหา โลคัสของจุดกึ่งกลางของ QR

เมื่อ (๑) OQ + OR เท่ากันเสมอไม่เปลี่ยนแปลง

(๒) OQ − OR ,, ,, ,,

วิธีสร้าง (๑) แบ่ง QR ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันที่ P. ลาก PM, PN ตั้งได้ฉากกับ OX, OY ตามลำดับ

∴ PM, PN ต่างก็ขนานกับ RO, OQ ตามลำดับ

∴ $PM = \frac{๑}{๒} RO ; PN = \frac{๑}{๒} OQ$ (ข้อ ๓ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

∴ $PM + PN = \frac{๑}{๒} (RO + OQ)$

หรือ $OQ + OR = ๒(PM + PN) =$ จำนวนคงที่ (โจทย์)

∴ โลคัสของจุด P ก็คือ เส้นตรงซึ่งลากผ่าน P ไปตัด OX

กับ OYเป็นมุมฉาก เพราะ OQ + OR จะเป็นจำนวนคงที่เสมอ
(ให้ดูข้อ ๑๒ แบบฝึกหัดนี้)

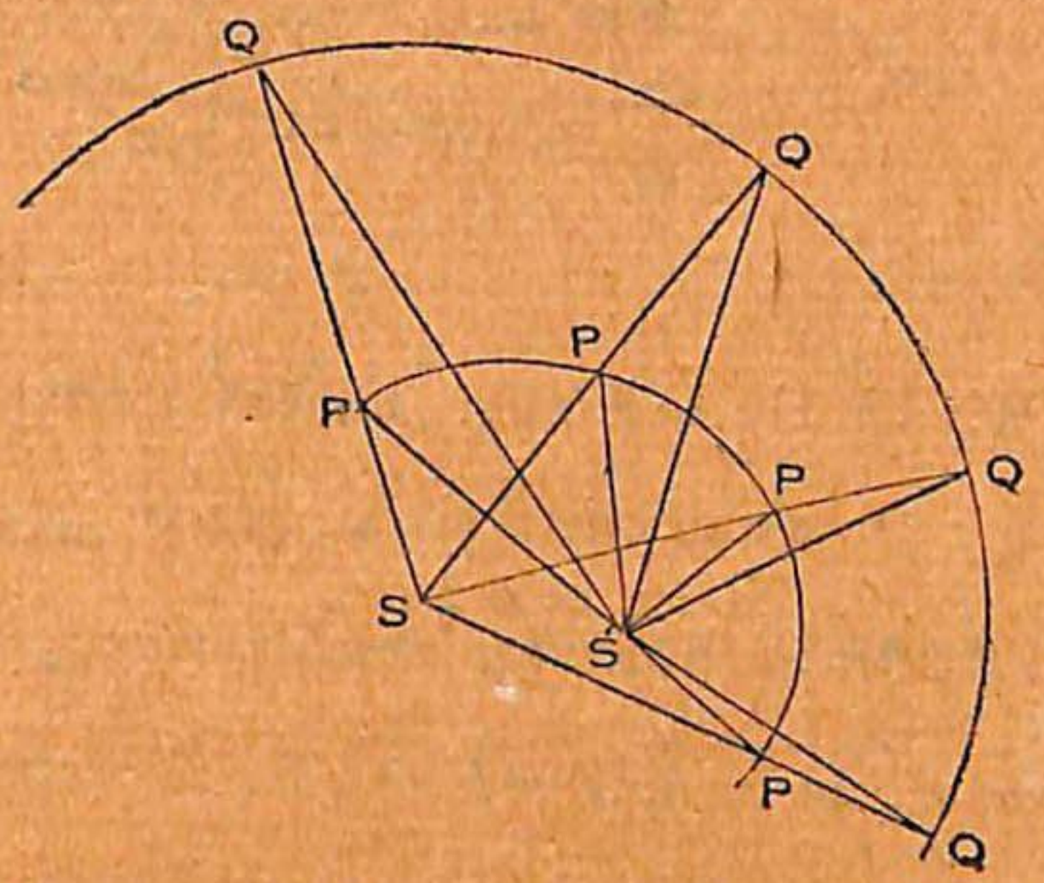
(๒) เหมือน (๑). เพราะว่า $OQ - OR = ๒\ (PN - PM)$
ซึ่งเป็นจำนวนคงที่

๒๐. S และ Ś เป็นจุดคงที่สองจุด จงหาจุด P ชุดหนึ่ง. เมื่อ

(๑) $SP + ŚP$ เท่ากันเสมอ (เช่น ๓·๔ ซม.)

