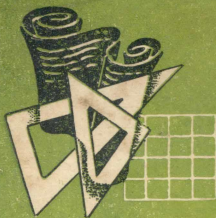


๑๖๗
ก. ๕๓๓๘

กฤษณาเรขาคณิต

ชั้นเตรียมอุดม



516
ผ 191 ก

นายชอด เพ็งศรีทอง อ.บ.
อาจารย์คณิตศาสตร์ ร.ร. หาดใหญ่



บุญแจกเรขาคณิต

เตรียมอุดมปีที่ ๒

เหมาะสำหรับเป็นคู่มือครูประถม (ป.ป.)
และครูมัธยม (ป.ม.)

โดย

นายยอด เฟ็งศรีทอง อ.บ.

อาจารย์เรขาคณิต โรงเรียนนายเรือ

พิมพ์ครั้งแรก ๒,๐๐๐ ฉบับ

พ. ศ. ๒๔๘๓

ราคาเล่มละ ๘.๐๐ บาท



พิมพ์จำหน่ายที่ บริษัทประชาช่าง จำกัด

ตลาดน้อย และสาขา ๔๔๘ ถนนเยาวราช พระนคร

สารบัญ

ภาคคำนวณ

๓.	แบบฝึกหัดจากหนังสือ	หน้า		หน้า
	Hall & Steven หน้า 287	ข้อ 1-5	ค. หน้า	1-5
๒.	" 289	ข้อ 1-10	"	6-17
๓.	" 291	ข้อ 1-10	"	18-26
๔.	" 294	ข้อ 1-10	"	29-43
๕.	" 295	ข้อ 1-9	"	44-59
๖.	" 297	ข้อ 1-10	"	60-73
๗.	" 299	ข้อ 1-5	"	74-86
๘.	" 301	ข้อ 1-3	"	87-93
๙.	" 305	ข้อ 1-10	"	94-108
๑๐.	" 306	ข้อ 1-10	"	109-123
๑๑.	" 307	ข้อ 11-54	"	124-197
๑๒.	" 313	ข้อ 1-7	"	202-224

เลขห้อง

เลขหมู่

เลขทะเบียน

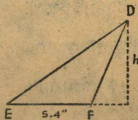
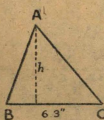
๐๗๑๘

&H S หน้า 287

(ภาคคำนวณ)

ข้อ 1/287

โจทย์ ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปตั้งเท่ากันตั้งอยู่บนฐานยาว 6.3" และ 5.4" ตามลำดับ ถ้าสามเหลี่ยมรูปแรกมีเนื้อ $12\frac{1}{2}$ ตารางนิ้ว สามเหลี่ยมรูปที่สองจะมีเนื้อเท่าใด ?



กำหนดให้ $\triangle ABC, \triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านสูง h ร่วมกันและตั้งอยู่บนฐาน BC, EF ยาว 6.3" และ 5.4" ตามลำดับ ให้ $\triangle ABC = 12\frac{1}{2}$ ตารางนิ้ว

จะต้องการหา เนื้อของ $\triangle DEF$

วิธีหา	∴	$\triangle DEF$	=	$\frac{EF}{BC}$	บ.พ. 70
		$\triangle ABC$		$= \frac{5.4}{6.3}$	
		∴ $\triangle DEF$		$= \frac{5.4}{6.3} \times 12\frac{1}{2}$	คูณไขว้
				$= 10\frac{1}{2}$ ตร.นิ้ว	

ข้อ 2/287

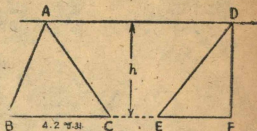
โจทย์ สามเหลี่ยมสองรูปตั้งเท่ากันมีเนื้อที่โดยอัตราส่วน 24 : 17
 ถ้าด้านฐานของสามเหลี่ยมรูปแรกยาว 4.2 ซม. จงหา
 ความยาวด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง (ทศนิยม
 1 ตำแหน่ง)

กำหนดให้ ABC, DEF เป็น

สามเหลี่ยมสองรูป
 ตั้งเท่ากัน

24 : 17 และมีฐาน

ตั้งเท่ากัน ให้ฐาน $BC = 4.2$ ซม.



จะต้องการหา EF

วิธีหา

$\triangle ABC$

BC

บ.พ. 70

$=$

$\triangle DEF$

EF

$\frac{24}{17}$

$=$

$\frac{4.2}{EF}$

แทนค่า

$\therefore EF$

$=$

$\frac{4.2 \times 17}{24}$ ซม.

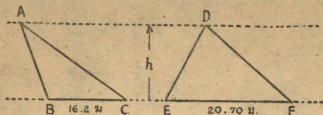
$=$

3.0 ซม.

(คิดค่าใกล้เคียง)

ข้อ 3/287

โจทย์ ลำเลียง ต้องรูปตั้ง อยู่บนคัน ฐานยาว 16.20 เมตร
และ 20.70 เมตร และอยู่ ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน
ถ้าลำเลียงรูปแรกมีเนื้อ 50.1203 ตร. เมตร จง
หาเนื้อของลำเลียงรูปที่สองออกมาเป็นค่าใกล้เคียง
ของ ตร. ช.ม.



กำหนดให้ $\triangle ABC, \triangle DEF$ เป็นลำเลียง ต้องรูปตั้งอยู่ระหว่าง
เส้นขนานคู่เดียวกัน ให้ $BC = 16.2$ ช.ม. $EF = 20.7$
ช.ม. และ $\triangle ABC = 50.1204$ ตร. ช.ม.

จะต้องการหา เนื้อของ $\triangle DEF$

วิธีหา $\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF}$

$$\frac{50.1204}{\triangle DEF} = \frac{16.2}{20.7}$$

$$\triangle DEF = \frac{50.1204 \times 20.7}{16.2} \text{ ตร. ช.ม.}$$

$$= 64 \text{ ตร. ช.ม.}$$

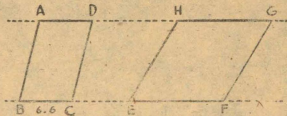
บ.พ. 70

แทนค่า

(ประมาณ)

ข้อ 4/287

โจทย์ ให้เหลี่ยมด้านขนานดังรูปตั้งอยู่ในระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน และมีเนื้อที่โดยอัตราส่วน $2.1 : 3.5$ ถ้าด้านขนานรูปแรก มีด้านฐานยาว 6.6 จงหาความยาวของด้านฐานของด้านเหลี่ยมรูปที่สอง.



กำหนดให้ $ABCD, EFGH$ เป็นรูปเหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป ตั้งอยู่ในระหว่างคู่ขนานคู่เดียวกันให้ $BC = 6.6$ และ

$$\triangle ABC : \triangle DEF = 2.1 : 3.5$$

จะต้องการหา EF

วิธีหา $\therefore \square ABCD : \square EFGH$

$$= \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{2.1}{3.5} = \frac{6.6}{EF}$$

$$\therefore = 11.0 \text{ ซม.}$$

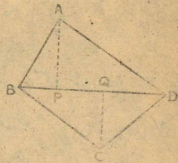
บ.พ. 70

แทนคำ

ข้อ 5/287

โจทย์ นารปด้ามเหลี่ยมสองรูปตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน แต่อยู่
กตบกันคนละข้าง ถ้าด้านสูงของนาทางต้องแปลงเท่า-
กับ 4.20 และ 3.71 เซน (chains) และกำหนดารปแรม
๕ ๑
เนื้อ 18 เอเคอร์ (Acre) จงหาว่านาแปลงที่ต้องจรม
๕ ๑
เนื้อกี่เอเคอร์

กำหนดให้ ABD, CBD เป็นนารป
ด้ามเหลี่ยมสองรูปตั้งอยู่บนฐาน
BD เดียวกัน AP, CQ เป็นเส้นกั
ยาว 4.20 และ 3.71 เซน และ
ให้ $\triangle ABD = 18$ เอเคอร์



จะต้องการหา เนื้อของด้ามเหลี่ยม ABCD.

$$\text{วิธีหา } \frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times 4.20}{\frac{1}{2} \times BD \times 3.71}$$

$$\triangle = \frac{1}{2} \text{ ฐาน } \times \text{ สูง}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4.20}{3.71} \\ \therefore \triangle BCD &= \frac{18 \times 3.71}{4.20} \text{ เอเคอร์} \\ &= 15.9 \text{ ,} \end{aligned}$$

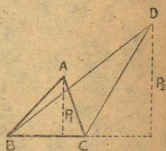
$$\begin{aligned} \therefore \text{เนื้อทของ } ABCD &= 18 + 15.9 \\ &= 33.9 \text{ ,} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC = 18 \text{ เอเคอร์}$$

โจทย์ โดยอาศัยกฎเนื้อที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$
จงพิสูจน์ให้เห็นว่า อัตราส่วนของเนื้อที่ของรูปสาม-
เหลี่ยมที่ตั้งอยู่บนฐานยาวเท่ากัน ย่อมเท่ากับอัตราส่วนของ
ของส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น

และจงพิสูจน์ผลข้างบน โดยการสร้างรูปแบบ
เรขาคณิต และโดยการนำทฤษฎีบทที่ 70 มาใช้.

กำหนดให้ $\triangle ABC, \triangle DBC$ เป็นสามเหลี่ยม
ตั้งอยู่บนฐาน BC เดียว
กัน ให้ P_1, P_2 เป็นส่วนสูง
ของสามเหลี่ยมทั้งสอง

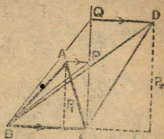


จะต้องพิสูจน์ $\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC} = \frac{P_1}{P_2}$

พิสูจน์ ก. $\frac{\triangle ABC}{\triangle DBC} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times P_1}{\frac{1}{2} \times BC \times P_2} \quad \triangle = \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ฐาน}$

$$= \frac{P_1}{P_2}$$

ข. จาก C ตลาก CPQ ให้ตั้งฉากกับ BC ตลากเส้นขนานให้ผ่าน A และ D ตัดเส้นตั้งฉากที่ P และ Q ตามลำดับ



$$\therefore \triangle ABC = \triangle BPC$$

$$\text{และ } \triangle BCD = \triangle BQC$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{\triangle BPC}{\triangle BQC}$$

$$= \frac{\text{ฐาน PC (ของ } \triangle BPC \text{)}}{\text{ฐาน CQ (ของ } \triangle BQC \text{)}}$$

แต่ CP, CQ คือส่วนตั้งของสามเหลี่ยม ABC และ BCD

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{PC}{CQ} = \frac{P_1}{P_2}$$

ข้อ 2/289

โจทย์ XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ไปตัดด้าน AB, AC ที่จุด X และ Y ตลาก BY, CX จึงพิสูจน์โดยใช้บทพิสูจน์ที่ 70 ว่า

บ.พ. 26

"

หารกัน

บ.พ. 70

$$\text{ก. } AX:XB = AY:YC$$

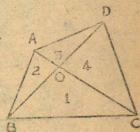
$$\text{ข. } AB:AX = AC:AY$$

คำตอบ รูปสี่เหลี่ยมที่ 60 (วิธีพิสูจน์แบบ 1) ใน "เรขาคณิต
ชั้นเตรียมอุดม เล่ม 1"

ข้อ 3/239

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้าน
ไม่เท่า ย่อมแบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่านี้ ออกเป็นรูป
สามเหลี่ยมเล็กๆ สี่รูปต่างได้ภาคกัน.

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้าน
ไม่เท่า มีเส้นทแยงมุม AC, BD
ตัดกันที่ O



$$\text{จะต้องพิสูจน์ } \frac{\triangle 1}{\triangle 2} = \frac{\triangle 4}{\triangle 3}$$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์ } \frac{\triangle 1}{\triangle 2} &= \frac{OC}{OA} \\ &= \frac{\triangle 4}{\triangle 3} \end{aligned}$$

ป.พ. 70

"

ข้อ 4/289

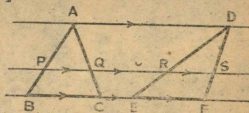
โจทย์ สามเหลี่ยมสองรูปตั้งอยู่บนฐานยาวเท่ากัน และอยู่ใน
ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่
ลากขนานกับฐาน ย่อมแบ่ง สามเหลี่ยม ใหญ่ ออกเป็น
สามเหลี่ยมเล็ก ๆ สองรูป ดังมีเนอทเท่ากันด้วย

กำหนดให้ ABC, DEF เป็น

สามเหลี่ยมสองรูป มี

ฐาน $BC = EF$ และ

ตั้งอยู่ในระหว่างคู่ขนาน AD กับ BF เดียวกัน PQ, RS
เป็นเส้นขนานที่ลากตัดสามเหลี่ยม ABC, DEF ที่ P, Q, R, S
ตามลำดับ



จะต้องพิสูจน์ $\triangle APQ = \triangle DRS$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABC, \because PQ \parallel BC$

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC} \dots\dots (1)$$

เช่นเดียวกันใน $\triangle DEF$ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{RS}{EF} = \frac{DR}{DE} \dots\dots (2)$$

โจทย์

ร-ยหน้า๖๒

บ.พ. 62

$$\therefore \frac{AQ}{AC} = \frac{DR}{DE}$$

$$\therefore \frac{PQ}{BC} = \frac{RS}{EF}$$

$$\therefore BC = EF$$

$$\therefore PQ = RS$$

$\therefore \triangle APQ$ และ DRS ตั้งอยู่บนฐาน
ยาวเท่ากัน และอยู่ในระหว่างคู่ขนาน
เดียวกัน.

$$\therefore \triangle APQ = \triangle DRS$$

ข้อ 5/289

โจทย์ ABC, DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมดองรูปมี $\hat{B} = \hat{E}$ และ
มีเนื้อเท่ากัน ถ้าด้าน AB, BC ยาว $2''$ และ $3''$
และถ้า DE, EF ยาว $2.1''$ และ $1.8''$ จงพิสูจน์ $\triangle ABC$:

$$DEF = 5:2$$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่ในตัวในโจทย์

พิสูจน์ ครบ บ.พ. 71

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF}$$

บ.พ. 71

H&S4/258

(1) = (2)

โจทย์

บ.พ. 26

$$= \frac{2.7 \times 3.5}{2.1 \times 1.8}$$

$$= \frac{5}{2}$$

แทนค่า

ข้อ 6/289

โจทย์ $\triangle ABC, \triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมสองรูปมี $\hat{B} = \hat{E}$ และมี
 มุมที่เท่ากัน ถ้า $AB = 5.6$ ซม. $BC = 6.3$ ซม.

$DE = 7.2$ ซม. จงหา EF

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่แต่ในโจทย์

พิสูจน์ รูปบทพิสูจน์ที่ 71

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF} \quad \text{บ.พ. 71}$$

$$\text{แต่ } \triangle ABC = \triangle DEF \quad \text{โจทย์}$$

$$\therefore \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF} = 1$$

$$5.6 \times 6.3 = 7.2 \times EF \quad \text{แทนค่า}$$

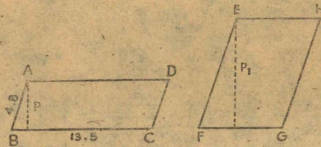
$$\therefore EF = 4.9 \text{ ซม.}$$

ข้อ 7/289

โจทย์ $ABCD, EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\hat{B} = \hat{F}$ และ
 มุมที่ติดกันที่จุด C ถ้า $AB = 4.8$ ซม. $BC =$
 13.5 ซม. $EF = 10.8$ ซม. จงหาความยาวของ FG

ถ้า p และ p' แทนความยาวของระยะตั้งฉากที่ลาก
จาก A และ E มายังด้าน BC และ FG ตามลำดับ จง
พิสูจน์ว่า $p:p' = 4:9$

คำตอบ ตอนแรก



$$\begin{aligned} \angle B &= \angle F \\ \frac{\text{พื้นที่ ABCD}}{\text{พื้นที่ EFGH}} &= \frac{AB \cdot BC}{EF \cdot FG} \\ &= \frac{3}{4} \\ \frac{AB \cdot BC}{EF \cdot FG} &= \frac{3}{4} \\ \frac{4.8 \times 13.5}{10.8 \times FG} &= \frac{3}{4} \\ \therefore FG &= 8 \text{ ซม.} \end{aligned}$$

โจทย์
บทแรก
บ.พ. 71
โจทย์
แทนค่า

คำเฉลย ตอนที่ 2

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของ } ABCD &= BC \times p \\ &= 13.5 p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของ } EFGH &= FG \times p' \\ &= 8 p' \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{ABCD}{EFGH} = \frac{13.5 p}{8 p'} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{p}{p'} = \frac{4}{9}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

แทนค่า

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

แทนค่า

โดยที่

ข้อ 8/289

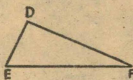
คู่มือพิชิต บ.พ. 71 (แบบ 2) ในต้นฉบับ “เรขาคณิตเตรียม
ออกมเล่ม 2” ของข้าพเจ้า

ข้อ 9/289

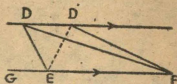
โจทย์ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$ ^{ให้} $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ถ้า $AB : DE$
 $= EF : BC$ จงพิสูจน์ $\hat{B} = \hat{E}$ หรือ $\hat{B} + \hat{E} = 2 \underline{\hspace{1cm}}$



รูป.ก



รูป.ข.



รูป.ค

กำหนดให้ $\triangle ABC, \triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมสองรูป ^{ให้} $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

และด้าน $AB : DE = EF : BC$

จะต้องพิสูจน์ ก. $\hat{B} = \hat{E}$ ดังรูป ก. และรูป ข.

ข. $\hat{B} + \hat{E} = 2 \underline{\hspace{1cm}}$ ดังรูป ก. และรูป ค.

พิสูจน์ ข. ถ้า $\hat{B}$ ไม่เท่ากับ $\hat{E}$ ดังรูป ก. และรูป

ค. ที่ E ตาก ED' ทำมุม $FED' = \hat{B}$

จาก D ตาก $DD' \parallel EF$ ไปตัด ED' ที่ D'

$$\therefore \hat{B} = \hat{D'EF}$$

สร้าง

$$\therefore \frac{\triangle D'EF}{\triangle ABC} = \frac{D'E \cdot EF}{AB \cdot BC}$$

ป.พ. 71

$$\text{แต่ } \triangle D'EF = \triangle DEF$$

ป.พ. 26

$$= \triangle ABC$$

โจทย์

$$\therefore \frac{D'E \cdot EF}{AB \cdot BC} = \frac{\triangle D'EF}{\triangle ABC} = 1$$

แทนค่า

$$\therefore D'E \cdot EF = AB \cdot BC \dots\dots (1)$$

$$\text{แต่ } \frac{AB}{DE} = \frac{EF}{BC}$$

โจทย์

$$\therefore DE \cdot EF = AB \cdot BC \dots\dots (2)$$

$$(1) = (2), D'E = DE$$

$$\therefore \hat{E}D'D = \hat{E}D'D$$

ป.พ. 5

ถ้าต่อ FE ออกมาถึง G

$$\therefore \hat{E}D'D = \hat{D}EG \text{ และ } \hat{E}D'D = \hat{D'EF}$$

มุมแย้ง

$$\text{แต่ } \hat{E}D'D = \hat{E}D'D$$

พิสูจน์มาแล้ว

$$\therefore \hat{D}EG = \hat{D'EF} = \hat{ABC}$$

โจทย์

$$\text{แต่ } \hat{D}EG + \hat{D'EF} = 2 \text{ ฏ}$$

พ.พ. 1

$$\therefore \hat{ABC} + \hat{DEF} = 2 \text{ ฏ ด้วย}$$

แทนค่า

ก. ถ้า $\hat{B} = \hat{E}$ จะได้ผลข้อ ก. ที่ต้องการ

ข้อ 10/298

โจทย์ PQ เป็นเส้นตรงที่ลากตัดด้าน AB, AC ของรูป $\triangle ABC$
ที่จุด P และ Q แล้วลากเส้นตรง PC

โดยอาศัยการอ้างบทพิสูจน์ที่ 70 ต้องห จพพิสูจน์

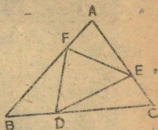
ให้เห็นว่า $\triangle APQ : \triangle ABC = AP.AC : AB.AC$

และแล้วให้พิสูจน์บทพิสูจน์ที่ 71 ตามวิธีข้างบนนี้

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่

แต่ในโจทย์

พิสูจน์ $\triangle^s APQ, APC$ ส่วนสูงร่วมกัน



$$\therefore \frac{\triangle APQ}{\triangle APC} = \frac{AQ}{AB}$$

เช่นเดียวกัน

$$\frac{\triangle APC}{\triangle ABB} = \frac{AP}{AB}$$

$$\therefore \frac{\triangle APQ}{\triangle APC} \times \frac{\triangle APC}{\triangle ABC} = \frac{AP.AQ}{AB.AC}$$

$$\therefore \frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP.AQ}{AB.AC} \quad \text{ซึ่งเป็น}$$

ผลของ บ.พ. 71

บ.พ. 70

"

คูณกัน

และเราอาจพิสูจน์ได้ 71

โดยอาศัยการยกค่าเฉลี่ยมาให้
มุม A เท่ากัน และใช้บทพิสูจน์ที่ 70
ต้องหน ตามแบบข้างบน

ข้อ 1/291

โจทย์ XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตัดด้าน AB, AC ที่จุด X และ Y ถ้า $AX = \frac{1}{3} AB$ จงหาค่าของ $\triangle AXY : \triangle ABC$

วิธีทำ ใน $\triangle ABC$, $\therefore XY \parallel BC$

$$\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{1}{9}$$

โจทย์

ร.ย. หน้า 62

บ.พ. 72

แทนค่า

ข้อ 2/291

โจทย์ ด้านที่สัมผัสของรูปสามเหลี่ยมคล้ายต้องรูปยาว 3.6 และ 2.4 ตามลำดับ ถ้าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใหญ่เท่ากับ 45 ตารางฟุต จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปเล็ก

วิธีหา จากรูปในข้อ 1 สมมติให้ $\triangle ABC$, $\triangle AXY$ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายกันสองรูป มีด้าน BC , XY ที่สมกันยาว 3.6 และ 2.4 ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AXY} &= \frac{BC^2}{XY^2} \\ &= \frac{(3.6)^2}{(2.4)^2} \\ &= \frac{49}{4} \times \frac{9}{49} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC = 45 \text{ ค.ร. ฟุต}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AXY &= \frac{4}{9} \text{ ของ } \triangle ABC \\ &= \frac{4}{9} \times 45 \text{ ค.ร. ฟุต} \\ &= 20 \end{aligned}$$

ข้อ 3/291

โจทย์ จากรูปในข้อ 1 ถ้า X เป็นจุดที่แบ่ง AB ภายในออกตามอัตราส่วน 5:3 และพื้นที่ของ $\triangle ABC = 25.6$ ค.ร. ช.ม. จงหาพื้นที่ของ $\triangle AXY$

วิธีหา รูปในข้อ 1

บ.พ. 72

$$\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle AXY &= \frac{AX^2}{AB^2} \times \triangle ABC \\ &= \frac{25}{64} \times 25.6 \text{ ค.ร. ข.ม.} \\ &= 10 \quad \text{,,}\end{aligned}$$

แทนค่า

ข้อ 4/291

โจทย์ ตามเหลี่ยมคล้ายตั้งรูปมโนเอก 392 ค.ร. ข.ม. และ 200 ค.ร. ข.ม. ตามลำดับ จงหอยุทธยด้านของด้านใด ด้านหนึ่งทีละมุม

วิธีหา รูปจากข้อ 1

ให้ $\triangle ABC, \triangle AXY$ เป็นตามเหลี่ยมคล้ายกันตั้งรูปมโนเอก 392 และ 200 ค.ร. ข.ม. ตามลำดับ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AXY} = \frac{BC^2}{XY^2}$$

บ.พ. 72

$$\begin{aligned}\frac{392}{200} &= \frac{BC^2}{XY^2}\end{aligned}$$

แทนค่า

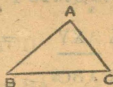
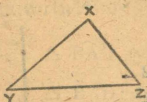
$$\therefore \frac{BC^2}{XY^2} = \frac{49}{25}$$

$$\therefore \frac{BC}{XY} = \frac{7}{5}$$

$\therefore$ อัตราส่วนของด้านที่ สี่ ของรูป
สามเหลี่ยม = 7 : 5

ข้อ 5/291

โจทย์ ABC, XYZ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายสองรูป มีพื้นที่ 32 ตร.
นิ้ว และ 60.25 ตร. นิ้ว ตามลำดับ ถ้า $XY = 7.7$ นิ้ว
หาความยาวของ AB ซึ่งเป็นด้านที่ สี่ กับ XY



วิธีทำ $\therefore \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{AB^2}{XY^2}$$

$$\frac{32}{60.25} = \frac{AB^2}{(7.7)^2}$$

โจทย์

บ.พ. 72

แทนค่า

$$\begin{aligned}
 \therefore AB^2 &= \frac{32}{60.5} \times (7.7)^2 \\
 &= \frac{64}{121} \times (7.7)^2 \\
 &= \frac{8^2}{11^2} \times (7.7)^2 \\
 \therefore AB &= \frac{8}{11} \times 7.7 \text{ นิ้ว} \\
 &= 5.6 \text{ นิ้ว}
 \end{aligned}$$

ข้อ 6/291

โจทย์ จงแสดงถึงวิธีลากเส้นตรง XY ให้ขนานกับฐาน BC โดยให้ $\triangle AXY$ ที่เกิดขึ้นเป็น 9 ใน 16 ของ $\triangle ABC$

วิธีแยก ดูจากรูปในข้อ 1

$$\begin{aligned}
 \text{ถ้า } \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} &= \frac{9}{16} \\
 &= \frac{AX^2}{AB^2}
 \end{aligned}$$

โจทย์

ป.พ. 72

$$\therefore \frac{AX}{AB} = \frac{3}{4}$$

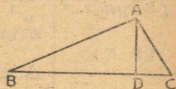
$\therefore X$ เป็นจุดที่แบ่ง AB ภายในออกตามอัตราส่วน 3 : 1

∴ วิธีสร้าง ครึ่งแรกต้องแบ่ง AB ภายในที่ X ออกตามอัตราส่วน 3:1 แล้วจึงลากเส้น XY ให้ขนานกับ BC จะได้ $\triangle AXY = \frac{9}{16}$ ของ $\triangle ABC$

ข้อ 7/291

โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี A เป็นมุมฉาก จาก A ลาก AD ให้ตัดได้ฉากกับ BC จงพิสูจน์ $\triangle BAD : \triangle ACD = BA^2 : AC^2$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มี อยู่แต่ในโจทย์

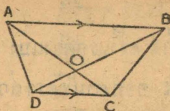


พิสูจน์ ∴ $\triangle BAD \sim \triangle ACD$ | บทแทรก
 ∴ $\triangle BAD : \triangle ACD = BA^2 : AC^2$ | บ.พ.66บ.พ.72

ข้อ 8/291

โจทย์ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน $AB \parallel CD$ ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมตัดกันที่ O และถ้า $AB = 2CD$ จงหาอัตราส่วนของ $\triangle AOB : \triangle COD$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่แต่ในโจทย์



พิสูจน์ $\therefore AB \parallel CD$

$$\therefore \hat{A}BO = \hat{O}DC$$

$$\hat{B}AO = \hat{O}CD$$

$$\hat{A}OB = \hat{C}OD$$

$\therefore \triangle AOB, COD$ เป็นสามเหลี่ยมที่

มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม.

$\therefore$ ด้านทั้งสามย่อมได้ปฏิกิริยากัน

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\therefore \triangle AOB : \triangle COD = AB^2 : CD^2$$

$$= 4 : 1$$

โจทย์

บ.พ. 14

"

" 3

บ.พ. 62

บ.พ. 72

แทนค่า

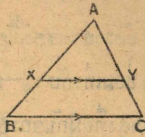
ข้อ 9/291

โจทย์ XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยม

$$ABC \quad \text{ถ้า} \quad \triangle AXY : \square XBCY = 4 : 5$$

$$\text{จงพิสูจน์} \quad AX : XB = 2 : 1$$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มัธยมแล้วในโจทย์.



พิสูจน์ $\therefore \frac{\square XBCY}{\triangle AXY} = \frac{5}{4}$

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AXY} = \frac{9}{4}$

แต่ $\triangle ABC \sim \triangle AXY$

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AXY} = \frac{AB^2}{AX^2}$

$\therefore \frac{9}{4} = \frac{AB^2}{AX^2}$

$\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{3}{2}$

หรือ $\frac{XB}{AX} = \frac{1}{2}$

” $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{1}$

โจทย์

เอา 1 บวก

ทั้งต้องข้าง

ร-ย หน้า 62

บ.พ. 72

แทนค่า

เอา 1 ลบ

ทั้งต้องข้าง

ข้อ 10/291

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า อัตราส่วนของเนื้อที่ของสามเหลี่ยมคล้าย
กันสองรูป ย่อมเท่ากับ อัตราส่วนของจตุรัสบน

ก. ด้านสูงที่ตกกันของสามเหลี่ยมทั้งสอง

ข. เส้นมัธยฐานที่ตกกัน

ค. รัศมีของวงกลมที่บรรจุภายใน

ง. รัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ

กำหนดให้ ABC $A'B'C'$ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายกันสองรูป

มี ก. h, h' เป็นความยาวของด้านสูงของ
สามเหลี่ยมทั้งสอง

ข. $AD, A'D'$ เป็นเส้นมัธยฐาน

ค. r, r' เป็นรัศมีของวงกลมบรรจุภายใน

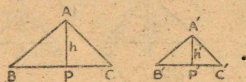
ง. R, R' เป็นรัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ

จะต้องพิสูจน์ ก. $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = h^2 : h'^2$

ข. " " " " $= AD^2 : A'D'^2$

ค. " " " " $= r^2 : r'^2$

ง. " " " " $= R^2 : R'^2$



พิสูจน์ ก. $\therefore \hat{B} = \hat{B}'$
 $\triangle APB = \triangle A'P'B'$
 $\therefore \hat{BAP} = \hat{B'A'P'}$
 $\triangle^S BAP, \triangle^S A'P'$ เป็นสามเหลี่ยมมุม
 มุมเท่ากัน มุมต่อมุม.

$$\therefore \frac{h}{h'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\therefore \frac{h^2}{h'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$= \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}$$

[ถ้าหวัข้อ ก. น้ไปคดู H&S 2/267
 ตอน 1 ด้วย]

พิสูจน์ ข. $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

โจทย์

มุมฉาก

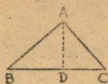
บ.พ 16

บ.พ. 62

ยกกำลังสอง

บ.พ. 72

บ.พ. 62



$$= \frac{BC/2}{B'C'/2}$$

$$= \frac{BD}{B'D'}$$

และ $\therefore \hat{B} = \hat{B'}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$

$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$

$\therefore \frac{AD^2}{A'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

$$= \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}$$

พิสูจน์ ค. รูป H&S ข้อ 2 คณ 3 ในหน้า 267

$\therefore \frac{r}{r'} = \frac{BC}{B'C'}$

ข้อ 2 ทาร

$\triangle ABC \sim$

$\triangle A'B'C'$

บ.พ 64

กฎ $\triangle$ คล้าย

ยกกำลังสอง

บ.พ. 72

ค. H&S 2/267

คณ 3

$$\begin{aligned} \therefore \frac{r^2}{r'^2} &= \frac{BC^2}{B'C'^2} \\ &= \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} \end{aligned}$$

ยกกำลังสอง

บ.พ. 72

พิสูจน์ จ. รูป H&S ข้อ 2 ตอน 4 หน้า 267

$$\begin{aligned} \therefore \frac{R}{R'} &= \frac{BC}{B'C'} \\ \therefore \frac{R^2}{R'^2} &= \frac{BC^2}{B'C'^2} \\ &= \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} \end{aligned}$$

ดู H&S2/267

ตอน 4

ยกกำลังสอง

บ.พ. 72

H&S หน้า 294
ข้อ 1/294

(ภาคคำนวณและสร้างรูป)

โจทย์ จงลากเส้นตรง XY ให้ขนานกับฐาน BC โดยให้ ΔAXY ที่เกิดขึ้นเป็น $\frac{4}{9}$ ของ ΔABC

วิธีแยก ถ้า $\frac{\Delta AXY}{\Delta ABC} = \frac{4}{9}$

ตามโจทย์
ประสงค์

$$\therefore XY \parallel BC$$

$$\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$$

$$\therefore \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{AX}{AB} = \frac{2}{3} \text{ หรือ } \frac{AX}{XB} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ วัสดังกล่าวแบ่ง AB ภายใน

ออกตามอัตราส่วน 2 : 1 แล้วลาก

เส้นขนานกับ BC จะได้ $\triangle AXY$

$= \frac{4}{9}$ ของ $\triangle ABC$ ตามต้องการ

ข้อ 2/294

ร.ย. หน้า 62

บ.พ. 72

บ.ด. 37

โจทย์ รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านยาว 2.0", 2.5", 3.2"

จงหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ที่มี

พื้นที่เป็นสามเท่าของรูปสามเหลี่ยม (ให้ตอบเป็น

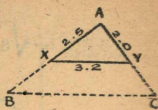
หน่วยทศนิยมสองตำแหน่ง)

กำหนดให้ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มี

ด้านยาว 3.2", 2.5", 2.0" นว

ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยม

คล้ายกับ $\triangle AXY$ เป็นสามเหลี่ยม



$\triangle AXY$

จะต้องการหา ความยาวของ AB, BC และ CA

วิธีหา $\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$

โจทย์

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$$

บ.พ. 72

$$= \frac{XY^2}{BC^2} = \frac{AY^2}{AC^2}$$

"

$$\text{แต่ } \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

โจทย์

$$\therefore \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{XY^2}{BC^2} = \frac{AY^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{AX}{AB} = \frac{XY}{BC} = \frac{AY}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ถอดรศ

$$\therefore AB = \sqrt{3} \cdot AX = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4.33 \text{ นว}$$

แทนค่า

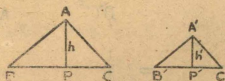
$$BC = \sqrt{3} \cdot XY = \frac{19\sqrt{3}}{6} = 5.45 \text{ ,,} \quad \left| \begin{array}{l} \text{แทนค่า} \\ \text{,,} \end{array} \right.$$

$$AC = \sqrt{3} \cdot AY = 2\sqrt{3} = 3.46 \text{ ,,}$$

ข้อ 3/294

โจทย์ รูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูปมีพื้นที่โดยอัตราส่วน 13.69 : 16.81 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปใหญ่มีด้านสูงเท่ากับ 10 ฟุต 3 นิ้ว ให้หาส่วนสูงที่สั้นกว่ากันของสามเหลี่ยมรูปเล็ก

วิธีหา ดูข้อ 7 ในแบบฝึกหัดที่ 5 หรือ H&S 10/291



ให้ $\triangle A'B'C'$, $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายมีพื้นที่โดยอัตราส่วน 16.81 : 13.69 ให้ $h' = 10\frac{1}{4}$ ฟุต

$$\begin{array}{l} \therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \\ \therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \text{ -----(1)} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{โจทย์} \\ \text{ป.พ. 72} \end{array} \right.$$

แต่เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle ABP \sim \triangle A'B'P'$

$$\therefore \frac{h^2}{h'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \dots\dots\dots (2)$$

บ.พ. 62

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{h^2}{h'^2}$$

(1) = (2)

$$\therefore \frac{16.81}{13.69} = (41/4)^2 / h'^2$$

$$\therefore \frac{4.1}{3.7} = \frac{41}{4h'}$$

ถอดकरणที่
ที่ต้อง

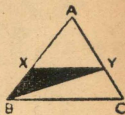
$$\begin{aligned} \therefore h' &= \frac{37}{41} \times \frac{41}{4} \text{ ฟุต} \\ &= 9\frac{1}{4} \text{ "} \end{aligned}$$

ข้อ 4/294

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากับ 16 ตร. ซม.
 XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC และแบ่งด้าน AB
 ออกตามอัตราส่วน 3 : 5 ถ้า BY จงหาพื้นที่ของ
 สามเหลี่ยม BXY

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มีเนื้อที่ 16 ตร.

ซม. มีด้าน $XY \parallel BC$ และให้ X
เป็นจุดที่แบ่ง AB ออกตามอัตราส่วน



3 : 5

จะต้องการหา เนื้อที่ของ $\triangle BXY$

วิธีหา $\triangle BXY$ และ $\triangle ABY$ เป็นสามเหลี่ยม
ที่มีด้านคู่ขนาน

$$\therefore \frac{\triangle BXY}{\triangle ABY} = \frac{BX}{AB}$$

$$= \frac{5}{8} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{เช่นเดียวกัน} \quad \frac{\triangle ABY}{\triangle BAC} = \frac{AY}{AC}$$

$$= \frac{3}{8} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \times (2) \text{ จะได้ } \frac{\triangle BXY}{\triangle BAC} = \frac{15}{64}$$

$$\text{แต่ } \triangle BAC = 16 \text{ ตร.ซม.}$$

มี y เป็น

จุดยอด

บ.พ. 70

โจทย์

บ.พ. 70

$$\therefore \triangle BXY = \frac{15}{64} \times 16 = 3\frac{3}{4}$$

ข้อสังเกต สำหรับข้อนี้ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจ
ได้แจ่มแจ้งยิ่งขึ้น ข้าพเจ้าจึงเขียน
กำหนดไว้ และ จะต้องพิสูจน์ให้ดูอีก
ครั้งหนึ่ง

ข้อ 5/294

โจทย์ XY เป็นเส้นที่ลากขนานกับฐาน BC ของรูปสาม
เหลี่ยม ABC ถ้า $\triangle AXY = \frac{1}{5} \triangle ABC$ และถ้า BC ยาว
10 ซม. จงหาความยาวของ XY ออกมาเป็นค่า
ใกล้เคียงของมิลลิเมตร

วิธีหา ดูรูปข้อ 2 ที่แล้วมา ให้ $XY \parallel BC$
ทำให้ $\triangle AXY = \frac{1}{5} \triangle ABC$
และให้ $BC = 10$ ซม.