(๒) $SP - ŚP$,, ,, (เช่น ๑·๙ ซม.)

เขียนส่วนโค้งด้วยมือผ่านจุดทั้งหมดที่หาได้ข้อละเส้น



ให้ S, Ś เป็นจุดคงที่สองจุด
จะต้องหา จุด P. ชุดหนึ่ง เมื่อ

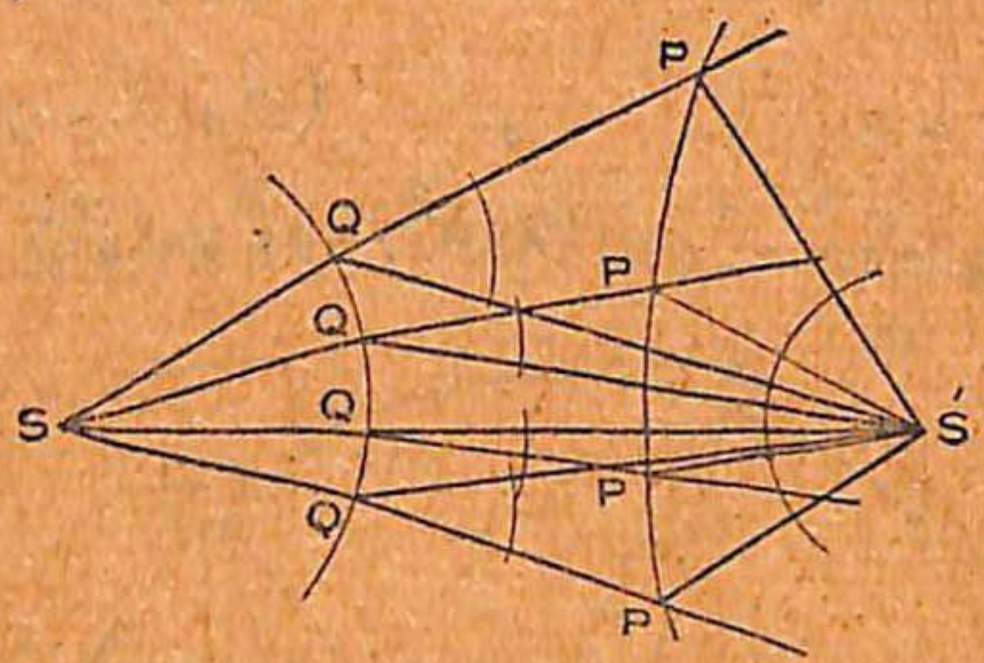
(๑) $SP + ŚP =$ จำนวนคงที่ (เช่น ๓·๔ ซม.)

(๒) $SP - ŚP =$,, ,, (เช่น ๑·๙ ซม.)

วิธีสร้าง (๑) จาก S ลาก SQ ไปหลาย ๆ ทางให้ SQ ยาวเท่ากับ ๓·๔ ซม. แล้วลาก ŚQ

จาก S′ ลาก S′P ทำมุม QS′P = S′Q̂S
และให้พบ QS ที่ P
แล้วลากเส้นโค้งต่อจุด P ที่หาได้ให้หมด
S′P = PQ (ทฤษฎีบทที่ ๕)
∴ SP + PS′ = SP + PQ = SQ = ๓·๔ ซม. คงที่เสมอ
∴ จุด P ทุกจุดต้องอยู่บนเส้นโค้งนี้ซึ่งเป็นโลคัสของ P. ที่ต้องการ

(๒)



จาก S ลาก SQ ให้ยาว ๑·๙ ซม. โดยไม่จำกัดทาง แล้วลาก S′Q
จาก S′ ลาก S′P ตัด SQ ต่อที่ P ทำ QŜ′P = S′Q̂P
แล้วลากเส้นต่อจุด P จะได้เส้นโค้งเกือบ ๆ ตรง
∴ PQ̂S′ = PŜ′Q (สร้าง)
∴ QP = PS′
∴ SP − PS′ = SP − QP = SQ = ๑·๙ ซม. คงที่เสมอ
∴ จุด P ทุกจุดก็อยู่บนเส้นนี้ซึ่งเป็นโลคัสของ P