$\therefore XY \parallel BC$ ของ $\triangle ABC$ โจทย์

$\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$

บ.พ. 62

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{XY^2}{BC^2}$$

บ.พ. 72

$$\frac{1}{5} = \frac{XY^2}{100} \quad \left| \begin{array}{l} \text{แทนค่า} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\therefore XY = \sqrt{20} \text{ ซม.}$$

$$= 4.5 \text{ ,}$$

ข้อ 6/249

โจทย์ รูปห้าเหลี่ยมตรง (ห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า) รูปหนึ่งมีด้าน ๆ หนึ่งยาว 2.5" และมีเนื้อที่คิดโดยประมาณเท่ากับ $10 \frac{3}{4}$ ตร. นิ้ว จงหาเนื้อที่ของรูปห้าเหลี่ยมคล้ายกับรูปนี้ที่สร้างอยู่บนด้านยาว 3"

วิธีทำ ให้ $A = 10 \frac{3}{4}$ ตร. นิ้ว เป็นรูปห้าเหลี่ยมตรงที่มีด้าน ๆ หนึ่งยาว 2.5"

ให้ B เป็นรูปห้าเหลี่ยมคล้ายที่มีด้าน ๆ หนึ่งยาว 3.0"

$$\therefore \text{รูป } A \sim \text{รูป } B$$

$$\therefore \frac{\text{รูป } B}{\text{รูป } A} = \frac{(3.0)^2}{(2.5)^2}$$

11-พ. 73

$$\begin{array}{rcl}
 \therefore \text{รูป B} & = & \frac{9}{6.25} \times 10.75 \text{ ตร. นิ้ว} \quad \left| \begin{array}{l} \text{แทนค่า} \\ \\ \end{array} \right. \\
 & = & \frac{9}{625} \times 1075 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \\
 & = & 15.48 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.
 \end{array}$$

ข้อ 7/294

โจทย์ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านยาว 10.8 เมตร และ
 มุมอัตราส่วนของด้านยาวและด้านกว้าง เท่ากับ 12 : 5
 จงหา ความยาว ของด้าน ยาว และ ด้านกว้างของรูปสี่-
 เหลี่ยมผืนผ้าคล้าย ที่มีเนื้อเท่ากับหนึ่งในเก้าของรูป
 สี่เหลี่ยมนี้

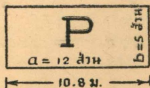
วิธีหา ให้ P เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาว = a กว้าง = b
 $\therefore$ ตามโจทย์ $a : b = 12 : 5$ และ $a = 10.8$ เมตร

ให้ Q เป็นรูปสี่เหลี่ยม

ผืนผ้าที่ต้องการหา มี

ด้านยาว = x และกว้าง

= y



$$\therefore \frac{\text{รูป Q}}{\text{รูป P}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{แต่ } \text{รูป P} \sim \text{รูป Q}$$

$$\therefore \frac{\text{รูป Q}}{\text{รูป P}} = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{1.80}{3} \text{ เมตร} \\ &= 3.6 \text{ ,} \end{aligned}$$

$$\therefore a:b = 12:5$$

$$\text{แต่ } \therefore \text{รูป P} \sim \text{รูป Q}$$

$$\therefore a:b = x:y = 12:5$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$$

โจทย์

ต่างเป็น □

แผ่นผ้า

บ.พ. 72

โจทย์

ถอดรูป

แทนค่า

โจทย์

กฎรูปหลาย

เหลี่ยมคล้าย

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{5}{12} \times 3.6 \text{ เมตร} \\ &= 1.5 \quad \text{,,} \end{aligned}$$

ข้อ 8/294

โจทย์ แปลงของนาแปลงหนึ่งใช้มาตราส่วน 1" = 66 หลา
ถ้าเนื้อที่ของนาในแปลงวัดได้ 100 ตร. นิ้ว จงหาว่า
นาจริงจะมีเนื้อที่กี่เอเคอร์ (1 เอเคอร์ = 4840 ตร.
หลา) จงอธิบายด้วยว่า สำหรับรูปร่างของนาทำไม
เราจึงเว้นไม่มาคำนึงถึงเสียได้

วิธีทำ ก. ในแปลง 1" เนื้อที่ในนาจริง = 66 หลา

$$\therefore \text{,, 1 ตร.นิ้ว ,,} = (66)^2 \times \text{ตร. หลา}$$

$$\therefore \text{,, 100 ,,} = (66)^2 \times 100 \text{ ,,}$$

$$4840 \text{ ตร. หลา} = 1 \text{ เอเคอร์}$$

$$(66)^2 \times 100 \text{ ,,} = \frac{(66)^2 \times 100}{4840} \text{ เอเคอร์}$$

$$= 90 \quad \text{,,}$$

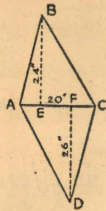
ข . . . ตามหลักการเขียนแผนผัง รูปในแผนผังต้อง
คล้ายกับรูปในนาจริงอยู่แล้ว และเพราะว่าเนื้อที่ใน
แปลงต้องคงที่ คือเท่ากับ 100 ตร. นิ้ว (โจทย์)
และจะเป็นรูปสามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม หรือหกเหลี่ยม
ก็ได้

. . . นาจริงอาจจะเป็นรูปสามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม ห้า
เหลี่ยม หรือหกเหลี่ยมก็ได้เช่นกัน

. . . รูปร่างของนาจึงเว้นแต่จะไม่นำมาคำนึงถึงได้

ข้อ 9/294

โจทย์ แปลน ของ กฎหาสันแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า
ABCD เขียนขึ้น โดยใช้มาตรา ส่วน 25" ต่อ 1 ไมล์
ถ้า $AC = 20''$ และระยะตั้งฉาก B และ D มายัง AC
ยาว 24" และ 26" ตามลำดับจงหาว่า นาจริงจะมี
เนื้อหกเอเคอร์ (1 ตารางไมล์ = 640 เอเคอร์)



วิธีหา ในแปลน

$$\text{เนื้อที่ } ABCD = \frac{1}{2} AC (BE+DF) \quad \text{บ.พ. 28}$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 50 \text{ ตร. นิ้ว} \quad \text{แทนค่า}$$

$$= 500 \text{ ตร. นิ้ว}$$

ในแปลน 25" ในนาจริง = 1 ไมล์

$$, 25^2 \text{ ตร. นิ้ว} , = 1 \text{ ตร. ไมล์}$$

$$\begin{aligned} \text{, 500} &= \frac{500}{625} \text{ ,} \\ &= \frac{4}{5} \text{ ,} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \text{ ตารางไมล์} & = & 640 \text{ เอเคอร์} \\
 \frac{4}{5} \text{ " } & = & \frac{4}{5} \cdot 640 \text{ " } \\
 & = & 512 \text{ " }
 \end{array}
 \left| \right.$$

ข้อ 10/294

โจทย์ แปลง ขอนา แปลงหนึ่ง เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว 13, 14, 15, ซม. ตามลำดับ ถ้าหาจริงมีเนื้อที่ 1.89 เฮกตาร์ (Hectares) จงหามาตราส่วนที่ใช้เขียนแปลงของนา (1 เฮกตาร์ = 100 เอเคอร์ หรือ 10,000 ตารางเมตร)

วิธีหา ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้าน AB, AC, CB, ยาว 13, 14, 15, ซม.



ตามลำดับ

∴ เนื้อที่ของ $\triangle ABC$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{เมื่อ } s \\
 = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2}
 \end{array}$$

$$= 21 \text{ ซม.}$$

$$\therefore \triangle ABC = -\sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} \text{ ตร. ซม.}$$

$$= 84 \quad "$$

$$1 \text{ เฮกตาร์} = 10,000 \text{ ตร. ซม.}$$

$$1.89 \text{ ,,} = 18900 \text{ ,,}$$

เนื้อที่ในแปลง 84 ตร. ซม. ในนาจริง 18900 ตร. ซม.

$$\text{,,} \quad \text{,,} \quad 1 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{18900}{84} \quad \text{,,}$$

$$84$$

$$= 225 \quad "$$

$$\therefore 1 \text{ ซม.} = \sqrt{225} = 15 \text{ เมตร}$$

$$\therefore \text{มาตรการที่ใช้เขียน 1 ซม.} = 15 \text{ เมตร}$$

H & S หน้า 295

ข้อ 1/295

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี A เป็นมุมฉาก จาก

A ตาก AD ให้ตั้งฉากกับ BC จงพิสูจน์

$$\text{ก. } BC^2 : BA^2 = BC : BD$$

(นี่คือบทแทรก 1 บ.พ. 73)

$$\text{ข. } BC^2 : CA^2 = BC : CD$$

และให้พิสูจน์ $BC^2 = BA^2 + AC^2$ โดยใช้ผลจากข้อ

ก. และ ข. ข้างบน

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มียู่แล้วในโจทย์

ให้นักเรียนเขียนรูปเอาเอง

พิสูจน์ ก. $\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$

$$\therefore BA^2 = BC \cdot BD$$

$$\therefore \frac{BC^2}{BA^2} = \frac{BC^2}{BC \cdot BD} = \frac{BC}{BD}$$

บ.พ. 66

บทแทรก 2

บ.พ. 66

แทนค่า

สำหรับ ข้อ ก. อาจพิสูจน์ได้อีกวิธีหนึ่ง คือ

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ABD$$

บ.พ. 66

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle BCD} = \frac{BC^2}{BA^2}$$

บ.พ. 72

$$\text{แต่ } \frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = \frac{BC}{BD}$$

บ.พ. 70

คือ
นคอ

$$\therefore \frac{BC^2}{BA^2} = \frac{BC}{BD}$$

บทแทรก

1 บ.พ. 73

พิสูจน์ ข. $\therefore AC^2 = BC \cdot CD$

บทแทรก 2

$$\therefore \frac{BC^2}{CA^2} = \frac{BC^2}{BC \cdot CD}$$

บ.พ. 66

แทนค่า

$$= \frac{BC}{CD}$$

พิสูจน์ ก. $\therefore \frac{BC^2}{BA^2} = \frac{BC}{BD}$

ตามข้อ ก.

$$\therefore \frac{BA^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC} \dots\dots (1)$$

กฎปฏิกาค

$$\therefore \frac{BC^2}{CA^2} = \frac{BC}{CD}$$

$$\therefore \frac{CA^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC} \dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \quad \frac{BA^2 + CA^2}{BC^2} = \frac{BD + CD}{BC} = \frac{BC}{BC}$$

$$= 1$$

$$\therefore BC^2 = BA^2 + AC^2$$

ตามข้อ ข.

กฎพีทาโกรัส

ข้อ 2/295

โจทย์ ถ้า XY เป็นเส้นตรงที่ลากขนานกับฐาน BC และแบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาอัตราส่วนของ $AX : AB$ และแสดงให้เห็นด้วยวิธีแบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยมโดยลากเส้นตรงให้ขนานกับด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมนั้น

วิธีหา ตามรูปที่ $XY \parallel BC$

$$\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$$

โจทย์

บ.พ. 72

โจทย์

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AX}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ถอดราก

$\therefore$ วิธีสร้าง ครึ่งแรกต้องแบ่ง AB ออก

ที่ X โดยทำให้ $\frac{AX}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

รายละเอียดในการแบ่งมิตงนี้ คือ

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ O บน AB สร้าง
ครึ่งวงกลม ที่ O ดึง OD ให้ตั้งฉาก
กับ AB เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี
AD เขียนส่วนโค้งตัด AB ที่ X จาก X
ลากเส้นตรง XY ขนานกับ BC แล้ว XY

จะแบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยม ABC ตาม
ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore$ ABD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

บ.พ. 41

$$\therefore AD^2 = AO \cdot AB$$

บ.ท. แทรก

บ.พ. 66

$$\begin{aligned}\therefore AX^2 &= \frac{1}{2} AO \cdot AB \\ &= \frac{1}{2} AB^2\end{aligned}$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \triangle AXY : \triangle ABC$$

บ.พ. 72

$\therefore$ XY เป็นเส้นขนานที่แบ่งครึ่ง $\triangle$
ABC ที่ต้องการ

ข้อ 3/295

โจทย์ วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอกที่ A ถ้าต่อเส้น
สัมผัสร่วมที่เขียนสัมผัสวงกลมภายนอกที่ B และ C
ออกไปพบเส้นต่อจุดศูนย์กลางที่ S ตาก AB, AC จง
พิสูจน์ $\triangle SBA : \triangle SAC = SB : SC$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มั้อยู่ในโจทย์

พิสูจน์ $\therefore \triangle SAB, SAC$ มีจุดยอด A ร่วมกัน

$$\therefore \frac{\triangle SAB}{\triangle SAC} = \frac{SB}{SC}$$

บ.พ. 70

ข้อ 4/295

โจทย์ วงกลมสองวงตัดกันที่ A และ B ถ้าต่อเส้นสัมผัส
วงกลมสองเส้นที่ A (เส้นตรง) ออกไปพบเส้นรอบวงที่
C และ D ถ้า AB, CB และ BD จงพิสูจน์

$$\triangle CBA : \triangle ABD = CB : BD$$

วิธีพิสูจน์

ดูรูปใน H&S 8/269 หรือใน “ ภูเขาเรขาคณิต
สำหรับนักเรียนเตรียมอุดมเต็ม 1 ” ฉบับของข้าพเจ้า
หน้า 96

พิสูจน์ . . $\triangle^s ABC, ABD$ มีมุม $\hat{A}BC = \hat{A}BD$ H&S8/269

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = \frac{CB \cdot AB}{BD \cdot AB}$$

$$= \frac{CB}{BD}$$

B.W. 71

ข้อ 5/295

โจทย์ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมปาดภายใน (Pedal Triangle)

ของรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า

ก. $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$

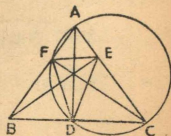
ข. รูปสี่เหลี่ยม AFDC : $\triangle DBF = AD^2 : BD^2$

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

AD, BE, CF เป็นเส้นตั้งฉาก

ที่ลากจากจุดมุมมาพบด้านตรง

ข้ามที่จุด D, E, F



จะต้องพิสูจน์ ก. $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$

ข. รูปสี่เหลี่ยม AFDC : $\triangle DBF$
 $= AD^2 : BD^2$

พิสูจน์ ก. $\therefore \hat{ADC}, \hat{AFC}$ ต่างเป็นมุมฉาก
 จะต้องเป็นมุมในครึ่งวงกลม

$\therefore A, F, D, C$ วงกลมล้อมได้

$\therefore \hat{BFD} = \hat{ACB}$
 $\hat{B}$ เป็นมุมร่วม

$\therefore \hat{BDF} = \hat{BAC}$

$\therefore \triangle^s BDF, BAC$ เป็นสามเหลี่ยมที่
 เท่ากันมุมต่อมุม

$\therefore$ ด้านทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมทั้ง
 สองย่อมได้สมบัติภาคกัน

$\therefore \triangle DBF \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DBF} = \frac{AB^2}{BD^2}$

ข. $\therefore \frac{\triangle ABC - \triangle ABF}{\triangle DBF}$

บ.พ. 41

บทแทรก

บ.พ. 40

H&S 5/163

บ.พ. 16

บ.พ. 62

กฎ $\triangle^s$ คล้าย

บ.พ. 72

เอา 1 ลบ

ทั้งสองข้าง

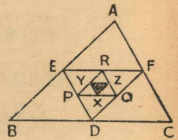
$$= \frac{AB^2 - DB^2}{DB^2}$$

$$\therefore \square AFDC : \triangle DBF \\ = AD^2 : DB^2$$

ข้อ 6/295

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ต่อเส้นระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC จะเกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง ต่อเส้นระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง จะเกิดเป็นสามเหลี่ยมรูปที่สาม ทำดังนี้เรื่อย ๆ ไป จงหาอัตราส่วนของสามเหลี่ยมรูปที่สี่ต่อสามเหลี่ยม ABC

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปที่ 1 มี D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม ให้ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปที่ 2



และเช่นเดียวกัน

PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปที่ 3

YXZ " " " 4

จะต้องการหา $\triangle XYZ : \triangle ABC$

วิธีหา $\therefore$ E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ โจทย์

AB, AC

$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$$

H&S 8/64

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$$

" "

$$\frac{DF}{AB} = \frac{1}{2}$$

" "

$\therefore \triangle DEF, ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม
ที่มีด้านทั้งสาม ได้ปรากฏกัน

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

ดูข้อสังเกต 1

บ.พ. 63 ในเรขาค
เล่ม 1

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

หน้า 64

$$= \frac{4}{1} \text{ ---- (1)}$$

บ.พ. 72

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

แทนค่า $\frac{BC}{EF} \frac{2}{1}$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle PQR} = \frac{4}{1} \text{----} (2)$$

$$\text{และ } \frac{\triangle PQR}{\triangle XYZ} = \frac{4}{1} \text{----} (3)$$

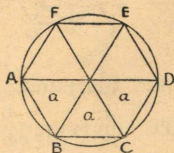
$$(1) \times (2) \times (3) \text{ จะได้ } \frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{64}{1}$$

$$\text{หรือ } \triangle XYZ : \triangle ABC = 1 : 64$$

ข้อ 7/295

โจทย์ รูปหกเหลี่ยมตรงรูปหนึ่ง (ด้านเท่ามุมเท่า) มีด้านยาว
ด้านละ ๖ ซม. ถ้าต่อเส้นตรงระหว่างจุดกึ่งกลางของ
ด้านทั้งหกของรูปหกเหลี่ยมรูปที่หนึ่ง จะเกิดเป็นรูป
หกเหลี่ยมรูปที่สอง ถ้าต่อเส้นระหว่างจุดกึ่งกลางของ
ด้านของรูปหกเหลี่ยมรูปที่สอง จะเกิดเป็นรูปหกเหลี่ยม
รูปที่สาม ทำดังนี้เรื่อย ๆ ไป จงหาอัตราส่วนระหว่าง
เนื้อที่ของรูปหกเหลี่ยมรูปแรก ต่อ รูปที่ห้า

ข้อสังเกต ในการแก้ไขข้อนี้ นักเรียนจำต้อง
เข้าใจวิธีสร้างรูปหกเหลี่ยมตรง (Regular hexagon)
ให้มีด้านยาว a เดียวกัน คือ



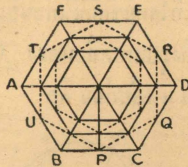
วิธีสร้าง เขียนวงกลมให้มีรัศมี $= a$ ตากเส้นผ่าศูนย์กลาง AD
(ตรง)

เอา A และ D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี a เขียนส่วนโค้ง
ตัดวงกลมเดิมที่ B, C, E, F

ต่อเส้นระหว่างจุดตัด จะเกิดรูปหกเหลี่ยม ABCDEF
ที่ต้องการ

และจงสังเกตว่า ด้านทุกด้านที่ปรากฏในรูปนี้ยาว a
ตลอด

เมื่อได้ทราบถึงวิธีสร้างรูปหกเหลี่ยมตรงแล้ว ข้าพเจ้า
จะได้กล่าวถึงวิธีแก้ไขข้อนี้ ดังต่อไปนี้ คือ



กำหนดให้ $ABCDEF$ เป็นรูปหกเหลี่ยมตรงมีด้านยาว a
 $PQRSTU$ เป็นรูปหกเหลี่ยมรูปตั้ง

ให้ H เป็นรูปหกเหลี่ยมรูปที่ 5

จะต้องการหา รูปหกเหลี่ยม H : รูปหกเหลี่ยม $ABCDEF$

วิธีหา ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรูปหกเหลี่ยมรูปแรก

ลาก OP

$$\therefore OB^2 = OP^2 + PB^2$$

บ.พ. 29

$$a^2 = OP^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

แทนค่า

$$\therefore OP^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore \text{รูปหกเหลี่ยม } ABCDEF \sim \text{รูป}$$

หกเหลี่ยม PQRSTU

$$\begin{aligned} \therefore \frac{ABCDEF}{PQRSTU} &= \frac{BC^2}{PQ^2} \\ &= \frac{a^2}{OP^2} \\ &= \frac{4}{3} \text{ ----- (1)} \end{aligned}$$

น.พ. 72

$$\therefore PQ=OP$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{PQRSTU}{\text{รูปที่ 3}} = \frac{4}{3} \text{ ----- (2)}$$

$$\frac{\text{รูปที่ 3}}{\text{รูปที่ 4}} = \frac{4}{3} \text{ ----- (3)}$$

$$\frac{\text{รูปที่ 4}}{\text{รูปที่ 5}} = \frac{4}{3} \text{ ----- (4)}$$

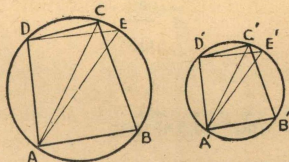
(1) × (2) × (3) × (4) จะได้

$$\text{รูปที่ 1} : \text{รูปที่ 5} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$$

ข้อ 9/295

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า อัตราส่วนของเนื้อที่ของรูปหลายเหลี่ยม

คล้ายต้องรูปที่วงกลมต่างล้อมได้ ย่อมเท่ากับ อัตรา
 ส่วนของจตุรคณณ์เส้นผ่าศูนย์กลาง ของ วงกลม ที่เขียน
 ล้อมรอบนั้น



กำหนดให้ $ABCD, A'B'C'D'$ เป็นรูปหลายเหลี่ยมคล้าย
 บรรจุอยู่ในวงกลม ที่มี $AE, A'E'$ เป็นเส้น
 ผ่านศูนย์กลาง

จะต้องพิสูจน์
$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AE^2}{A'E'^2}$$

พิสูจน์

$$\therefore ABCD \sim A'B'C'D'$$

โดยที่

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$$

บ.พ. 67

$$\therefore \hat{A}CD = \hat{A'C'D'}$$

$$\text{แต่ } \hat{A}CD = \hat{AED}$$

บ.พ. 39

$$\text{และ } \hat{A'C'D'} = \hat{A'E'D'}$$

บ.พ. 39

$$\therefore \triangle \hat{E}D = \triangle \hat{E}'D'$$

$$\triangle \hat{A}DE = \triangle \hat{A}'D'E'$$

$$\therefore \triangle \hat{E}AD = \triangle \hat{E}'A'D'$$

$\therefore \triangle^s ADE, A'D'E'$ เป็นสามเหลี่ยม

มุมเท่ากัน มุมต่อมุม

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{AE}{A'E'}$$

$$\therefore \frac{AD^2}{A'D'^2} = \frac{AE^2}{A'E'^2}$$

$$\text{แต่ } \frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{AD^2}{A'D'^2}$$

$$= \frac{AE^2}{A'E'^2}$$

ต่างเป็นมุม
ในครึ่งวงกลม

บ.พ. 62

ยกกำลังสอง

บ.พ. 73

แทนค่า

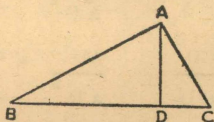
โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มี A เป็นมุมฉาก AD เป็น
เส้นตั้งฉากที่ลากจาก A มายัง BC จงพิสูจน์ว่า

ก. $BA^2 = BC \cdot BD$

ข. $AC^2 = CB \cdot CD$

และเพื่อให้พิสูจน์ความจริง ในบทพิสูจน์ 29 คือ
 $BC^2 = BA^2 + AC^2$ โดยอาศัยผลจากข้อ ก.