แบบฝึกหัดที่ ๒๐

(โจทย์ระคน)

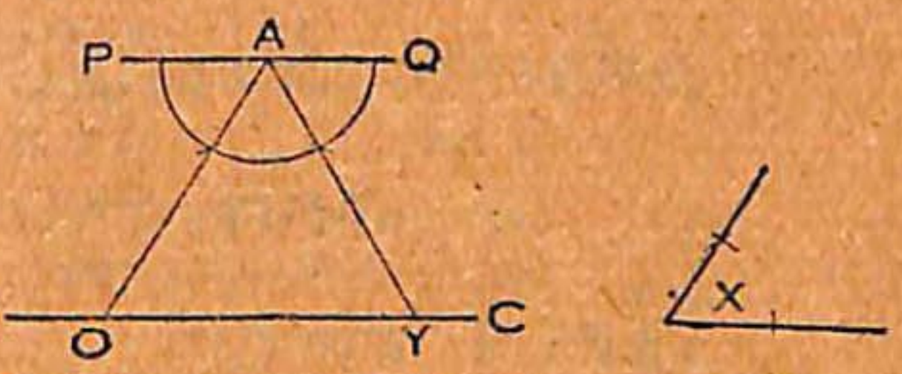
๑. A เป็นจุด ๆ หนึ่ง BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงลากเส้น

ตรงเส้นหนึ่งจากจุด A ให้ทำมุมกับเส้นตรง BC เท่ากับมุม X ที่กำหนด
ให้ จะลากเส้นตรงเช่นนี้ได้กี่เส้น.

ให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่ง

BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

X เป็นมุม ๆ หนึ่งที่กำหนดให้



จะต้องสร้าง ลากเส้นจาก A ไปทำมุมกับ BC ให้กว้างเท่ากับ $\hat{X}$

วิธีสร้าง ที่ A ลาก PAQ ให้ขนานกับ BC

และที่ A ทำ $P\hat{A}O = Q\hat{A}Y = \hat{X}$ พบ BC ที่ O และ Y ตามลำดับ

AO , AY เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ PAQ ขนานกับ BC ; AO , AY เป็นเส้นตัด

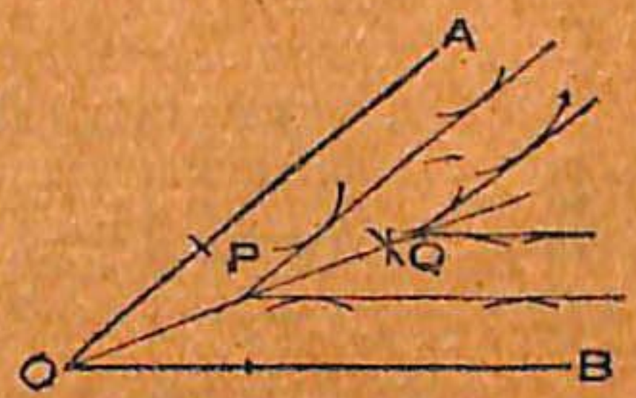
$\therefore P\hat{A}O = A\hat{O}Y = A\hat{Y}O = \hat{X}$

$\therefore$ AO , AY จึงเป็นเส้นตรงที่ต้องการ

๒. จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้แบ่งครึ่ง $A\hat{O}B$ โดยไม่ใช้จุดยอด O ในการลากเส้นแบ่งครึ่งนั้น

วิธีสร้าง ลากเส้นขนานกับ AO , OB

ให้อยู่ห่างจาก AO , OB เท่า ๆ กัน ตัดกันที่ P



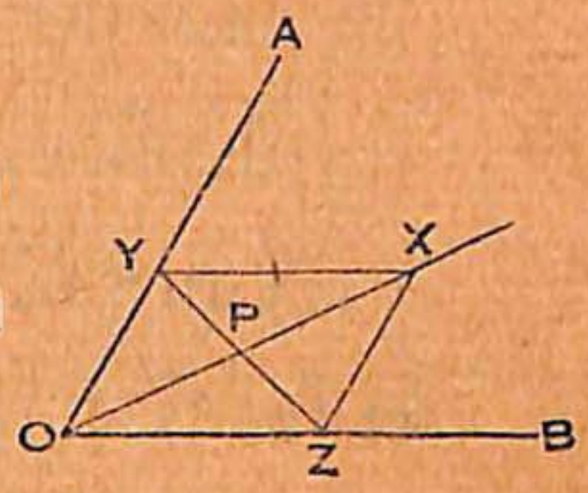
อีกครั้งหนึ่งลากเส้นขนานอย่างคราวก่อน ตัดกันที่ Q ลาก PQ

$\therefore$ PQ จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{O}B$ (บทสร้างที่ ๑๕)

๓. P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายใน $A\hat{O}B$ จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ผ่านจุด P ไปจดเส้น OA , OB และให้เส้นตรงเส้นนั้นถูกแบ่งครึ่งที่จุด P ด้วย.

ให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ระหว่าง $A\hat{O}B$



จะต้องลาก เส้นตรงให้ผ่านจุด P ให้จด AO , OB และมีระยะจาก P เท่า ๆ กันด้วย

วิธีสร้าง ลาก OP

ต่อ OP ไปถึง X ทำ PX = OP

จาก X ลาก XY , XZ ให้ขนานกับ BO , AO

พบ OA ที่ Y, พบ OB ที่ Z ลาก YPZ

∴ YPZ เป็นเส้นที่ต้องการ

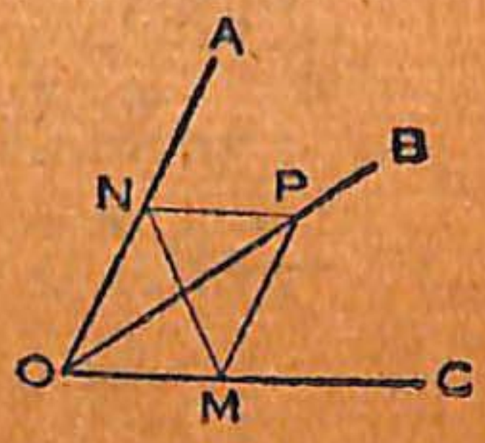
พิสูจน์ ∵ OZXY เป็น □ ด้านขนาน (สร้าง)

∴ เส้นทะแยงมุม OX , YZ ตัดครึ่งซึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบทที่๒๑แทรกที่ ๓)

∴ YZ ก็ลากผ่าน P และถูกแบ่งครึ่งที่ P

๔. OA , OB , OC เป็นเส้นตรงสามเส้นพบกันที่ O จงลากเส้นขวางเส้นหนึ่งไปจด OA , OC และให้ OB แบ่งครึ่งเส้นขวางนั้นด้วย.

ให้ AO , OC , OB เป็นเส้นตรงสามเส้น



พบกันที่จุด O

จะต้องสร้าง ลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง

ให้ผ่าน OB จด OA , OC และให้ถูกแบ่งครึ่งที่ OB

สร้าง ให้ P เป็นจุดใด ๆ อยู่บน OB, จาก P ลาก PM, PN ให้ขนานกับ AO, CO พบ CO ที่ M, AO ที่ N ตามลำดับ ลาก NM.

∴ NM เป็นเส้นที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ OMPN เป็น □ ด้านขนาน (โดยสร้าง)

∴ เส้นทะแยงมุม OP, MN แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรกที่ ๓)

∴ NM จึงเป็นเส้นที่ต้องการ

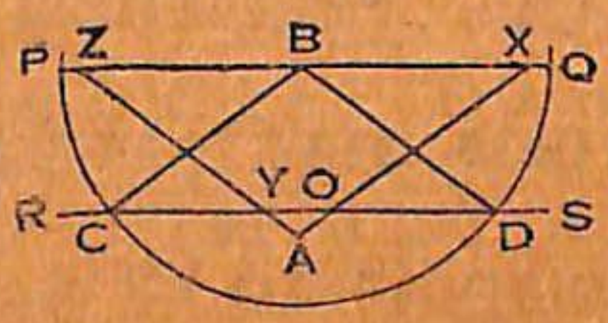
[P อยู่ที่ใดก็ได้ใน OB ฉะนั้นจึงอาจสร้างได้หลายรูป]

๕. A เป็นจุด ๆ หนึ่ง PQ, RS เป็นเส้นขนานสองเส้น จงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด A และผ่านเส้นขนานทั้งสองเส้นนี้ ให้ส่วนของเส้นตรงซึ่งอยู่ในระหว่างเส้นขนาน PQ ; RS เท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้เส้นหนึ่ง.