และ ข. ข้างบน



ถ้าเฉลย ก. และ ข. คบบทแทรกของบทพิสูจน์ 66

$$\begin{aligned}
 \therefore BC^2 &= BC \cdot BC \text{ (แยก BC ออกตัวเดียว)} \\
 &= BC (BD + DC) \\
 &= BC \cdot BD + BC \cdot CD \\
 &= BA^2 + AC^2
 \end{aligned}$$

แทนค่า ก.

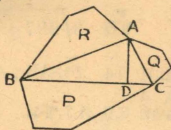
และ ข. ลง

ข้อ 2/297

โจทย์ จากรูปของบทพิสูจน์ที่ 74 ถ้า AD เป็นเส้นตั้งฉาก
กับฐาน BC และถ้ารูป $P = \triangle ABC$ จงพิสูจน์

ก. รูป Q = $\triangle ADC$

ข. รูป R = $\triangle ADB$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่แต่ในโจทย์
พิสูจน์ $\therefore$ รูป P $\propto$ รูป Q

$$\therefore \frac{\text{รูป P}}{\text{รูป Q}} = \frac{BC^2}{AC^2} \text{ ---- (1)}$$

น.พ. 73

แต่ $\triangle ABC \propto \triangle ADC$

น.พ. 66

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{BC^2}{AC^2} \text{ ---- (2)}$$

น.พ. 72

$$(1) = (2) \quad \frac{\text{รูป P}}{\text{รูป Q}} = \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC}$$

$$\text{แต่ รูป } P = \triangle ABC$$

$$\therefore \text{รูป } Q = \triangle ADC$$

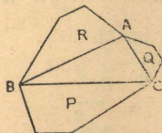
เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\text{รูป } R = \triangle ABD$$

โจทย์

ข้อ 3/297

โจทย์ จากรูปของ บ.พ. 74 ถ้า $AB:AC = 8:5$ และ
 รูป P มีพื้นที่ 8.9 ตร.ซ.ม. จงหาพื้นที่ของรูป Q
 และรูป R



กำหนดให้ และ จะต้องการหา

มีอยู่แล้วในโจทย์

$$\text{วิธีหา } \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{64}{25}$$

โจทย์

ยกกำลังสอง

$$\text{แต่ } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\text{รูป Q}}{\text{รูป R}} \quad \text{บ.พ. 73}$$

$$\therefore \frac{\text{รูป Q}}{\text{รูป R}} = \frac{64}{25}$$

$$\therefore \frac{\text{รูป Q} + \text{รูป R}}{\text{รูป R}} = \frac{89}{25} \quad \begin{array}{l} \text{เอา 1 บวก} \\ \text{ทั้งต้องข้าง} \end{array}$$

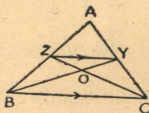
$$\text{แต่ } \text{รูป Q} + \text{รูป R} = \text{รูป P} \quad \text{บ.พ. 74}$$

$$\therefore \frac{\text{รูป P}}{\text{รูป R}} = \frac{89}{25}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } \text{รูป R} &= \frac{25}{89} \times 8.9 \text{ ค.ร.ท.ม} \\ &= 6.4 \quad \text{" " } \end{aligned}$$

ข้อ 4/297

โจทย์ BY, CZ เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC ตาก
YZ จงหาอัตราส่วนของ $\triangle BOC : \triangle YOZ$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มั้อยู่ในตัวในโจทย์

พิสูจน์ . . . Y และ Z เป็นจุดกึ่งกลาง

ของ AC, AB

. . . YZ ขนานและเท่ากับครึ่งหนึ่งของ BC

$$\therefore \hat{O}BC = \hat{O}YZ$$

$$\hat{O}CB = \hat{O}ZY$$

$$\hat{BOC} = \hat{YOZ}$$

. . . $\triangle^s BOC, YOZ$ เป็นสามเหลี่ยม

ที่มีมุมเท่ากัน มุมต่อมุม

. . . ด้านทั้งสาม ของ สามเหลี่ยมทั้งสอง
ย่อมได้ปฏิกภาคกัน

$$\therefore \triangle BOC \sim \triangle YOZ$$

$$\therefore \frac{\triangle BOC}{\triangle YOZ} = \frac{BC^2}{YZ^2}$$

$$= \frac{4}{1}$$

โจทย์

H&S 2/64

บ.พ.14

”

บ.พ. 3

บ.พ. 62

กฎ $\triangle^s$ คล้าย

บ.พ. 72

แทนค่า

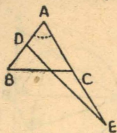
ข้อ 5/297

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้าน $AB=AC=3\text{''}$

จาก D ซึ่งเป็นจุดบน AB ตลากเส้นตรง DE ให้ตัด AC

ตัดออกไปที่จุด E ถ้าสามเหลี่ยม ADE มีเนื้อที่
เท่ากับสามเหลี่ยม ABC และถ้า $AD = 1.8''$ จงหา AE

วิธีหา $\therefore \triangle^s ABC, ADE$ มีมุม A เป็นมุมร่วม



$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

บ.พ. 71

$$\text{แต่ } \triangle ABC = \triangle ADE$$

โจทย

$$\therefore \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} = 1$$

$$\frac{3.6 \times 3.6}{1.8 \times AE} = 1$$

แทนค่า

$$AE = 7.2 \text{ นิ้ว}$$

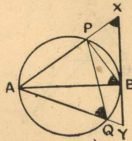
ข้อ 6/297

โจทย AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม ถ้าตัดออร์ต
AP, AQ ออกไปพบเส้นสัมผัส ณ จุด B ของวงกลมที่

X และ Y จงพิสูจน์

ก. $\triangle APQ \sim \triangle AXY$

ข. P, Q, Y, X วงกลมเดียวกันได้



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่ในตัวในโจทย์

พิสูจน์ ก. $\therefore \hat{ABP} = \hat{AQP}$ น.พ. 39

แต่ $\hat{ABP} + \hat{PBX} = 90^\circ$ น.พ. 46

$\therefore \hat{AQP} + \hat{PBX} = 90^\circ \text{ -- (1)}$

$\therefore \hat{APB} = 90^\circ$ น.พ. 41

แต่ $\hat{BPA} + \hat{BPX} = 2 \text{ ฏ}$ น.พ. 16

$\therefore \hat{BPX} = 1 \text{ ฏ}$

$\therefore \hat{X} + \hat{PBX} = 90^\circ \text{ ด้วย -- (2)}$

$\therefore \hat{X} = \hat{AQP}$ (1) = (2)

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\hat{Y} = \hat{APQ}$

$\therefore \hat{A}$ เป็นมุมรวม

$\therefore \triangle^s APQ, AXY$ เป็นสามเหลี่ยม
มุมมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$$\therefore \frac{AP}{AY} = \frac{AQ}{AX} = \frac{PQ}{XY}$$

บ.พ 62

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle AXY$$

กฎ $\triangle^s$ คล้าย

๑. $\therefore \hat{AQP} + \hat{PQY} = 2 \text{ ฏ }$

บ.พ. 1

แต่ $\hat{AQP} = \hat{X}$

พิสูจน์มาแล้ว

$$\therefore \hat{PQY} + \hat{X} = 2 \text{ ฏ ด้วย}$$

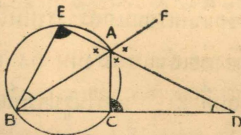
$$\therefore P, Q, Y, X \text{ วงกลมล้อมได้}$$

บทกลับ

บ.พ. 40

ข้อ 7/297

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม A ภายนอกตัดฐาน BC ต่อกออกไปที่ D และตัดวงกลมที่เขียนล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ E จงพิสูจน์
 $AB \cdot AC = AE \cdot AD$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มื่อยู่ในตัวใน โจทย์
พิสูจน์ ตาม BE

$$\begin{aligned}\hat{BAE} &= \hat{DAF} \\ &= \hat{CAD}\end{aligned}$$

บ.พ. 3

BD เป็นเส้น

แบ่งครึ่งมุม

$$\therefore \hat{ACD} + \hat{ACB} = 2 \text{ ฎ}$$

บ.พ. 1

$$\text{แต่ } \hat{E} + \hat{ACB} = 2 \text{ ฎ}$$

บ.พ. 40

$$\therefore \hat{E} = \hat{ACD}$$

บ.พ. 16

$$\therefore \text{มุมที่เหลื่อ } \hat{ABE} = \hat{D}$$

$\therefore \triangle^s ABE, ACD$ เป็นสามเหลี่ยม
ที่มีมุมเท่ากัน มุมต่อมุม

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

บ.พ. 62

$$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

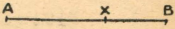
คูณทะแยง

ข้อสังเกต โจทย์ข้อนี้นักเรียนมักสร้างรูปไม่ได้ แต่พึงสังเกต
ว่า ต้องต่อเส้นแบ่งครึ่งมุม DA กลับไปทางซ้ายจึง
จะตัดวงกลมที่ E และในรูปจะเห็นว่า D กับ E อยู่
คนละข้างกับจุด A

ข้อ 8/297

โจทย์ เส้นตรง ที่ถูก แบ่งออก ตามอัตราส่วน คั่นอก และ คั่นใน
(Extreme & mean ratio) มีความหมายอย่างไร

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งยาว 10 ซม. ถูกแบ่งออก
ตามอัตราส่วนคั่นอกและคั่นใน จงหาความยาวของ
ส่วนที่ถูกแบ่งออก (ใช้ค่าใกล้เคียง) และให้ตรวจสอบ
ที่หาได้โดยการสร้างรูป

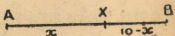
คำตอบตอนแรก ให้ AB เป็นเส้นตรง 

X เป็นจุดที่แบ่ง AB โดยทำให้ $AB : AX = AX : XB$
แล้ว X เรียกว่าเป็นจุดที่แบ่ง AB ออกตามอัตราส่วน
คั่นอกและคั่นใน หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งถูกแบ่งออกที่จุด ๆ หนึ่ง โดย
ทำให้อัตราส่วน ของความยาว ของเส้นตรงต่อส่วนแบ่ง
ใหญ่ เท่ากับอัตราส่วนของส่วนแบ่งใหญ่ต่อส่วนแบ่ง
เล็กแล้ว

เส้นตรงนั้นเรียกว่า ถูกแบ่งออกตามอัตราส่วน
คั่นอกและคั่นใน (Extreme & mean ratio)

ตอนที่ 2

กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงยาว 10 ซม. 

X เป็นจุดแบ่งบน AB โดยทำให้ $AB:AX = AX:XB$

จะต้องการหา ความยาวของ AX และ XB

วิธีหา ให้ $AX = x$

$$\therefore XB = (10 - x)$$

$$\therefore AB:AX = AX:XB$$

$$10:x = x:(10-x)$$

$$10(10-x) = x^2$$

$$x^2 + 10x - 100 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 400}}{2}$$

$$= -5 \pm 5\sqrt{5}$$

$$= 6.2, -16.2$$

$\therefore X$ เป็นจุดที่แบ่ง AB ภายใน

$\therefore$ คำนวณจึงคิดทั้งได้

$$\therefore AX = x = 6.2 \text{ ซม.}$$

$$XB = (10-x) = 3.8 \text{ ,,}$$

โดยที่

แทนค่า

คุณพระแยง

คิดค่าใกล้
เคียง

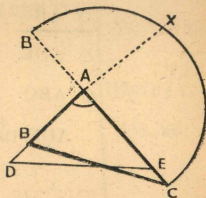
ข้อ 9/297

โจทย์ จงสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้มีเนื้อที่เท่ากับสามเหลี่ยม

ABC และมีมุมยอดเท่ากับมุม A

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม
มุม A เป็นมุมยอด

จากการสร้าง รูปสามเหลี่ยมให้มี
เนื้อที่เท่ากับสามเหลี่ยม ABC
และมีมุมยอดเท่ากับมุม A



วิธีสร้าง หา AX ซึ่งเป็นปฏิกาคส่วนกลาง

ระหว่าง AB กับ AC

บ.ด. 38

จาก AB, AC ตัดและต่อให้เหลือเพียง

AD, AE ให้ยาวเท่ากับ AX

แล้ว ADE จะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \triangle ABC, ADE$ มีมุมยอด A
รวมกัน

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

บ.พ. 71

ABC จาก E ตกเส้นขนานกับ BC
 แบ่งครึ่ง BD แดตกเส้นตั้งฉากชน
 ไปตัดเส้นขนานที่ F
 แล้ว BDF จะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 ที่ต้องการ

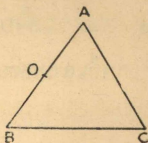
พิสูจน์ $\triangle ABC = \triangle BDE$ H&S 5/130
 แต่ $\triangle BDF = \triangle BDE$ บ.พ. 26
 $\therefore \triangle ABC = \triangle BDF$
 และ $\therefore BF = DF$ บ.พ. 14
 $\therefore BDF$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่
 ต้องการ

ข้อสังเกต สำหรับข้อ 10/297 ใน Key อังกฤษใช้สร้างโดย
 ใช้ความจริงของ บ.พ. 71 แต่รู้ดีกว่ายากและยุ่งไป
 โดยไม่จำเป็น ดูวิธีที่ง่าย ๆ และสะดวกดีกว่า

ข้อ 1/299

โจทย์ จงแบ่งรูปสามเหลี่ยม ABC ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน
ด้วยเส้นตรง XY ที่ลากขนานกับฐาน BC ไปตัด
ด้านอีกสองด้านที่เหลือที่จุด X และ Y จงหาค่าของ
 $AX : AB$

ก. โดยวิธีคำนวณ และ ข. โดยวิธีวัด



กำหนดให้ และ จะต้องการสร้าง มั้อยู่แล้วในโจทย์
วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง AB ที่ O หา AX ซึ่งเป็น บ.ต. 1

ปฏิกาลส่วนกลางระหว่าง AO และ AB

จาก X ลาก $XY \parallel BC$ แล้ว XY บ.ต. 38

จะแบ่ง $\triangle ABC$ ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ บทแทรก
กันตามต้องการ

พิสูจน์ $\therefore XY \parallel BC$

$$\therefore \triangle AXY \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$$

แต่ AX เป็นปฏิภาคส่วนของด้านระหว่าง

AO กับ AB

$$\therefore AX^2 = AO \cdot AB$$

$$\therefore \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AO \cdot AB}{AB^2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore XY$ เป็นเส้นที่ลากขนานกันและแบ่งครึ่ง $\triangle ABC$ ตามต้องการ

สร้าง

ร.ย. หน้า 62

บ.พ. 72

สร้าง

กฎปฏิภาค

ส่วนของด้าน

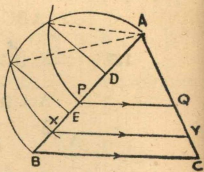
แทนค่า

ข้อ 2/299

โจทย์ จงแบ่งด้านเหลี่ยม ABC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน
ด้วยเส้นตรง PQ และ XY ซึ่งลากขนานกับฐาน BC
ถ้า P และ X เป็นจุดอยู่บน AB จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{AP}{1} = \frac{AX}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

และแล้ว ให้แสดงถึง วิธีแบ่ง รูปสามเหลี่ยม ออก
เป็น n ส่วนเท่า ๆ กันด้วยเส้นตรงที่ลากขนานกับด้าน
ใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม
กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
จะต้องการ ก. แบ่ง $\triangle ABC$ ออก
หนึ่งเป็น สามส่วนเท่า ๆ กัน
ด้วยเส้นตรง PQ และ XY
ซึ่งลากขนานกับ BC



$$\text{ข. พิสูจน์ } \frac{AP}{1} = \frac{AX}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

ค. ลาก เส้นขนานกับ BC ให้แบ่ง $\triangle ABC$

ออกเป็น n รูปเท่า ๆ กัน

ก. วิธีสร้าง แบ่ง AB ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ

กันที่จุด D และ E

บ.ศ. 7

หา AP ซึ่งเป็นปฏิภาคส่วนของกลางระหว่าง
 AD และ AB

ด.ป. 38

หา AX ซึ่งเป็นปฏิภาคส่วนของกลางระหว่าง
 AE และ AB

ด.ป. 38

จาก P และ X ตาก PQ, XY // BC

แต่ PQ และ XY จะแบ่ง $\triangle ABC$

ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

พิสูจน์ $\therefore AP, AX$ เป็นภาคกลาง

ระหว่าง AD, AB และ AE, AB

$$\therefore AP^2 = AD \cdot AB$$

$$\text{และ } AX^2 = AE \cdot AB$$

$$\therefore PQ // BC$$

$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP^2}{AB^2}$$

$$= \frac{AD \cdot AB}{AB^2}$$

$$= \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

เช่นเดียวกันหาพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{2}{3}$$

สร้าง

กฎภาค

ส่วนกลาง

สร้าง

ร.ย.หน้า 62

ป.พ. 73

$\therefore PQ, XY$ เป็นเส้นขนานที่แบ่ง

$\triangle ABC$ ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน

ข. วิธีพิสูจน์ $\therefore \frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP^2}{AB^2} = \frac{1}{3}$

บ.พ. 73

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ถอดราก

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ถอดราก

$$\therefore AP:AE:AB = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$$

$$\text{หรือ } \frac{AP}{1} = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

ค. วิธีสร้าง วิธีแบ่งสามเหลี่ยม ABC ออก

เป็น n ส่วนเท่าๆ กันก็อาจทำได้แบบเดียวกับข้อ ก. คือ

1. แบ่ง AB ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน
2. หาปฏิภาคส่วนของกลางระหว่าง 1 ส่วนกับ n ส่วนบน AB , 2 ส่วนกับ n ส่วน

บน AB ----- ตามข้อ ก. เราย้าย
ไปจนครบ $(n-1)$ ครั้ง

บ.ด. 38

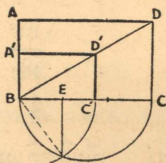
3. จากจุดแบ่งฉากเส้นขนานกับ BC แล้ว
เส้นขนานเหล่านี้จะแบ่ง $\triangle ABC$ ออก
เป็น n ส่วนเท่าๆ กันตามต้องการ

ข้อ 3/299

โจทย์ จงสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งให้มีด้านยาว 8 ซม. และ
5 ซม. และแล้วให้สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากให้คล้าย
และมีเนื้อที่เป็นหนึ่งในสามของสี่เหลี่ยมนี้

จงวัด ความยาว ของด้าน ของรูป สี่เหลี่ยม ที่สร้าง
ออกมาเป็นมิลลิเมตร (คิดค่าโกดเคียง) และให้ตรวจ
ผลที่ได้โดยวิธีคำนวณ

กำหนดให้ และ จะต้องการสร้าง มีอยู่แล้วในโจทย์



วิธีสร้าง ดาถ BD

แบ่ง BC ออกเป็นสามส่วนเท่าๆกัน บ.ด. 7

$$\text{ให้ } BE = \frac{1}{3} BC$$

หา BC' ซึ่งเป็นปฏิภาคส่วนของกลางระหว่าง

BE และ BC

บ.ด. 38

บน BC สร้างสี่เหลี่ยม BC'D'A'

ให้คล้ายกับสี่เหลี่ยม ABCD

บ.ด. 39

แล้ว BC'D'A' จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่
ต้องการ

พิสูจน์ $\frac{A'BC'D'}{ABCD} = \frac{BC'^2}{BC^2}$

บ.พ. 73

แต่ $BC'^2 = BE \cdot BC$

ปฏิภาคส่วนของ

$$\therefore \frac{A'BC'D'}{ABCD} = \frac{BE \cdot BC}{BC^2}$$

กลาง

แทนค่า

$$= \frac{BE}{BC}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\therefore A'BC'D'$ เป็นสี่เหลี่ยมที่ต้องการ

ถ้าวัดดูจะได้ ด้านยาว = 4.6 ด้าน

กว้าง = 2.9

$$\text{วิธีคำนวณ } \frac{A'BC'D'}{ABCD} = \frac{BC'^2}{BC^2} = \frac{1}{3}$$

สร้าง

$$\therefore BC'^2 = \frac{64}{3}$$

แทนค่า

$$\therefore BC' = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$= 4.61$$

$$\text{เช่นเดียวกัน } \frac{C'D'^2}{CD^2} = \frac{1}{3}$$

สร้าง

$$\therefore C'D'^2 = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

แทนค่า

$$= 2.85$$

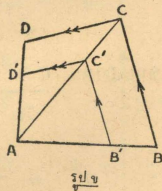
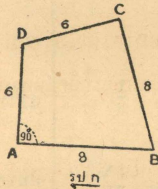
ข้อ 4/299

โจทย์ จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD จากสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\angle A = 90^\circ$, $AB = BC = 8$ ซม. $AD = DC = 6$ ซม.