เมื่อไร โจทย์นี้จะลากได้สองเส้น เมื่อไรลากได้เส้นเดียว เมื่อไรลากไม่ได้เลย

ให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่ง

PQ, RS เป็นเส้นขนานสองเส้น



a เป็นความยาวระยะหนึ่ง

จะต้องสร้าง จาก A ลากเส้นตรงตัดเส้นขนานสองเส้นให้ส่วนที่อยู่ในเส้นขนานมีระยะเท่ากับ a ที่กำหนดให้

วิธีสร้าง กำหนดจุด B เป็นจุดใด ๆ ใน PQ, B เป็นจุดศูนย์

กลางรัศมี a เขียนส่วน โค้งตัด RS ที่ C และ D

ลาก BC , BD

จาก A ลากเส้นตรงให้ขนานกับ CB , BD ตัดเส้นขนาน RS , PQ ที่ O, X และ Y, Z ตามลำดับ

ฉะนั้นเส้นตรง AOX กับเส้น AYZ เป็นเส้นตรงที่ต้องการ

พิสูจน์ ZBDY และ BXOC เป็น □ ด้านขนาน (สร้าง)

$\therefore$ ZY = BD = BC = XO = a

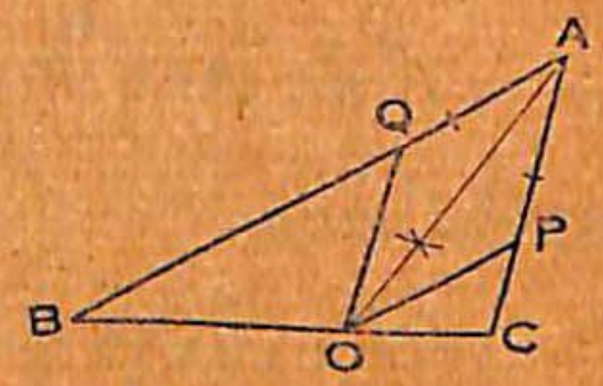
$\therefore$ AYZ หรือ AOX จึงมีส่วนที่อยู่ในระหว่างเส้นขนานเท่ากับ a

จะลากจาก A ได้สองเส้น เส้นเดียวหรือลากไม่ได้เลยนั้นเมื่อ a ยาวกว่า เท่ากันหรือสั้นกว่าเส้นตั้งได้ฉาก ซึ่งลากระหว่างเส้นขนานคู่นั้น

๖. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่งลงในรูป △ ABC ให้รูป □ ขนมเปียกปูนที่สร้างลงนั้นมีมุม ๆ หนึ่ง ทับมุม A สนิท

ให้ ABC เป็น △ รูปหนึ่ง

จะต้องสร้าง □ ขนมเปียกปูนบรรจุใน △ ABC ให้มุมหนึ่งทับมุม A สนิท



วิธีสร้าง แบ่ง $\hat{A}$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ด้วย AO ให้ AO พบ BC ที่ O

จาก O ลาก OP, OQ ให้ขนานกับ BA, CA พบ AC ที่ P, AB ที่ Q

$\therefore$ □ APOQ เป็น □ ที่ต้องการ

พิสูจน์ □ APOQ เป็น □ ด้านขนานโดยสร้าง

$Q\hat{A}O = A\hat{O}P$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๐)

แต่ $Q\hat{A}O = O\hat{A}P$ (สร้าง)

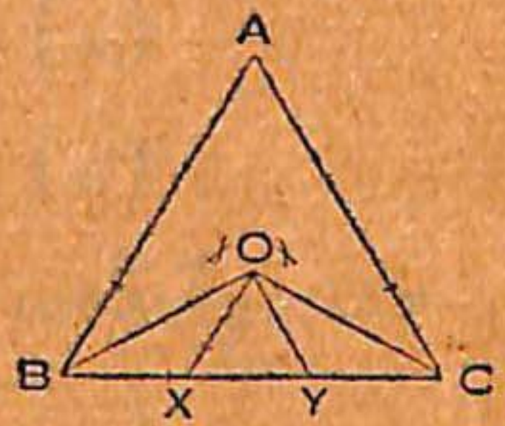
$\therefore\ A\hat{O}P = O\hat{A}P$

$\therefore$ AP = PO (ทฤษฎีบทที่ ๖)

$\therefore$ APOQ เป็น □ ขนมเปียกปูน

๗. จงใช้คุณสมบัติของรูป △ ด้านเท่าแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

ให้ BC เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง จะต้องแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้คุณสมบัติของ △ ด้านเท่า



วิธีสร้าง บนฐาน BC สร้าง △ ด้านเท่า ABC แบ่งครึ่ง $\hat{B}$, $\hat{C}$ ด้วย BO, CO พบกันที่ O

ลาก OX, OY ขนานกับ AB, AC พบ BC ที่ X, Y ตามลำดับ

$\therefore$ จุด X, Y เป็นจุดที่แบ่ง BC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ $\because$ OX ขนานกับ AB, OB เป็นเส้นตัด

$\therefore\ A\hat{B}O = B\hat{O}X$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๔)

แต่ $A\hat{B}O = O\hat{B}X = ๓๐^\circ$ (สร้าง)

$\therefore\ O\hat{B}X = B\hat{O}X = ๓๐^\circ$

$\therefore$ OX = BX

และ $O\hat{X}Y = O\hat{B}X + B\hat{O}X = ๖๐^\circ$ (ทฤษฎีบทที่ ๑๖)

ในทำนองเดียวกัน $OY = YC$

และ $O\hat{Y}X = ๖๐^\circ = O\hat{X}Y$

$\therefore X\hat{O}Y = ๑๘๐^\circ - ๖๐^\circ - ๖๐^\circ = ๖๐^\circ$

$\therefore \triangle OXY$ จึงเป็น $\triangle$ ด้านเท่า

$\therefore BX = XY = YC$

(๘.) จงสร้างรูป $\triangle$ รูปหนึ่งจากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(๑) กำหนดจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูป $\triangle$

(๒) กำหนดความยาวของด้านสองด้าน และความยาวของเส้นมิเดียนเส้นหนึ่งซึ่งแบ่งครึ่งด้านที่สาม

(๓) กำหนดความยาวของด้าน ๆ หนึ่ง และความยาวของเส้นมิเดียนสองเส้นซึ่งแบ่งครึ่งด้านอื่นสองด้าน

(๔) กำหนดความยาวของเส้นมิเดียนสามเส้น

(๑) ให้ X, Y, Z เป็นจุดสามจุด ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้านสามด้านของรูป $\triangle ABC$

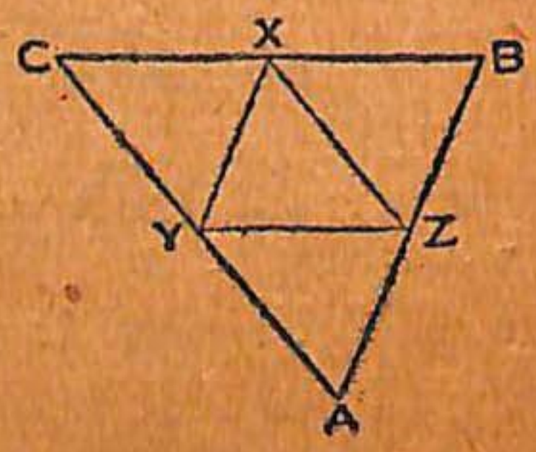
จะต้องสร้าง $\triangle ABC$ ให้ X, Y Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม

วิธีสร้าง ลาก XY, YZ, ZX

ลาก BXC ขนานกับ YZ

,, BZA ,, XY

,, CYA ,, XZ



พบกันที่ A, B, C

∴ △ ABC เป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ CYZX, XYZB เป็น □ ด้านขนาน โดยสร้าง

∴ ZY = BX = XC (ทฤษฎีบทที่ ๒๑)

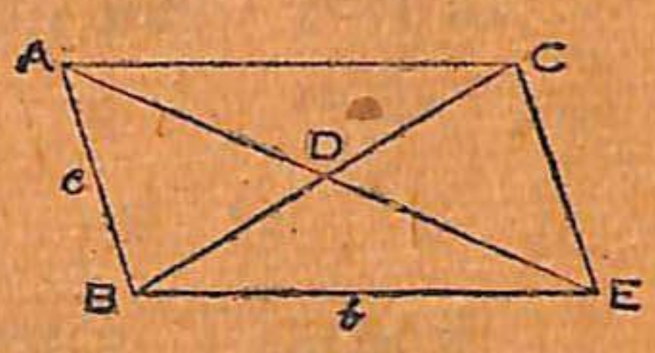
∴ X ก็เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