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ให้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ABCD และให้มีเนื้อที่ 36 ตร.ซม. จงหาความยาว (คิดค่าใกล้เคียง) ของด้านที่สัมผัสกับ AB ออกมาเป็นมิติเมตรด้วย

กำหนดให้ และ จะต้องการสร้าง มีอยู่ตัวในโจทย์



วิธีสร้างสี่เหลี่ยม ABCD

สร้างมุม ๆ หนึ่ง (มุม A) ให้กาง 90° จากแขนของมุมขีดเอาแต่เพียง AB, AD ให้ยาว 8 และ 6 ซม. ตามลำดับ

เอา B และ D เป็นจุดศูนย์กลางวงรัศมี 8 และ 6 ซม. เขียนส่วนโค้งตัดกันที่ C

DC

แล้ว ABCD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ตาม

ต้องการ (รูป ก)

รูป

วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมให้คล้ายกับ ABCD

ชน.

วิธีแยก ให้ ABCD เป็นรูปหลายเหลี่ยมคล้ายซึ่งมี 36 ตร.

AB

ชน.

$$\therefore \frac{ABCD}{36} = \frac{AB^2}{AB'^2} \quad (\text{บ.พ. 74})$$

ถ้าลากเส้นทะแยงมุม BD จะเห็นว่าสามเหลี่ยม ABD และ BCD เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน

$$\therefore \triangle ABD = \triangle BCD \quad (\text{บ.พ. 7})$$

จาก

ละ 6

$$\begin{aligned} \therefore \text{พท. } ABCD &= 2 \triangle ABD \\ &= \frac{2 \times 6 \times 8}{2} \quad \text{ค.ร.ชน.} \\ &= 48. \quad \text{,, ,,} \end{aligned}$$

3 ซม.

$$\therefore \frac{48}{36} = \frac{64}{AB'^2} \quad (\text{แทนค่า})$$

$$\therefore AB' = 4\sqrt{3} = 6 \text{ ซม. } 9 \text{ มม.}$$

วิธีสร้าง จาก AB ตัดเอาแต่เพียง AB' ให้ยาว $4\sqrt{3}$ แล้ว
 ดำเนินการสร้างตามบทสร้างที่ 39 จะได้รูปสี่เหลี่ยม
 AB'C'D' คล้ายกับ ABCD ตามต้องการ ดังรูป ข

พิสูจน์	$\therefore$	ABCD	∞	AB'C'D'	สร้าง
	$\therefore$	$\frac{ABCD}{AB'C'D'}$	$=$	$\frac{AB^2}{AB'^2}$	บ.พ. 73
		$\frac{48}{AB'C'D'}$	$=$	$\frac{64}{48}$	แทนค่า
	$\therefore$	AB'C'D'	$=$	$\frac{48 \times 48}{64}$ ต.ร.ช.น.	
			$=$	36 " "	

ข้อ 5/299

โจทย์ วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 3" จงสร้างวงกลมอีกสอง
 วงภายใน ให้มีเนื้อที่ระหว่างวงกลมทั้งสามวงเท่ากัน

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง

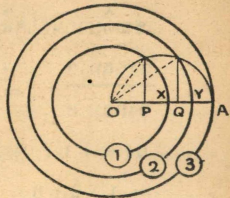
ของวงกลม OB = 3

เป็นรัศมี

จะต้องการสร้าง วงกลมอีก

ต้องวงภายในให้มีเนื้อ

ระหว่างวงกลมเท่ากัน



วิธีสร้าง แบ่ง OB ออกเป็นสามส่วนที่ P และ Q บ.ด. 7

หา OX ซึ่งเป็นปฏิภาคส่วนของวงกลมระหว่าง บ.ด. 38

OP และ OA หา OY ซึ่งเป็นปฏิภาคส่วนของ , "

วงกลมระหว่าง OQ และ OA แล้ว OX,

OY จะเป็นรัศมีของวงกลมอีกต้องวง

ตามต้องการ

พิสูจน์	$\frac{\text{วงกลม 1}}{\text{วงกลม 3}} = \frac{\pi OX^2}{\pi OA^2} = \frac{OX^2}{OA^2}$	น.ท. ของ
	$\text{แต่ } OX^2 = OP \cdot OB$	วงกลม
	$\therefore \frac{\text{วงกลม 1}}{\text{วงกลม 3}} = \frac{OP \cdot OA}{OA^2} = \frac{1}{3}$	OX = ปฏิภาค
		ส่วนของ
		แทนค่า

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\text{วงกลม 2}}{\text{วงกลม 3}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{วงกลม 1} : \text{วงกลม 2} : \text{วงกลม 3} \\ = 1 : 2 : 3$$

$\therefore$ เนื้อที่ระหว่างวงกลมทั้งสามจึงเท่ากัน

ข้อ 1/301

โจทย์ ใช้จุด $(1, 7, 0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมให้
สัมผัส OY ที่ O และให้ตัด OX ที่ A ถ้าเส้นตรง
ที่ลากจาก A ตัด OY ที่ Q และตัดเส้นรอบวงของ
วงกลมที่ P

จงพิสูจน์ $AP \cdot AQ$ มีค่าคงที่
และจงหาค่าของ $AP \cdot AQ$ เมื่อเขียนรูปใช้มาตราส่วน
1" ต่อ 1 หน่วย

ข้อสังเกต สำหรับการสร้างรูปให้นักเรียนลองปรึกษาครู ผู้สอน
และหัดเขียนเอง เพราะหากจะนำมาวาดให้ละเอียด
ในทันทีจะยืดยาวเกินไป

วิธีพิสูจน์ ลาก OP

$\therefore \angle OPA$	$=$	1 L	บ.พ. 41
$\therefore \angle OPQ$	$=$	1 L	บ.พ. 2
$\therefore$ วงกลมสัมผัส $\triangle OPQ$ ได้			{ บทแทรก
$\therefore AP \cdot AQ$	$=$	AO^2	{ บ.พ. 75
แต่ AO	$=$	$3 \cdot 4$ มีค่าคงที่	โจทย์

∴ AP·AQ มีค่าคงที่ด้วย

ถ้าใช้มาตราส่วน 1" = 1 หน่วย

$$\begin{aligned}\therefore AP \cdot AQ &= (3.4)^2 \\ &= 11.56 \text{ ตร. นิ้ว}\end{aligned}$$

ข้อ 2/301

โจทย์ ให้ C (5,6) เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 10 เขียนวงกลม
ถ้า TT' เป็นเส้นต่อจุดสัมผัสของเส้นสัมผัสของเส้น ที่
ลากจาก P (29, 16) มายังวงกลม และถ้า PC,
TT' ตัดกันที่ Q จงหาค่าของ

ก. CQ·CP ข. PQ·CP ค. ความยาวของ TT'

วิธีหา ก. ลาก CT

$$\therefore T\hat{Q}P = 1\text{L.ด}$$

(H&S7/177)

∴ วงกลมสัมผัส $\triangle TQP$ ได้

บ.พ. 41

$$\therefore CQ \cdot CP = CT^2$$

บทแทรกบ.พ.66

$$= 100$$

แทนค่า

$$\text{ข. } \therefore T\hat{Q}P = 1\text{L.ด}$$

พิสูจน์มาแล้ว

$$\therefore T\hat{Q}C = 1\text{L.ด}$$

บ.พ. 2

∴ วงกลมสัมผัส $\triangle CQT$ ได้

$$\begin{aligned}\therefore PQ \cdot PC &= PT^2 \\ &= CP^2 - 10^2\end{aligned}$$

บทแทรกบ.พ.66

บ.พ. 29

ในขั้นต่อไปต้องหา CP จาก C และ P ดัง

$$CL, PM \perp \text{แกน } x \text{ ดัง } CN \perp PM$$

$$\therefore CP^2 = CN^2 + PN^2$$

บ.พ. 29

$$= (24)^2 + 10^2$$

แทนค่า

$$\therefore PQ \cdot PC = CP^2 - 10^2$$

พิสูจน์มาแล้ว

$$= (24)^2 + 10^2 - 10^2$$

แทนค่า

$$= 576$$

$$\text{ก. เหนือ } \triangle PTC = \frac{1}{2} \text{ ฐาน } \times \text{ สูง}$$

$$= \frac{1}{2} CT \cdot TP \dots (1)$$

คิด TP เป็นฐาน

$$= \frac{1}{2} CP \cdot TQ \dots (2)$$

" CP "

$$\therefore CT \cdot TP = CP \cdot TQ \dots (3) \quad (1) = (2)$$

$$\text{แต่ } CT = 10$$

โจทย์

$$\therefore PT^2 = PQ \cdot PC = 576$$

ข้อ 1.

$$\therefore PT = 24$$

$$CP^2 = 24^2 + 10^2$$

ข้อ 1.

$$= 676$$

$$\therefore CP = 26$$

แทนค่าที่ขีดเส้นใต้ลงใน (3) จะได้

$$10 \times 24 = 26 TQ$$

$$\therefore TQ = 9.23$$

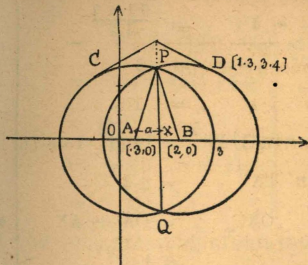
$$\therefore TT' = 2 TQ$$

$$= 18.46$$

ข้อ 3/301

โจทย์ ใช้จุด $(-3, 0)$ $(2, 0)$ เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี 2.6 และ 2.5 หน่วยตามลำดับ เขียนวงกลม จงหาคำแหน่ง (Coordinates) ของจุดตัดของวงกลมทั้งสองวงนี้ และให้หาความยาวของคอร์ดร่วมด้วย และแล้วให้หาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $(1.3, 3.4)$ มายังวงกลม จงตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้โดยวิธีคำนวณและวิธีวัด

คำตอบ ให้ A และ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวง ให้ P และ Q เป็นจุดตัดของวงกลมทั้งสอง ลาก PQ ให้ตัด AB ที่ X ตามตัวอย่าง 3 หน้า 143 ใน H&S เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $PX = XQ$ และ $\angle PXA = 90^\circ$



วิธีหาตำแหน่งของ P และ Q

จาก AP, PB

$$\text{ให้ } AX = a \therefore BX = (1.7 - a)$$

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก APX,

$$PX^2 = AP^2 - AX^2$$

ป.พ. 29

$$\therefore PX^2 = (2.6)^2 - a^2 \dots\dots (1)$$

เช่นเดียวกันในสามเหลี่ยมมุมฉาก BPX

$$PX^2 = (2.5)^2 - (1.7 - a)^2 \dots\dots (2)$$

ป.พ. 29

$$\therefore (2.6)^2 - a^2 = (2.5)^2 - (1.7 - a)^2$$

(1) = (2)

$$a^2 - (1.7 - a)^2 = (2.6)^2 - (2.5)^2$$

$$(a + 1.7 - a)(a - 1.7 + a) = (2.6 + 2.5)(2.6 - 2.5) \text{ ตามกฎพีชคณิต}$$

$$2a - 1.7 = \frac{5.1 \times .1}{1.7}$$

$$= .3$$

$$a = 1$$

$$\therefore \text{จาก (1) } PX^2 = (2.6)^2 - 1 = 5.76 \quad \text{แทนค่า}$$

$$\text{หรือ } PX = 2.4$$

$$OX = OA + AX \quad \text{ตรวจ}$$

$$= 1.3$$

$$\therefore \text{ตำแหน่งของจุด P เป็น (1.3, 2.4)}$$

$$\therefore Q \text{ อยู่ตรงกัน P}$$

$$\therefore \text{ตำแหน่งของ Q เป็น (1.3, -2.4)}$$

วิธีหาความยาวของคอร์ด PQ

$$PQ = 2 PX$$

$$= 4.8$$

ตรวจ

แทนค่า PX

วิธีหาความยาวของเส้นสัมผัส

ให้ T (1.3, 3.4) เป็นจุดภายนอก

TC, TD เป็นเส้นสัมผัสที่ลากจาก T

มายังวงกลม (A) และ (B)

$$\therefore TC^2 = TP \cdot TQ = TD^2$$

บทแทรก ๒. พ. 75

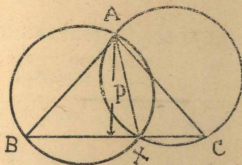
$$\begin{aligned}
 &= (TX-PX)(TP+PQ) \quad \text{ดวป} \\
 &= (3.4-2.4)(1+4.8) \quad \text{,,} \\
 &= 5.8 \\
 \therefore TC &= \sqrt{5.8} = 2.41 \\
 &= TD
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เพราะข้อนี้เกรงจะยุ่งถ้าหวั่นกเรียนมากจึงเขียน
รูปให้ดู

H&S หน้า 305

ข้อ 1/305

โจทย์ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว X เป็นจุดบนด้าน BC
หรือบน BC ต่่อออกไป จงพิสูจน์ว่าวงกลมที่เขียน
ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABX, ACX จะต้องมีเนื้อที่เท่า
กัน



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่แต่ในโจทย์
พิสูจน์ ให้ R_1 และ R_2 เป็นรัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ

รูปสามเหลี่ยม ABX, ACX ตามลำดับ

ให้ p เป็นระยะตั้งฉากจาก A มายัง BC

$$\therefore AB \cdot AX = 2p \cdot R_1$$

$$\text{และ } AC \cdot AX = 2p \cdot R_2$$

$$\text{แต่ } AB \cdot AX = AC \cdot AX$$

บ.พ. 77

" "

$$AB = AC$$

$$\therefore 2p R_1 = 2p R_2$$

$$\therefore R_1 = R_2$$

นั่นคือวงกลมที่เขียน ล้อมรอบ รูปสาม
เหลี่ยม ABX, ACX จะต้องมโนอก
เท่ากัน

ช.ต.พ.

ข้อ 2/305

โจทย์ ที่ B และ C ซึ่งเป็นจุดปลายของด้านฐานของรูป
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ตากเส้นตรง BD, CD ให้ตั้ง
ฉากกับ AB, AC ตามลำดับ ถ้าเส้นตั้งฉากทั้งสองนี้
ตัดกันที่ D จงพิสูจน์

$$BC \cdot AD = 2 AB \cdot DB$$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มียู่แล้วในโจทย์
พิสูจน์ (ดูรูปในหนังสือ "เรขาคณิตมูลฐาน เล่ม 2")

ใน $\triangle ABD, ACD$

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ AD \text{ ด้านร่วม} \\ \hat{A}BD = \hat{A}CD \end{cases}$$

โจทย์

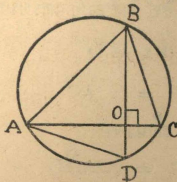
ต่างเท่ากับ L น

$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$	บ.พ. 18
$\therefore BD = CD$	
และ $\therefore \hat{A}BD + \hat{A}CD = 2\angle D$	โจทย์
$\therefore A, B, D, C$ วงกลมตัดกันได้	
$\therefore BC \cdot AD = AB \cdot CD + AC \cdot BD$	บ.พ. 78
$= 2AB \cdot BD$	$\therefore AB = AC$
	และ $BD = CD$

ช.ต.พ.

ข้อ 3/305

โจทย์ ถ้าเส้นตรงแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่บรรจุอยู่ภายในวงกลมตัดกันฉากกัน ผลบวกของดีเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากผลคูณของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมย่อมใหญ่เป็นสองเท่าของเนื้อที่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้น



กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าบรรจุน้อยภายใน
วงกลม และให้เส้นทแยงมุม AC, BD ตัดกัน
และตัดกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = 2 \square ABCD$

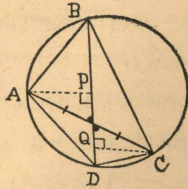
$$\begin{array}{lcl}
 \text{พิสูจน์ } \therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD & \text{น.พ. 78} & \\
 & = (AO + OC) \cdot BD & \\
 & = AO \cdot BD + CO \cdot BD & \\
 & = 2\triangle ABD + 2\triangle BCD & \text{น.ท. } \triangle = \frac{1}{2} \\
 & & \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\
 & = 2(\triangle ABD + \triangle BCD) & \\
 & = 2\square ABCD &
 \end{array}$$

ช.ต.พ.

ข้อ 4/305

โจทย์ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าบรรจุน้อยภายในวงกลม
ถ้าเส้นทแยงมุม BD ผ่านจุดกึ่งกลางของ AC
จงพิสูจน์ $AD \cdot AB = DC \cdot CB$

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มัธยมในโจทย์



สร้าง จาก A และ C ตาก AP, CQ ให้ตั้งฉากกับ BD
พิสูจน์ ให้ AC, BD ตัดกันที่ E

ใน $\triangle^s AEP, CEQ$

$$\therefore \begin{cases} \hat{A}PE &= \hat{C}QE \\ \hat{A}EP &= \hat{C}EQ \\ AE &= EC \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{มุมฉาก} \\ \text{บ.พ. 3} \\ \text{โจทย์} \end{array}$$

$$\therefore \triangle AEP = \triangle CEQ \quad \text{บ.พ. 17}$$

$$\therefore AP = CQ$$

$$\text{ใน } \triangle ABD, AD \cdot AB = AP \times \text{เส้นผ่าศูนย์กลาง} \quad \text{บ.พ. 77}$$

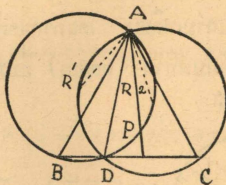
$$\text{ใน } \triangle BCD, DC \cdot CB = CQ \times \text{เส้นผ่าศูนย์กลาง} \quad \text{บ.พ. 77}$$

$$\text{แต่ } AP = CQ \quad \text{พิสูจน์มาแล้ว}$$

$$\therefore AD \cdot AB = DC \cdot CB$$

ข้อ 5/305

โจทย์ จากจุดยอด A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ถากเส้นตรง
มายังด้านฐานจึงพิสูจน์ว่าอัตราส่วนของรัศมีของวงกลม
ที่เขียนล้อมรอบ รูปสามเหลี่ยม ทั้งสอง ที่ถูกแบ่ง ออก
ย่อมเท่ากับอัตราส่วนของ AB และ AC



กำหนดให้ AD เป็นเส้นตรงที่ลากจากมุมยอด A มายังฐาน BC
ให้ R_1 R_2 เป็นรัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ
รูปสามเหลี่ยม ABD, ACD ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{AC}$

พิสูจน์ ให้ p เป็นระยะตั้งฉากจาก A มายัง BC

ใน $\triangle ABD$, $AB \cdot AD = 2R_1 \cdot p$(1) บ.พ. 77

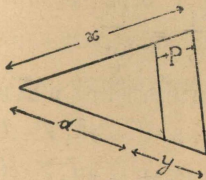
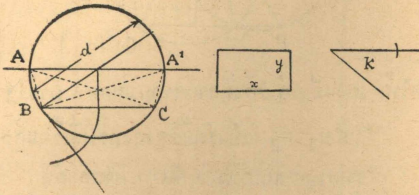
ใน $\triangle ACD$, $AC \cdot AD = 2R_2 \cdot p$(2) " "

$$(1) \div (2) \frac{AB}{AC} = \frac{R_1}{R_2}$$

ช.ต.พ.