ในทำนองเดียวกัน Z, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ BA, AC

∴ ABC เป็น △ ที่ต้องการ

๒. ให้ b, c เป็นความยาวของด้านสองด้าน

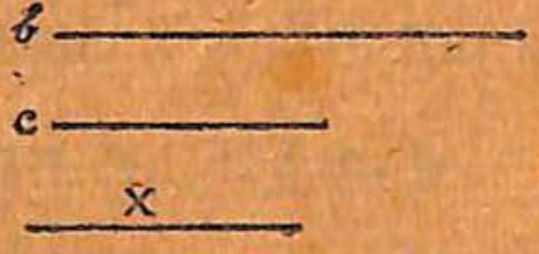
X เป็นความยาวของ มิเดียน แบ่ง ครึ่ง



ด้านที่สาม

จะต้องสร้าง รูป △ รูปหนึ่งให้มี

ความยาวเท่ากับที่กำหนดให้ข้างบนนี้



วิธีสร้าง สร้างรูป △ ABE ให้

AB = c, BE = b.

AE = ๒ X แล้วสร้าง □ ด้านขนาน ให้ AE เป็นเส้นทะแยงมุม, ตาก BC ตัด AE ที่ D

ดังนั้น △ ABC เป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ∵ □ ABEC เป็น □ ด้านขนาน

∴ AC = BE = b ที่กำหนดให้

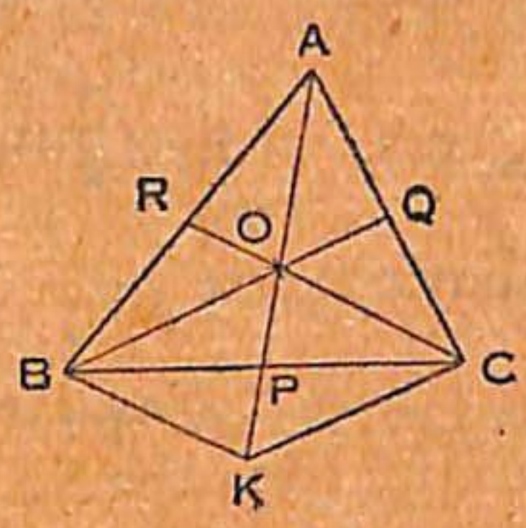
และ AD = DE = X เป็นความยาวของมิเดียนที่กำหนดให้

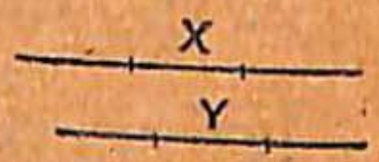
และ BD = DC (ทฤษฎีบทที่ ๒๑ แทรก ๓)

$\therefore$ AD เป็นมิเดียน

$\therefore$ $\triangle$ ABC คือ $\triangle$ ที่ต้องการ

(๓) ให้ BC เป็นด้าน ๆ หนึ่ง และให้ X, Y เป็นเส้น มิเดียน สองเส้น ที่แบ่งครึ่งด้านที่เหลือ





จะต้องสร้าง $\triangle$ ตามที่กำหนดให้นี้

วิธีสร้าง บน BC สร้าง $\triangle$ OBC ให้ $BO = \frac{๒}{๓} X$

$OC = \frac{๒}{๓} Y$

แล้วสร้าง $\square$ ด้านขนาน BOCK ให้ BC เป็นเส้นทะแยงมุม

ลาก OK ต่อ KO ไปถึง A ทำ $OA = OK$

ลาก AB, AC ต่อ BO พบ AC ที่ Q, ต่อ CO พบ AB ที่ R

$\therefore$ $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle$ ABK, O เป็นจุดกึ่งกลางของ AK, OR ลาก ขนานกับฐาน KB ย่อมไปแบ่งครึ่ง AB (ข้อ ๑ แบบฝึกหัดที่ ๑๔)