ข้อ 6/305

โจทย์ จงสร้างรูปตามเหลี่ยม โดยกำหนดด้านฐาน มุมยอด
และตั้งเหลี่ยมมุมฉาก (ผลคูณ) ที่ประกอบด้วยด้านอีก
สองด้านให้



กำหนดให้ BC เป็นด้านฐาน K เป็นมุม ๆ หนึ่ง xy เป็น
 ดัชนีมุมฉาก

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$ ให้มุม A กว้าง K

$$\text{และให้ } AB \cdot AC = xy$$

วิธีสร้าง บน BC สร้างเส้นตั้งฉากให้มุม

เท่ากับ $\angle K$

ป.ด. 24

วัดเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม สัมผัส
 ภายนอก d

$$\therefore AB \cdot AC = d \times \text{ระยะตั้งฉากจาก } A$$

มายัง BC ป.พ. 77

$$\therefore xy = d \times \text{ " } \quad \text{ใจทย์}$$

$$\text{หรือ } \frac{d}{y} = \frac{x}{\text{ระยะตั้งฉาก}}$$

หา p ซึ่งเป็นจำนวนที่สี่ของปฏิภาค

ของ d, y และ x

ป.ด. 35

แล้ว p จะเป็นความยาวของเส้นตั้งฉาก
 ที่ต้องการ

ลากเส้นขนานให้ห่างจาก BC เป็นระยะ

ทาง p ให้ตัดวงกลมที่ A และ A'
แล้ว $ABC, A'BC$ จะเป็นรูปสามเหลี่ยม
ที่ของการ

พิสูจน์ $\therefore AB.AC = p.d$

บ.พ. 77

แต่ $\frac{d}{y} = \frac{x}{p}$

สร้าง

$\therefore p.d = xy$

คูณทะแยง

$\therefore AB.AC = x.y$

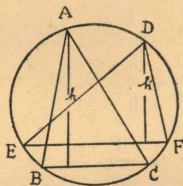
$\therefore ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ของการ
สำหรับ $\triangle A'BC$ ก็อาจพิสูจน์ได้ใน
ทำนองเดียวกัน

ช.ต.ส.

ข้อ 7/305

โจทย์ รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีเนื้อที่เท่ากัน บรรจุอยู่ภายใน
วงกลมเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า อัตราส่วนของผลคูณ
ของด้านตั้งด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่ง ต่อผลคูณ
ของด้านตั้งด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง ย่อมเท่า

อัตราส่วนของด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง ต่อ
ด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่ง .



กำหนดให้ ABC, DEF เป็นสามเหลี่ยมสองรูปมีเนื้อที่เท่ากัน
และบรรจุอยู่ในวงกลมเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ $\frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF} = \frac{EF}{BC}$

พิสูจน์ $\triangle ABC = \frac{h}{2} \times BC$

$\triangle DEF = \frac{h'}{2} \times EF$

$\therefore \frac{h}{2} \cdot BC = \frac{h'}{2} \times EF$

$\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

” ”

$\therefore \triangle ABC =$
 $\triangle DEF$

$$\frac{h'}{h} = \frac{EF}{BC} \dots (1)$$

แต่ $AB \cdot AC = h \times \text{เส้นผ่าศูนย์กลาง}$ บ.พ. 77

และ $DE \cdot DF = h' \times \quad \quad \quad "$

$$\therefore \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF} = \frac{h}{h'}$$

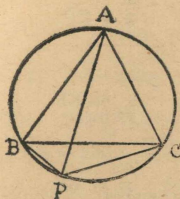
$$= \frac{EF}{BC}$$

หารกัน

แทนค่า

ข้อ 8/305

โจทย์ P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนนอกรัศ BC ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม คือ PA, PB, PC จงพิสูจน์
 $PB + PC = PA$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่แต่ในใจ

พิสูจน์ $\therefore$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

บรรจุภายในวงกลม

$$\therefore PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$$

บ.พ. 78

$$\text{แต่ } BC = AC = AB$$

ด้านของ $\triangle$

$$\therefore PA = PB + PC$$

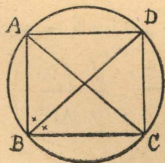
ด้านเท่า

ช.ต.พ.

ข้อ 9/305

โจทย์ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่บรรจุอยู่ในวงกลม มี BD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ABC ที่ A และ C เป็นจุดกึ่งที่ และ B เป็นจุดที่เคลื่อนที่ได้บนวงกลม จงพิสูจน์ว่า

$$AB + BC : BD \text{ มีค่าคงที่}$$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ ม้อยู่แต่ในใจ

พิสูจน์ $\therefore \widehat{ABD} = \widehat{CBD}$

$$\widehat{AD} = \widehat{CD}$$

และ $\therefore A$ และ C คงที่

$\therefore D$ คงที่ด้วย และ

$\therefore A$ คงที่

$\therefore$ อาร์ค AD ต้องคงที่ด้วย

$\therefore ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

บรรจุภายในวงกลม

$$\therefore AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$= AC \cdot BD$$

$$\text{หรือ } AB \cdot AD + BC \cdot AD$$

$$= AC \cdot BD$$

$$\therefore (AB + BC) AD = AC \cdot BD$$

$$\text{หรือ } \frac{AB + BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\text{แต่ } \frac{AC}{AD} \text{ คงที่}$$

โจทย์

บ.พ. 42

โจทย์

บ.พ. 78

$$\therefore AD = CD$$

คณฺทะแยง

พิสูจน์มาแล้ว

$$\therefore \frac{AB + BC}{BD} \text{ คงที่ด้วย}$$



ช.ต.พ.

ข้อ 10/305

โจทย์ จากกฎ $R = \frac{abc}{4\Delta}$ [ดูกฎท้าย บ.พ. 77] จงหาความยาวของ R เมื่อกำหนดให้ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ

ก. $21''$, $20''$, $13''$ ข. $30'$, $25'$, $11'$

จงร่างรูปสามเหลี่ยม โดยใช้มาตราส่วนให้เหมาะสม และให้ตรวจสอบที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีวัด

$$\begin{aligned} \text{วิธีคำนวณ ก. } \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ s &= \frac{21+20+13}{2} = 27 \text{ นิ้ว} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \sqrt{27 \times 6 \times 7 \times 14} \\ &= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 7 \times 7 \times 2} \\ &= (3 \times 3 \times 2 \times 7) \end{aligned}$$

$$\therefore R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{21 \times 20 \times 13}{4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 7} \text{ นิ้ว}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \times 7 \times 4 \times 5 \times 13}{4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 7} && " \\
 &= \frac{65}{6} && " \\
 &= 10\frac{5}{6} && "
 \end{aligned}$$

ข. อาจคำนวณได้แบบเดียวกับข้อ ก. จะได้

$$R = 15\frac{5}{8} \text{ ฟุต}$$

สำหรับการสร้างรูปและวัดรัศมีนั้นง่ายมาก จะขอทิ้งไว้
ให้เป็นหน้าที่ของนักเรียนเอง

H&S หน้า 306

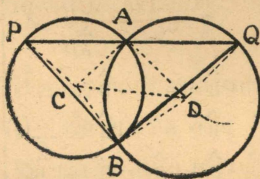
แบบฝึกหัดระคนภาคทฤษฎี

ข้อ 1/306

โจทย์ วงกลมสองวงมี C และ D เป็นจุดศูนย์กลางตัดกันที่จุด A
 และ B ถ้าเส้นตรง PAQ ให้ผ่านจุด A ไปตัดเส้น
 รอบวงของวงกลมทั้งสองที่ P และ Q จงพิสูจน์

$$\text{ก. } \widehat{PBQ} = \widehat{CAD}$$

$$\text{ข. } \widehat{BPC} = \widehat{BQD}$$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่แล้วในโจทย์
 พิสูจน์ ก. ใน $\triangle CAD, CBD$

$$\therefore \begin{cases} AC = BC \\ AD = BD \\ CD \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

รัศมี
 "

$$\therefore \triangle CAD = \triangle CBD$$

บ.พ. 7

$$\therefore \hat{ACD} = \hat{BCD}$$

$$\text{หรือ } \hat{ACD} = \frac{1}{2} \hat{ACB}$$

$$\text{แต่ } \hat{ACB} = 2 \hat{P}$$

บ.พ. 38

$$\therefore \hat{ACD} = \hat{P} \dots\dots (1)$$

แทนค่า

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\hat{ADC} = \hat{Q} \dots\dots (2)$$

$$\therefore \hat{PBQ} = 180^\circ - \hat{P} - \hat{Q}$$

บ.พ. 16

$$= 180^\circ - \hat{ACD} - \hat{ADC}$$

แทนค่า (1)

$$= \hat{CAD}$$

และ (2)

$$\text{ข. } \therefore \hat{CBD} = \hat{PBQ} \dots\dots (3)$$

ข้อ ก.

$$\text{และ } \therefore \hat{PBD} = \hat{PBD} \dots\dots (4)$$

$$\therefore \hat{PBD} - \hat{CBD} = \hat{PBD} - \hat{PBQ} \quad (4) - (3)$$

$$\therefore \hat{PBC} = \hat{DBQ}$$

$$\text{แต่ } \hat{PBC} = \hat{BPC}$$

$$\therefore PC = CB$$

$$\text{และ } \hat{DBQ} = \hat{PQD}$$

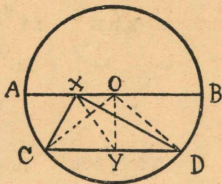
$$\therefore DB = DQ$$

$$\therefore \hat{BPC} = \hat{BQD}$$

ข้อ 2/306

โจทย์ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม CD เป็นคอร์ดที่
 ตากขนานกับ AB ถ้าจาก X ซึ่งเป็นจุดบน AB ตาก
 เส้นตรงไปยังจุด C และ D จงพิสูจน์

$$XC^2 + XD^2 = XA^2 + XB^2$$



กำหนดให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มี O เป็นจุด
 ศูนย์กลาง X เป็นจุดบน AB

จะต้องพิสูจน์ $XC^2 + XD^2 = XA^2 + XB^2$

สร้าง ให้ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ CD

ลาก CO, OD, OY, XY

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์ } XA^2 + XB^2 &= (AO - OX)^2 + \left. \begin{array}{l} (AO + OX)^2 \\ \text{คูณ} \end{array} \right| \\
 &= AO^2 - 2AO \cdot OX + OX^2 + AO^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{กระจายออก} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2AO.OX + OX^2 \\
 & = 2(AO^2 + OX^2) \\
 & = 2(AO^2 - OY^2 + OX^2 + OY^2) \quad \text{เอา } OY^2 \text{ บวก} \\
 & \text{แต่ } AO^2 - OY^2 = OC^2 - OY^2 = CY^2 \quad \text{เข้าและลบออก} \\
 \therefore XA^2 + XB^2 & = 2(CY^2 + OX^2 + OY^2) \quad \text{บ.พ. 29} \\
 & = 2(CY^2 + XY^2) \\
 & = XC^2 + XD^2 \quad \text{บ.พ. 56}
 \end{aligned}$$

ช.ต.พ.

ข้อ 3/306

โจทย์ ถ้าคอร์ดตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่บรรจุภายในวงกลมออกไปพบกันภายนอก จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกทั้งสองต้องตั้งฉากกัน

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าบรรจุภายในวงกลม ให้ด้าน AB, DC ต่อกออกไปพบกันที่ E, AD, BC ต่อกออกไปพบกันที่ F และให้เส้นแบ่งครึ่งมุม E และ F ตัดกันที่ O

จะต้องพิสูจน์ $OE \perp OF$

พิสูจน์ ต่อ FO มาตัด DE, AE ที่ H และ G

$$\hat{EGF} = \hat{A} + \hat{AFG} \quad \text{ป.พ. 8}$$

$$\hat{GHE} = \hat{DHF} \quad \text{ป.พ. 3}$$

$$= \hat{HCF} + \hat{CGH} \quad \text{ป.พ. 8}$$

$$\text{แต่ } \hat{A} = \hat{HCF} \quad \text{H\&S 5/163}$$

$$\text{และ } \hat{AFG} = \hat{GFB} \quad \text{โจทย์}$$

$$\therefore \hat{EGF} = \hat{GHE}$$

$$\therefore \hat{GEO} = \hat{OEH} \quad \text{โจทย์}$$

OE ด้านร่วม

$$\therefore \triangle OGE = \triangle OHE \quad \text{ป.พ. 17}$$

$$\therefore \hat{GOE} = \hat{HOE}$$

แต่มุมทั้งสองเป็นมุมประชิด

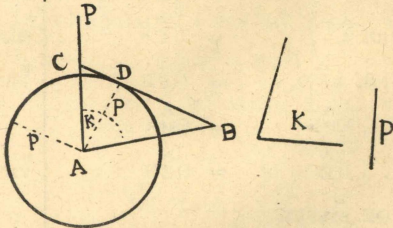
$\therefore$ มุมหนึ่ง ๆ ต้องต่างเท่ากับ L ด.

$$\therefore OE \perp OF$$

ช.ต.พ.

ข้อ 4/306

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดมุมยอดด้านประกอบ
มุมยอดด้านใดด้านหนึ่ง และความยาวของระยะตั้งฉาก
กับมุมยอดมายังด้านฐานให้



กำหนดให้ K เป็นจุดยอด AB เป็นด้านประกอบมุมยอดด้าน
หนึ่ง P เป็นความยาวของระยะตั้งฉากกับมุมยอดมายัง
ด้านฐาน (หรือส่วนของ $\triangle$ เหลี่ยมนั่นเอง)

จะต้องการสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง บน AB ทำมุม BAP ให้เท่า $\hat{K}$

เอา A เป็นจุดศูนย์กลางวงรัศมี P เขียนวงกลม

จาก B ตาก BD เส้นสัมผัสวงกลมที่ D และต่อเลย
ไปตัด AP ที่ C

แต่ $\triangle ABC$ จะเป็นสามเหลี่ยมที่ตรงการ

พิสูจน์ $\therefore BD$ เป็นเส้นตั้งฉาก

$\therefore AD \perp BD$

และ $= P$

$\therefore AD$ เป็นเส้นตั้งที่ตรงการ

$\therefore ABC$ เป็น $\triangle$ ที่ตรงการ

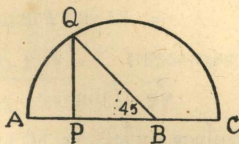
บ.พ. 46

สร้าง

ช. ต. ส.

ข้อ 5/306

โจทย์ A, B, C เป็นจุดสามจุดบนเส้นตรงเรียงตามลำดับกัน จงหาจุด P บนเส้นตรง ซึ่งทำให้ PB เป็นปฏิภาคส่วนของ PA และ PC



กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดอยู่บนเส้นตรงอันเดียวกัน จะต้องการหา จุด P บนเส้นตรงซึ่งทำให้

$$PB^2 = AP \cdot CP$$

สร้าง บน AC สร้างครึ่งวงกลม
ที่ B ทำมุม PBQ ให้เท่า 45° และให้เส้น BQ ตัดวง
กลมที่ Q

จาก Q จาก QP ให้ตั้งฉากกับ AC ที่ P
แล้วจุด P จะเป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \hat{QPB} = 90^\circ$
และ $\therefore \hat{PBQ} = 45^\circ$
 $\therefore \hat{Q} = 45^\circ$
 $\therefore PB = PQ$
แต่ $PQ^2 = PA \cdot PB$
 $\therefore PB^2 = PA \cdot PC$ ด้วย
 $\therefore P$ เป็นจุดที่ต้องการ

สร้าง

"

ม.พ. 16

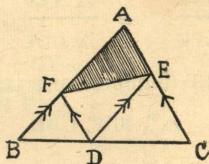
ม.พ. 5

บทแทรก

ม.พ. 66

ข้อ 6/306

โจทย์ จาก D ซึ่งเป็นจุด ๆ หนึ่งบนฐาน BC ของรูปสามเหลี่ยม
ABC ตลาก DE, DF ให้ขนานกับ AB, AC ไปตัดด้าน
AC, AB ที่ E และ F จงพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยม AEF เป็น
ปฏิภาคสี่เหลี่ยมผืนผ้าระหว่างสามเหลี่ยม FBD และ EDC



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มื่ออยู่ตัวในโจทย์

พิสูจน์ $\therefore DF \parallel AC$

$$\therefore BF : FA = BD : DC \quad (1)$$

เช่นเดียวกัน $\therefore DE \parallel AB$

$$\therefore BD : DC = AE : EC \quad (2)$$

$$\therefore BF : FA = AE : EC$$

$$\therefore DE \parallel AB$$

$$\therefore \frac{\triangle BDF}{\triangle AEF} = \frac{BF}{FA} \quad (3)$$

$$\text{เช่นเดียวกัน } \frac{\triangle AEF}{\triangle CDE} = \frac{AE}{EC} \quad (4)$$

$$\text{แต่ } \frac{BF}{FA} = \frac{AE}{EC} \quad (5)$$

โจทย์

ป.พ. 60

$$(1) = (2)$$

โจทย์

ป.พ. 70

พิสูจน์มาแล้ว

$$\therefore \frac{\triangle BDF}{\triangle AEF} = \frac{\triangle AEF}{\triangle CDE} \quad \left| \begin{array}{l} (4) = (5) \end{array} \right.$$

$\therefore \triangle AEF$ เป็นปฏิภาคี่วกดางระหว่าง
 $\triangle^s BDF, CDE$

ช. ต. พ.

ข้อ 7/360

โจทย์ PQ เป็นคอร์ดคึ่งหนึ่งของวงกลม ดากคอร์ดขนาน PX, YQ ให้ผ่านจุด P และ Q จงพิสูจน์ว่าไม่ว่าจะดากคอร์ดขนาน PX, QY โดยวิธีใดก็ตาม XY จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่มจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลมเดิม (Concentric circle) เด่มอ

ครูปโน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 77

กำหนดให้ PQ เป็นคอร์ดคึ่งหนึ่งของวงกลมที่มี O เป็นศูนย์กลาง
 กดาง PX, QY เป็นคอร์ดขนานที่ดากจาก P และ Q
 ไปตัดเส้นรอบวงที่ X และ Y

จะต้องพิสูจน์ XY สัมผัสวงกลมวงหนึ่งที่มี O เป็นศูนย์กลาง
 กดางเด่มอ

พิสูจน์ ดาว PY, QX

$$\therefore PX \parallel QY$$

$$\therefore \text{มุมแย้ง } \hat{P}\hat{X}\hat{Q} = \hat{X}\hat{Q}\hat{Y}$$

$$\text{แต่ } \hat{X}\hat{P}\hat{Y} = \hat{X}\hat{Q}\hat{Y}$$

$$\therefore \hat{P}\hat{X}\hat{Q} = \hat{X}\hat{P}\hat{Y}$$

$$\therefore \text{อาร์ค } PQ = \text{อาร์ค } XY$$

แต่อาร์ค PQ คงที่

$$\therefore \text{อาร์ค } XY \text{ คงที่ด้วย}$$

$$\therefore \text{ระยะตั้งฉากจาก } O \text{ ไปยัง } XY \text{ (OA)}$$

จะต้องคงที่ด้วย

เช่นเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า ไม่ว่า PX, QY จะเคลื่อนที่ไปอย่างไร ระยะตั้งฉากจาก O ไปยัง XY หรือระยะ OA จะต้องคงที่เสมอ

$$\therefore \text{โดกัธของ A เดินเป็นวงกลม}$$

หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า ไม่ว่า PX, QY จะเคลื่อนที่ไปอย่างไร XY ต้องสัมผัสวงกลม

โจทย์

บ. พ. 14

บ. พ. 39

บ. พ. 42

ค. ครุฑ

FB คงที่

บ. พ. 34

ที่ O เป็นจุดศูนย์กลาง และมี OA เป็น
รัศมีเดิม

ช. ต. พ.