$\therefore$ CR ก็เป็นเส้นมิเดียนแบ่งครึ่ง AB

ในทำนองเดียวกันจาก $\triangle$ AKC, BQ ก็เป็นเส้นมิเดียนแบ่งครึ่ง AC

และ $\square$ BOCK เป็น $\square$ ด้านขนาน OK, BC เป็นเส้นทะแยงมุมตัดกันที่ P

$\therefore$ OP = PK และ BP = PC

$\therefore$ AP ก็เป็นมิเดียนแบ่งครึ่ง BC

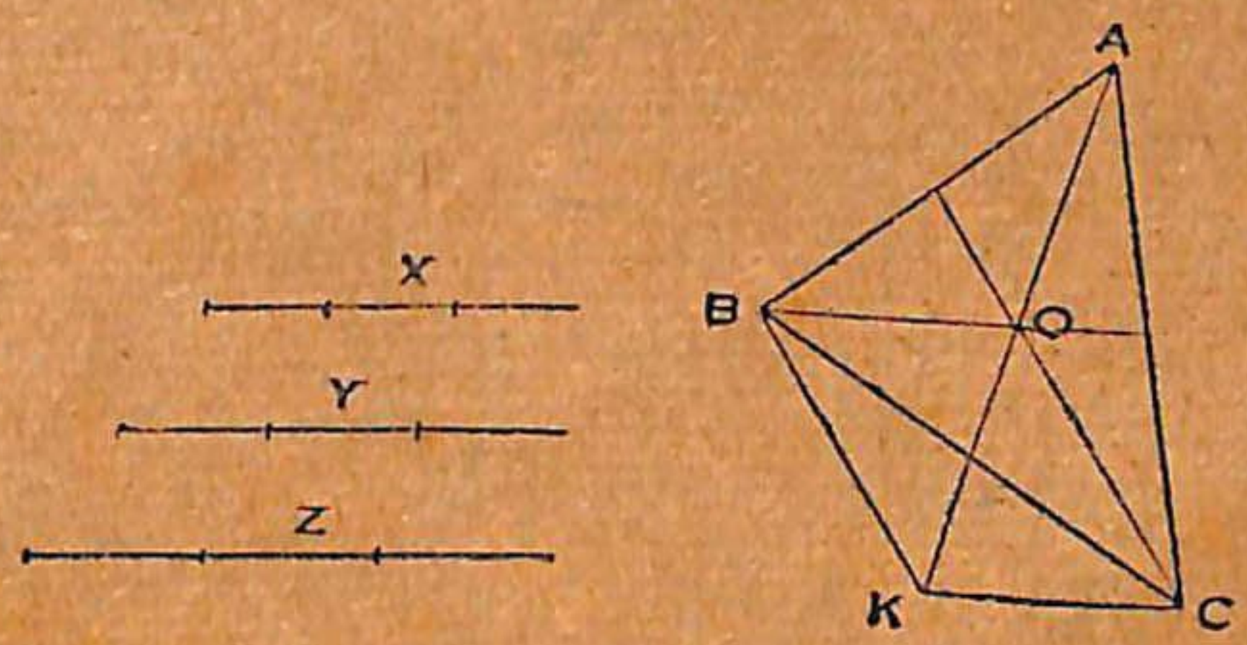
แต่ $OP = PK = \frac{๑}{๒} OK = \frac{๑}{๒} OA$

ทำนองเดียวกัน $OR = \frac{๑}{๒} OC$ และ $OQ = \frac{๑}{๒} OB$

แต่ $OC = \frac{๒}{๓} Y$ และ $OB = \frac{๒}{๓} X$

$\therefore$ CR = Y และ BQ = X

$\therefore$ $\triangle$ ABC จึงเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ



(๔) ให้ X, Y, Z เป็นความยาวของมิเดียน ๓ เส้น จะต้องสร้าง $\triangle$ รูปหนึ่งให้มีมิเดียนเท่าที่กำหนดให้นี้

วิธีสร้าง สร้างรูป $\triangle$ OKC

ให้ $CK = \frac{๒}{๓} X$

$OK = \frac{๒}{๓} Y$

$CO = \frac{๒}{๓} Z$

แล้วสร้าง □ ด้านขนาน OCKB ให้ OK เป็นเส้นทะแยงมุม และ

ต่อ KO ตรงออกไปถึง A ทำ OA = OK

ลาก AB, BC, CA

∴ △ ABC เป็น △ ที่ต้องการ

พิสูจน์ เหมือน (๓)

จบภาคหนึ่ง

. . . . . .

นายยิ้ม ศรีหงส์ ผู้พิมพ์โฆษณา

โรงพิมพ์ศรีหงส์ ตอนมุมถนนอุณากรรณ พ.ศ. ๒๕๗๙