ข้อ ๘/306

โจทย์ ในวงกลมสองวงสัมผัสกันที่ C PCP', QCQ' เป็นเส้น
ตรงที่เขียนผ่าน G ตัดเส้นรอบวง และตัดกันเองทั้งคู่ได้
ฉากที่ C ถ้าต่อเส้นต่อจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งคู่ของ
ออกไปตัดเส้นรอบวงที่ A และ A' จงพิสูจน์ $PP'^2 +$
 $QQ'^2 = AA'^2$

ดูรูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 77

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์

มีอยู่แต่ในโจทย์

สร้าง ต่อ AP, A'Q' ออกไปพบกันที่ B

ฉาก A'P', AQ

พิสูจน์ $\therefore \hat{APC}, \hat{A'Q'C}$ ต่างเป็นมุมในครึ่งวง

กลม

$$\therefore \hat{APC} = \hat{A'Q'C} = 1 \text{ L.น.}$$

$$\text{และ } \therefore \hat{P'CB} = 1 \text{ L.น.}$$

บ.พ. 41

โจทย์

$$\therefore P\hat{C}Q = A\hat{P}C = A'\hat{Q}'C \quad \text{ต่างเท่ากับ}$$

1 L.น.

แต่ทั้งสามมุมนี้เป็นมุมภายนอกและภายในบนข้างเดียวกัน

$$\therefore AB \parallel QQ' \quad \text{และ} \quad PP' \parallel A'B \quad \text{บ.พ. 13}$$

$$\therefore \hat{B} = A\hat{P}C = 1 \text{ L.น.} \quad \text{บ.พ. 14}$$

$$\therefore ABQ' \quad \text{และ} \quad A'BPP' \quad \text{เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก} \quad \text{กฏสี่เหลี่ยมมุมฉาก}$$

$$\therefore AB = QQ' \quad \text{และ} \quad A'B = PP' \quad \text{บ.พ. 21}$$

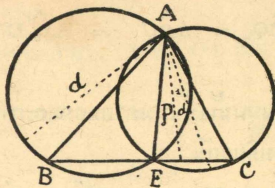
ใน $\triangle$ มุมฉาก $A'AB$

$$AA'^2 = A'B^2 + AB^2 \quad \text{บ.พ. 29}$$

$$= PP'^2 + QQ'^2 \quad \text{แทนค่า}$$

ข้อ 9/306

โจทย์ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด AE ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตัดฐาน BC ที่จุด E และ d, d' เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABE, ACE ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $d:d' = BE:EC$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์

นี้อยู่ในตัวในโจทย์

พิสูจน์ ให้ p เป็นระยะตั้งฉากจาก A มายัง BC

$$\therefore AB \cdot AE = p \cdot d$$

ป. พ. 77

$$\text{และ } AC \cdot AE = p \cdot d'$$

ป. พ. 77

$$\text{หารกันจะได้ } \frac{AB}{AC} = \frac{d}{d'}$$

แต่ $\therefore AE$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$$

ป. พ. 61

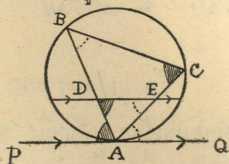
$$\therefore \frac{d}{d'} = \frac{BE}{EC}$$

แทนค่า

ช. ต. พ.

ข้อ 10/307

โจทย์ AB, AC เป็น cords ของวงกลม ตากเส้นตรงให้ขนาน
กับเส้นสัมผัสวงที่จุด A ถ้าตากเส้นขนานตัด AB, AC
ที่ D และ E จงพิสูจน์ว่า $AB \cdot AD = AC \cdot AE$



กำหนดให้ และ ต้องพิสูจน์

ม้อยู่ในตัวในโจทย์

พิสูจน์ ให้ PAQ เป็นเส้นสัมผัส ณ จุด A

$$\therefore PQ \parallel DE$$

$$\therefore \hat{PAD} = \hat{ADE}$$

$$\text{แต่ } \hat{PAD} = \hat{C}$$

$$\therefore \hat{ADE} = \hat{C}$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\hat{CAQ} = \hat{B}$

$$\therefore \hat{BAC} \text{ เป็นมุมร่วม}$$

โจทย์

บ.พ. 14

บ.พ. 49

$\therefore \triangle^s ADE, ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มุม
เท่ากัน มุมต่อมุม

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

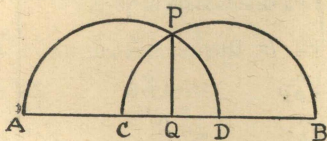
$$\text{หรือ } AB \cdot AD = AC \cdot AE$$

บ.พ. 62

คูณทแยง

ข้อ 11/307

โจทย์ มีจุดอยู่สองจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงหาจุดที่สามซึ่งทำให้ระยะทางจากจุดที่สามนั้นไปยังจุดปลายทั้งสองของเส้นตรง ได้มีพหุภาคกับระยะทางจากจุดที่สามไปยังจุดสองจุดที่กำหนดให้บนเส้นตรงนั้น



กำหนดให้ C และ D เป็นจุดสองจุดอยู่บนเส้นตรง AB
จะต้องหา Q บน AB ซึ่งทำให้

$$QA : QB = QC : QD$$

สร้าง เขา AD, CB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เขียนวงกลมตั้ง
วงตัดกันที่จุด P

จาก P ตาก PQ ⊥ AB

แล้ว Q จะเป็นจุดที่ต้องการ

พิสูจน์ ในวงกลม APD, $PQ^2 = QA \cdot QD$ บทแทรก

บ. พ. 66

ในวงกลม CPB

$PQ^2 = QC \cdot QB$ บทแทรก

บ. พ. 66

$QA \cdot QD = QC \cdot QB$

หรือ $\frac{QA}{QB} = \frac{QC}{QD}$

คูณไขว้

∴ Q เป็นจุดที่ต้องการ

ช. ต. พ

ข้อ 12/307

โจทย์ กำหนดจุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดมุมทั้งสาม
ของรูปสามเหลี่ยมมายังด้านตรงข้าม ให้สร้างรูปสาม
เหลี่ยม

กำหนดให้ D, E, F เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากจาก
มุมยอด A, B, C มายังด้านตรงข้าม

จะต้องการสร้าง $\triangle ABC$

สร้าง ลาก DE, DF และ EF

ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}$ ให้ตัดกันที่ O

ลากเส้นตรงให้ผ่าน D, E, F ตั้งฉากกับ OD, OE, OF
และต่อเลยไปตัดกันที่ A, B, C

แล้ว ABC จะเป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ ดู H & S 2/208

ข้อ 13/307

โจทย์ รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ารูปหนึ่งบรรจุอยู่ในวงกลม จ
พิสูจน์ว่า ถ้าวงกลมอีกวงหนึ่งล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม

ด้านไม่เท่ากันได้แล้ว เส้นต่อจุดตัดมันตั้งที่อยู่ตรงข้ามย่อม
ตั้งฉากกัน

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 79

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในวงกลม

PQRS เป็นวงกลมที่ก่อกว้างจากมุมหนึ่งมุมฉากภายใน ABCD

จะต้องพิสูจน์ $PR \perp AS$

สร้าง ต่ DA, CB ออกมาพบกันที่ E

ต่ AB, DC ออกมาพบกันที่ F

ให้เส้นแบ่งครึ่ง $\hat{E}$ และ $\hat{F}$ ตัดกันที่ O และตัด PR, QS
ที่ X, Y

พิสูจน์ $\hat{EOF} = 1 \text{ L.น.}$

แต่ $PR \perp EO$

$\therefore \hat{EXR} = 1 \text{ L.น.} = \hat{EOF}$

$\therefore PR \parallel FO$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $EO \parallel QS$

$\therefore XOYZ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี

$\hat{EOF}$ เป็นมุมฉาก หรือเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$\therefore \hat{XZY} = 1 \text{ L.น.}$ ด้วย

นั่นคือ $PR \perp QS$

ข้อ 3/306

H&S 7/177

บ. พ. 13

กฎ $\square$ ผืนผ้า

ข้อ 14/367

โจทย์ เส้นตรงสองเส้นตัดฉากกัน มีวงกลมเท่ากันและสัมผัสกันอีกสองวงต่างสัมผัสและเคลื่อนอยู่ระหว่างเส้นตรงทั้งสองนี้ จงหาโดกซ์ของสัมผัสของวงกลมทั้งสอง (ดูรูปในคันฉาบ)

กำหนดให้ (A) และ (B) เป็นวงกลมสองวงเท่ากัน และสัมผัสกันที่ D และต่างวงต่างสัมผัสเส้น OX, OY ซึ่งตัดฉากกัน

จะต้องการหา โดกซ์ของ D

วิธีหา ตากเส้นขนานกับ OX ให้ผ่าน B

“ “ OY “ A

ให้เส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่ C

แล้วโดกซ์ของ D จะเดินเป็นวงกลมที่มี C เป็นจุดศูนย์กลาง และมรัศมี CD

พิสูจน์ จุดศูนย์กลางของวงกลม (A) ต้องเคลื่อนอยู่บน AC

“ “ “ (B) “ “ BC

และ “ “ OX, OY ตัดฉากกัน

∴ จึงอาจพิสูจน์ได้ว่า $AC \perp BC$

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

∴ $\hat{ACB} = 90^\circ$

∴ $\hat{ACB}$ ต้องเป็นมุมในครึ่งวงกลม (บ. พ. 41)

∴ $AD = DB = CD =$ รัศมีของวงกลมวง
หนึ่งวงใด

∴ D ห่างจาก C เท่ากับความยาวของรัศมีวงกลม
หนึ่งวงใด

และไม่ว่าวงกลมจะเคลื่อนที่ไปอย่างไรก็ตาม เราอาจ
พิสูจน์ได้ว่า D ห่างจาก C เท่ากับรัศมีของวงกลมวง
หนึ่งวงใดในสองวงนั้นเสมอ

∴ โค้งของ D เดินเป็นวงกลมที่มี C เป็นจุดศูนย์กลาง
และรัศมีเท่ากับรัศมีของวงกลมวงหนึ่งวงใด

ข้อ 15/307

โจทย์ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม AC, BD เป็น
คอร์ดสองเส้นอยู่ข้างเดียวกันกับ AB และตัดกันที่ E จง

พิสูจน์ว่าวงกลมที่เขียนผ่านจุด D, E, C จะตัดวงกลมเดิมตรงฉาก

ดูรูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ ๒” หน้า 81
กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มั้อยู่แต่ในโจทย์
พิสูจน์ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้

ลาก OC

$$\therefore OA = OB$$

รัศมี

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA$$

$$\text{แต่ } \angle OAC = \angle D$$

ป. พ. 39

$$\therefore \angle OCA = \angle D$$

$\therefore$ OC เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ $\triangle DEC$ ด. ป. พ. 49

$\therefore$ เส้นสัมผัสของวงกลม DEC ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้

$\therefore$ วงกลมต้องวงตัดกันตั้งฉาก

คำจำกัดความ

ข้อสังเกต คำจำกัดความ วงกลมสองวงจะตัดกันตั้งฉาก เมื่อเส้นสัมผัสของวงกลมหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของอีกวงกลมหนึ่ง

ข้อ 16/307

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสี่วงที่ต่างวง
 เชื่อมสัมผัสด้านด้านด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จะ
 ต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 81

กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า มีเส้นแบ่งครึ่งมุม

A, B, C, D ตัดกันที่ P, Q, R, S ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ P, Q, R, S วงกลมได้

$$\text{พิสูจน์ ใน } \triangle APD \quad \hat{P} = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{D}}{2} \quad \text{ป.พ. 16}$$

$$\text{„ } \triangle BCR \quad \hat{R} = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} \quad \text{ป.พ. 16}$$

$$\therefore \hat{P} + \hat{R} = 360^\circ - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) \quad \text{บวกกัน}$$

$$\text{แต่ } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \quad \text{บทแทรก}$$

ป.พ. 16

$$\therefore \hat{P} + \hat{R} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

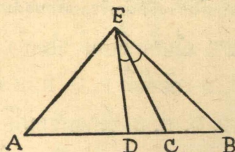
$$\therefore P, Q, R, S \text{ วงกลมได้}$$

บทกลับ

ป.พ. 40

ข้อ 17/307

โจทย์ C และ D เป็นจุดบน AB ซึ่งทำให้ $AB : AC = AC : AD$
 จาก A ตาก AE ไปทางทิศใดก็ได้ให้ยาวเท่ากับ AC จง
 พิสูจน์ว่า BC และ CD ต้องทำมุมเท่ากันที่จุด A



กำหนดให้ C และ D เป็นจุดบน AB ซึ่งทำให้ $AB : AC =$
 $AC : AD$ AE เป็นเส้นตรงที่ลากจาก A ยาวเท่ากับ
 AC

จะต้องพิสูจน์ CE แบ่งครึ่งมุม BED

$$\text{พิสูจน์ } \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$$

และ $\therefore \hat{A}$ เป็นมุมร่วม

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADE$$

โจทย์

$$\therefore AC = AE$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{AD} \text{ ----- (1)}$$

$$\text{แต่ } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$\therefore \frac{AB - AC}{AC} = \frac{AC - AD}{AD}$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AD}$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$$

$$= \frac{AE}{AD} \text{ ----- (2)}$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{BE}{DE}$$

$\therefore$ CE เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม

โดย

กฎพีทาโกรัส

ตรง

คุณสมบัติ

$\therefore AC = AD$

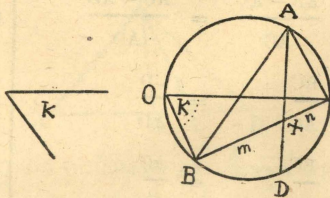
(1) = (2)

บทกลับ

บ.พ. 61

ข้อ 18/307

โจทย์ กำหนดมุมยอด อัตราส่วนของด้านประกอบมุมยอด
และเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรูปสาม
เหลี่ยมให้ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมนั้น



กำหนดให้ OC เป็นเส้นตรง K เป็นมุม ๆ หนึ่ง $m:n$ เป็น
อัตราส่วนของด้านประกอบมุมยอด

จะต้องสร้าง $\triangle ABC$ ให้มุมยอด $\hat{A}$ ทาง K และด้าน

$AB:AC = m:n$ และให้เส้นผ่าศูนย์กลางของวง
กลมที่เขียนล้อมยาวเท่ากับ OC

วิธีสร้าง สร้างวงกลมให้มี OC เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

ทำมุม $\hat{COB}$ ให้ทาง K

แบ่ง BC ออกเป็นอัตราส่วน $m:n$ ที่ X | บ.ด. 6

| บ.ด. 37

(2:1 ในรูป)

แบ่งครึ่งอาร์ค BC ที่ D

ลาก DX ให้ตัดเส้นรอบวงที่ A

แล้ว ABC จะเป็นสามเหลี่ยมที่คดของการ

พิสูจน์ $\therefore$ อาร์ค BD = อาร์ค CD $\therefore \hat{BAD} = \hat{CAD}$ $\therefore$ AX เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC $\therefore BX : XC = BA : AC$ $= m : n$ และ $\therefore \hat{A} = \hat{BOC}$ $= \hat{K}$ $\therefore$ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คดของการ

สร้าง

บ.พ. 43

บ.พ. 61

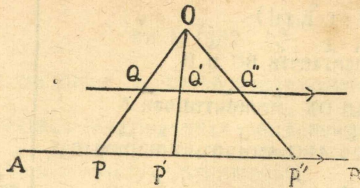
สร้าง

บ.พ. 39

สร้าง

ข้อ 19/307

โจทย์ O เป็นจุดคงที่ OP เป็นเส้นตรงที่ลากตัดเส้นตรงคงที่อีก
 เส้นหนึ่งที่ P ถ้า Q เป็นจุดบน OP ทำให้อัตราส่วนของ
 OQ : OP คงที่เสมอ จงหาโคจรของจุด Q



กำหนดให้ O เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AB OP เป็นเส้นตรง
ที่ลากจาก O ไปตัด AB ที่ P Q เป็นจุดบน OP ทำให้
 $OQ : OP = K$

จะต้องการหา โตกัสของ Q

วิธีหา สมมติว่า P เคลื่อนไปอยู่ที่ P', P'' และ Q เคลื่อนไปที่
 Q', Q''

$$\therefore \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ''}{OP''} = K$$

$$\therefore QQ' \parallel PP'$$

$\therefore$ โตกัสของ Q เป็นเส้นตรงขนานกับ

AB

โจทย์

บทกลับ

บ.พ. 60

ข้อ 20/307

โจทย์ O เป็นจุดกึ่งที่ OP เป็นเส้นตรงที่ลากตัดเส้นรอบวงของ
วงกลมคงที่ที่ P ถ้า Q เป็นจุดบน OP ทำให้อัตราส่วนของ
OQ : OP คงที่ แล้ว จงหาโดกัศของ Q

ดูรูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 82

กำหนดให้ และ จะต้องหา มั้อยู่แล้วในโจทย์

วิธีหา ให้ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ลาก OB

จาก Q ลาก QA // PB ตัด OB ที่ A

แล้วโดกัศของ Q จะเดินเป็นวงกลมที่มี A เป็นจุดศูนย์กลาง
กต่าง และมรัศมีคงที่ AQ

พิสูจน์ $\therefore AQ \parallel PB$

$\therefore$ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$\triangle OAQ \sim \triangle OPB$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AQ}{PB} = \frac{OQ}{OP} = X \text{ คงที่}$$

และ $\therefore O$ คงที่ และวงกลมคงที่

$\therefore OB$ คงที่

สร้าง

บ.พ. 62

โจทย์

โจทย์

และ $\therefore \frac{OA}{OB}$ คงที่ $\therefore A$ คงที่

$\therefore \frac{AQ}{PB}$ คงที่ แต่ PB คงที่

$\therefore AQ$ คงที่

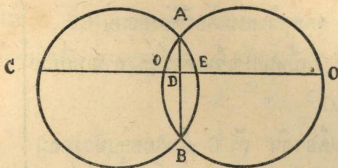
$\therefore$ ไม่ว่า OP จะเคลื่อนไปอย่างไรก็ตาม
เราอาจพิสูจน์ได้ว่า A คงที่ และ QA
คงที่

$\therefore$ โดกล์ของ Q เดินเป็นวงกลมที่มี A
เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมี QA

ข้อ 21/307

โจทย์ วงกลมเท่ากันสองวงตัดกันที่ A และ B จาก C ซึ่ง
เป็นจุด ๆ หนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ตาก
เส้นตรงให้ตัดกับ AB และเลยไปตัดเส้นรอบวงของ
ของวงกลมอีกวงหนึ่งที่ O และ O' จงพิสูจน์ว่า O
หรือ O' เป็นขอโซ่เส้นเคอร์ของสามเหลี่ยม ABC จง
ชี้แจงแตกต่างระหว่างสองกรณี (ที่ O หรือ O' เป็น
ขอโซ่เส้นเคอร์) ไปด้วย

โจทย์



กำหนดให้ วงกลมเท่ากันสองวง ตัดกันที่ A และ B จากจุด C บนวงกลมวงหนึ่ง ตาก $CD \perp AB$ ให้ตัดวงกลมวงแรกที E และตัดวงกลมอีกวงหนึ่งที O และ O'

จะต้องพิสูจน์ O และ O' เป็นขอโซเซ้นเตอร์ของ $\triangle ABC$

พิสูจน์ $\therefore AB$ เป็นคอร์ดของวงกลมเท่ากันสอง | โจทย์

วง

$$\therefore \text{อาร์ค } AOB = \text{อาร์ค } AEB \quad \text{ป.พ. 44}$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AEB \quad \text{ป.พ. 43}$$

$$\text{แต่ } \angle ACB + \angle AEB = 2 \angle \text{น.} \quad \text{ป.พ. 40}$$

$$\therefore \angle ACB + \angle AOB = 2 \angle \text{น. ด้วย}$$

$\therefore$ จุดขอโซเซ้นเตอร์ต้องอยู่บนวงกลมที่ H&S ตัวอย่าง

มี BC เป็นอาร์ค

ที่ 3 หน้า 210

แต่ $\therefore CD \perp AB$

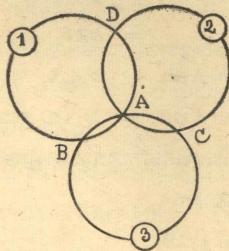
โจทย์

∴ จุดออโธเซ็นเตอร์ของอยู่บน CD
 ∴ O เป็นออโธเซ็นเตอร์ของสามเหลี่ยม
 ABC

เช่นเดียวกัน ถ้า C เป็นจุดอยู่บนวงกลม
 และอยู่ภายในวงกลมข้างขวา
 เราอาจพิสูจน์ได้ว่า O' เป็นจุดออโธเซ็น-
 เทอร์ของ $\triangle ABC$

ข้อ 22/308

โจทย์ วงกลมเท่ากันสามวงเขียนผ่านจุด A เดียวกัน และตัด
 กันที่จุด B, C, D จงพิสูจน์ว่าในจุดทั้งสี่ A, B, C, D น
 ึ่งจุดหนึ่งจะเป็นออโธเซ็นเตอร์ของอีกสามจุด



กำหนดให้ 1, 2, 3 เป็นวงกลมเขียนผ่านจุด A

ให้วงกลม 1 และวงกลม 2 ตัดกันที่ D

” 2 ” 3 ” C

” 3 ” 1 ” B

จะต้องพิสูจน์ A เป็นออร์โธเซนเตอร์ของ $\triangle BCD$

B ” ” $\triangle ADC$

C ” ” $\triangle ABD$

และ D ” ” $\triangle ABC$

พิสูจน์ ∴ วงกลม 1 และวงกลม 3 ตัดกัน

∴ ออร์โธเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$ อยู่บน
อาร์ค BAD

ดูข้อ 21/307

∴ วงกลม 2 และวงกลม 3 ตัดกัน

∴ ออร์โธเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$ อยู่บน
อาร์ค CAD

ดูข้อ 21/307

แต่อาร์ค BAD, CAD ตัดกันที่ D

∴ ออร์โธเซนเตอร์ต้องอยู่ที่ D

∴ D เป็นออร์โธเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$

∴ A, B, C เป็น ออร์โธเซนเตอร์ของ

H&S4/209

$\triangle BCD, ADC, ABD$

ข้อ 23/308

โจทย์ จากจุด ๆ หนึ่งภายนอกวงกลม ดาเส้นตรงให้ตัดเส้นรอบวงด้วนเว้า (Concave circumference) และให้ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นตรงด้วนนูน (Convex circumference) เมื่อไรจึงจะสร้างรูปไม่ได้

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 83

กำหนดให้ A เป็นจุด ๆ หนึ่งอยู่ภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง

จะต้องการ ดาเส้นตรงจาก AYB ให้ตัดวงกลมที่ Y และ B โดยทำให้ $AY = YB$ และให้หาว่าเมื่อใดจึงจะสร้างรูปไม่ได้

วิธีสร้าง ดา AO

แบ่งครึ่ง OA ที่จุด X (บ. ล. 1)

เอา X เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลม (O) เขียนวงกลมให้ตัดวงกลมเดิมที่ Y

ดา AY และต่อเลยไปตัดวงกลมที่ B

แล้ว AYB จะเป็นเส้นตรงที่ต้องการ

และเราจะสร้างรูปแบบนี้ไม่ได้

ถ้าระยะสั้นที่สุดจาก A ไปยังวงกลม ยาวกว่าเส้นผ่า
ศูนย์กลางของวงกลม (ให้ นร. ลองสร้างรูปดู)

พิสูจน์ $\therefore \frac{AX}{OA} = \frac{1}{2}$

สร้าง

$$\frac{XY}{OB} = \frac{1}{2}$$

สร้าง

$$\therefore \frac{AX}{OA} = \frac{XY}{OB}$$

$\therefore \triangle^s AXY, AOB$ มีมุม A ร่วมกัน

และด้านประกอบมุม AXY และ AOB ต่าง

ได้ปฏิกภาคกัน

$$\therefore \hat{A}YX = \hat{B}$$

บ.พ. 65

$$\therefore XY \parallel OB$$

บ.พ. 14

$$\therefore \frac{AY}{YB} = \frac{AX}{XO}$$

บ.พ. 60

$$\text{แต่ } AX = XO$$

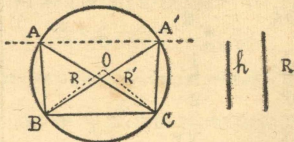
โจทย์

$$\therefore AY = YB$$

H&S 1/64

ข้อ 24/308

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดด้านฐาน ส่วนสูง และรัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมให้



กำหนดให้ h เป็นส่วนสูง, R เป็นรัศมีของวงกลมที่เขียนล้อมรูป $\triangle$, BC เป็นด้านฐาน

จะต้องการสร้าง รูป $\triangle ABC$

วิธีสร้าง เอา B และ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี R เขียนส่วนโค้งตัดกันที่ O

เอา O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี OB เขียนวงกลมลากเส้นตรงให้ขนานกับ BC และให้ห่างจาก BC เป็นระยะ h ตัดวงกลมที่ A และ A'

แล้ว ABC และ $A'BC$ จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore OB = OC = R$ | สร้าง

และ $\therefore$ จุด A และ A' อยู่บนวงกลม

$\therefore$ วงกลมที่ล้อมรอบรูป $\triangle$ มีรัศมียาว R
 และ $\therefore$ เส้นขนานห่างจาก BC เป็นระยะ h
 $\therefore \triangle^s ABC, A'BC$ มีส่วนสูง h
 $\therefore \triangle^s ABC, A'BC$ เป็นรูป $\triangle$ ที่ต้องการ

ข้อ 25/308

โจทย์ กำหนดด้านฐานของรูปสามเหลี่ยม และความยาวของ
 ด้านอีกสองด้านให้ จงหาโดกัล์ของจุดปลายของเส้นตั้ง
 ฉากที่ลากจากจุดปลายข้างหนึ่งของด้านฐานไปยัง เส้น
 แบ่งครึ่งมุมยอดภายนอก

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 84

กำหนดให้ AB เป็นด้านฐานของ $\triangle ABC$, K เป็นความยาว
 ของด้าน $(AC + BC)$ ซึ่งคงที่ ให้ CP เป็นเส้นแบ่ง
 ครึ่งมุมภายนอกที่ C พบเส้นตั้งฉากที่ลากจาก B ที่ P

จะต้องการหา โดกัล์ของจุด P

วิธีหา ต่อ AC ถึง D ทำ $CD = CB$
 ลาก BD ให้ตัดเส้นแบ่งครึ่งมุมที่ P
 $\therefore AC + CB$ คงที่

โจทย์

$\therefore AC + CD$ คงที่ด้วย

ใน $\triangle BCP, CDP$

$$\therefore \begin{cases} CB = CD \\ \hat{BCP} = \hat{DCP} \\ CP \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCP = \triangle DCP$$

$$\therefore BP = PD$$

$\therefore P$ เป็นจุดกึ่งกลางของ BD

แบ่งครึ่ง AB ที่ O

ลาก OP

$$\therefore OP = \frac{AD}{2}$$

แต่ AD คงที่

$\therefore OP$ คงที่ด้วย

และไม่ว่าจุด C จะเคลื่อนที่ไปที่ใดก็ตาม
เราอาจพิสูจน์ได้ว่า OP คงที่และยาวเท่า
กับครึ่งหนึ่งของ AD เสมอ

$\therefore$ โดกซ์ของ P เดินเป็นวงกลมที่มี O

$$\therefore CB = CD$$

สร้าง
ใจทย์

บ.พ. 4

บ.ด. 1

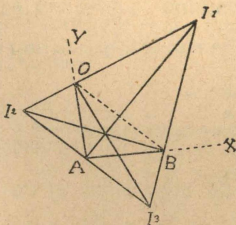
H&S 3/64

พิสูจน์มาแล้ว

เป็นจุดศูนย์กลาง และมุมที่เท่ากันครึ่ง
หนึ่งของผลบวก ของ ความยาว ของด้าน
AB และ AC

ข้อ 26/308

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดจุดศูนย์กลางของ
วงกลมที่เขียนสัมผัสรูปสามเหลี่ยมภายนอกสามจุดให้
(Three ex-centres) หรือจุดศูนย์กลางของวงกลมที่
เขียนสัมผัสรูปสามเหลี่ยมภายนอกสองจุด และจุดศูนย์กลาง
ของวงกลมที่เขียนสัมผัสภายในอีกจุดหนึ่งให้



คำตอบ ตอนแรก

กำหนดให้ I_1, I_2, I_3 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียน
สัมผัสรูปสามเหลี่ยม ABC ภายนอกสามจุด

จะต้องการสร้าง รูปสามเหลี่ยม ABC

วิธีสร้าง ถ้า I_1I_2, I_2I_3, I_3I_1

จาก I_1, I_2, I_3 ถ้า I_1A, I_2B, I_3C

ให้ตัดได้ฉากและพบกับด้านตรงข้ามที่ A, B, C

แล้ว ABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ คือ AB, AC ออกไปถึงจุด X และ Y

$\therefore I_1B, I_1C$ แบ่งครึ่ง CBX, BCY

H&S 2/209

$\therefore I_1$ เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่

เขียนสัมผัส $\triangle ABC$ ภายนอก

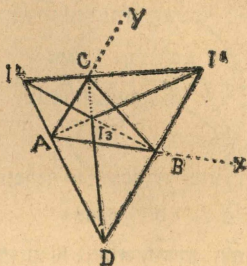
ป.ศ. 27

ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

I_2, I_3 เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่

บรรจุกภายนอก $\triangle ABC$

$\therefore ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ



คำเฉลย ตอนที่ 2

กำหนดให้ I_1, I_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนสัมผัสรูป $\triangle$ ภายนอกสองจุด I_3 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุภายใน

จะต้องการสร้าง รูป $\triangle ABC$

วิธีสร้าง ต่อเส้นระหว่างจุด I_1, I_2 , และ I_3

จาก I_1 และ I_2 ตากเส้นตรงให้ตั้งฉากกับ I_2I_3 และ I_1I_3 ไปพบ I_2I_3 และ I_1I_3 ต่อออกไปอีกที่จุด B และ A

ให้ I_1B และ I_2A ต่อออกไปตัดกันที่ D

จาก D ตาก DI_3 และต่อเลยไปตัด I_1I_2 ที่ C

แล้ว ABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ตองการ

พิสูจน์ คือ AB, AC ออกไปถึง X และ Y

$\therefore I_1B, I_1C$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมที่ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ภายนอก H&S 2/209

$\therefore I_1$ เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่
เขียนสัมผัส $\triangle ABC$ ภายนอก

เช่นเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า I_2 เป็นจุด
ศูนย์กลางของ วงกลมที่เขียนสัมผัส $\triangle$
ABC ภายนอก

} บ.ด. 27

และ $\therefore I_1A, I_2B$ เป็นด้านประกอบมุม
บ้าน ย่อมแบ่งครึ่งมุมของ $\triangle ABC$

H&S 2/209

และ I_3D เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C

$\therefore ABC$ เป็น

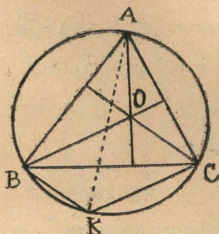
$\therefore I_3$ เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่
เขียนบรรจุภายในรูป $\triangle ABC$

$\triangle$ มีแคด

$\therefore ABC$ เป็นรูป $\triangle$ ที่ตองการ

ข้อ 27/308

โจทย์ O เป็นออโธเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม ABC $AO^2 +$
 $BC^2 = BO^2 + CA^2 = CO^2 + AB^2 = d^2$ เมื่อ d
แทนเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรอบรูป $\triangle$



กำหนดให้ O เป็นจุดโอรเซ็นเตอร์ของรูป $\triangle ABC$, $AK = d$
เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของ วงกลม ที่เขียน ถัดม รูป สาม-
เหลี่ยม ABC

จะต้องพิสูจน์ $AO^2 + BC^2 = BO^2 + CA^2 = CO^2 + AB^2 = d^2$

พิสูจน์ ตก BK, CK

$\therefore OBKC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

H&S 7/209

$\therefore BO = CK, CO = BK$

บ.พ. 21

$\therefore \angle ACK$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมย่อม =

บ.พ. 41

1 $\angle$ ฉ.

$\therefore d^2 = CK^2 + CA^2 = BO^2 + CA^2$

บ.พ. 29

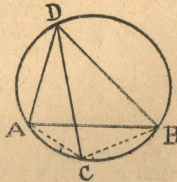
เช่นเดียวกัน ถ้าลากเส้นผ่าศูนย์กลางให้

ผ่าน B และ C เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} d^2 &= AO^2 + BO^2 \quad \text{และ} \quad d^2 = CO^2 + BO^2 \\ \therefore d^2 &= CO^2 + AB^2 = BO^2 + AC^2 \\ &= AO^2 + BC^2 \end{aligned}$$

ข้อ 28/308

โจทย์ C เป็นจุดกึ่งกลางของอาร์คข้างหนึ่งของวงกลมที่มี AB เป็นคอร์ด D เป็นจุดใด ๆ บนอาร์ค AB ที่อยู่ตรงข้ามกับ C จงพิสูจน์ $AD + DB : DC = AB : AC$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่แล้วในโจทย์
พิสูจน์ ถ้าก AC, BC

$$\therefore \text{อาร์ค AC} = \text{อาร์ค CB}$$

$$\therefore AC = BC$$

$$AB \cdot DC = AD \cdot BC + BD \cdot AC$$

โจทย์

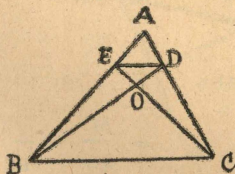
ป.พ. 44

ป.พ. 78

$$\begin{array}{lcl}
 & = AC (AD + DB) & \Bigg| AC=BC \\
 \therefore \frac{AD + DB}{DC} = \frac{AB}{AC} & & \Bigg| \text{คูณทั้งข้าง}
 \end{array}$$

ข้อ 29/308

โจทย์ D เป็นจุดบนด้าน AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC และ E เป็นจุดบนด้าน AB ถ้า BD, CE แบ่งกันและกันตามอัตราส่วน 4 : 1 แล้ว จงพิสูจน์ว่า D, E จะแบ่ง CA, BA ออกตามอัตราส่วน 3 : 1 ด้วย



กำหนดให้ D และ E เป็นจุดบนด้าน AC, AB ของรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ BD, CE ตัดกันที่ O โดยทำให้

$$BO : OD = CO : OE = 4 : 1$$

จะต้องพิสูจน์ $BE : EA = CD : DA = 3 : 1$

$$\text{พิสูจน์} \quad \therefore \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OE} = 3:1$$

โจทย์

$$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OD}{OE}$$

คุณสมบัติ

$$\text{และ} \quad \therefore \hat{DOE} = \hat{BOC}$$

น.พ. 3

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle BOC$$

น.พ. 64

$$\therefore \frac{BC}{DE} = \frac{BO}{OD}$$

น.พ. 62

$$= \frac{4}{1}$$

โจทย์

$$\therefore \hat{ODE} = \hat{OBC}$$

 $\therefore \triangle$ คล้ายกัน

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

ร-ย. หน้า 62

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{DE}{BC}$$

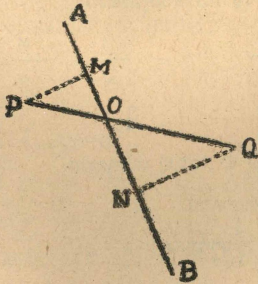
น.พ. 62

$$= \frac{1}{4}$$

$$\text{หรือ} \quad BE : EA = CD : AD = 3:1$$

ข้อ 30/308

โจทย์ จากจุดคงที่สองจุด ตากเส้นตรงให้ตัดฉากกับเส้นตรง
 อีกเส้นหนึ่งซึ่งฉากระหว่างจุดคงที่ทั้งสองนี้ ถ้าอัตราส่วนของระยะตัดฉากจากจุดไปยังเส้นตรงต่างคงที่ด้วยแล้ว
 จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ฉากระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง จะ
 ต้องผ่านจุดคงที่จุดที่สาม จงหาจุดคงที่จุดที่สาม



กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดคงที่สองจุด

AB เป็นเส้นตรงที่ฉากระหว่าง P และ Q

โดยทำให้ระยะตัดฉาก $PM:QN = 1:2 =$ นิจ

จะต้องการหา จุดคงที่อีกจุดหนึ่งที่ AB เขียนผ่าน

พิสูจน์ ทาก PQ ให้ตัด AB ที่ O

ใน $\triangle^s POM, QON$

$$\therefore \begin{cases} \hat{POM} = \hat{QON} \\ \hat{PMO} = \hat{QNO} \\ \hat{P} = \hat{Q} \end{cases}$$

บ.พ. 3

มุมฉาก

บ.พ. 16

$\therefore \triangle^s POM \cong QON$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามเท่ากันมุมต่อมุม

$$\therefore \frac{PO}{OQ} = \frac{MO}{ON} = \frac{PM}{QN} = \text{นิจ}$$

บ.พ. 62

โจทย

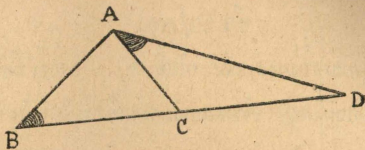
และ $\therefore P$ และ Q เป็นจุดกึ่งที่

$\therefore O$ กึ่งที่ด้วย

$\therefore O$ เป็นจุดที่ต้องการ

ข้อ 31/309

โจทย จงแสดงถึงวิธีที่จะลากเส้นตรงจากมุมยอด A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ให้พบฐาน BC ต่อดูออกไปที่ D โดยให้ AD เป็นปฏิภาคส่วนของด้านระหว่าง BD และ DC



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มื่ออยู่แต่ในโจทย์

วิธีสร้าง ที่ A ทำมุม $\angle CAD = \angle ABC$ ให้เส้น AD ตัด BC
ต่อออกไปที่ D

แล้ว AD จะเป็นปฏิภาคส่วนกลางระหว่าง BD และ CD
ตามต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle^s ACD, ABD$

$$\therefore \begin{cases} \angle D \text{ เป็นมุมร่วม} \\ \angle B = \angle CAD \\ \angle BAD = \angle ACD \end{cases}$$

สร้าง

บ.พ. 16

$\therefore \triangle^s ACD, ABD$ เป็นสามเหลี่ยมที่
มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

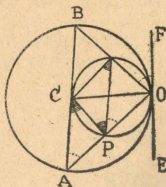
$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$$

บ.พ. 62

$\therefore AD$ เป็นปฏิภาคส่วนกลางระหว่าง BD
และ DC

ข้อ 32/308

โจทย์ วงกลมสองวงสัมผัสภายในที่ O AB เป็นคอร์ดของ
วงกลมใหญ่ เขียนสัมผัสวงกลมเล็กที่ C ถัด OA, OB
ตัดวงกลมใหญ่ที่ P และ Q จงพิสูจน์ว่า $OP : OQ =$
 $AC : BC$



กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มื่ออยู่แถวในโจทย์
สร้าง ตากเส้นสัมผัสร่วม EOF

ตาก PQ

พิสูจน์	$\therefore \widehat{BOF}$	$= \widehat{OPQ} = \widehat{A}$	บ.พ. 49 บ.พ. 13 บ.พ. 60
	$\therefore PQ$	$// BA$	
	$\therefore \frac{OP}{OA}$	$= \frac{OQ}{OB}$	

$$\text{หรือ } \frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OB} \text{ ----- (1)}$$

คุณพระแยง

เช่นเดียวกัน $\therefore$ AB เป็นเส้นมีจุดวงกลม
ตัดที่ C

$$\therefore \hat{ACP} = \hat{PQC} \text{ ---- (2)}$$

ป.พ. 49

$$\text{แต่ } \hat{ACP} = \hat{CPQ} \text{ ---- (3)}$$

$\therefore PQ \parallel AB$

$$\therefore \hat{PQC} = \hat{CPQ} \text{ ---- (2) = (3)}$$

$$\therefore CP = CQ$$

ป.พ. 6

$$\therefore \text{อาร์ค } CP = \text{อาร์ค } CQ$$

ป.พ. 44

$$\therefore \hat{COQ} = \hat{COP}$$

ป.พ. 43

$\therefore OC$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม O ของ $\triangle$

AOB

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \text{ ----- (4)}$$

ป.พ. 61

$$\therefore \frac{OP}{OQ} = \frac{AC}{CB} \text{ ---- (1) = (4)}$$

ข้อ 33/308

โจทย์ AB เป็นcord ของวงกลม C เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง ถ้า AC, BC ตัดเส้นผ่านศูนย์กลางที่ลากตั้งฉากกับ AB ที่ D และ E จงพิสูจน์ว่า ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแล้ว เส้นตรงที่ลากจาก O ไปยัง D และ E จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของวงกลม OD, OE จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของวงกลม

รูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 87

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มีอยู่แต่ในโจทย์

พิสูจน์ ลาก OA, OC จาก O ลาก OE ให้ตั้ง

ได้ฉากกับ AC

$$\text{ใน } \triangle EBF, \hat{E} = 90^\circ - \hat{B} \quad (1) \quad \text{บ.พ. 16}$$

$$\text{ใน } \triangle COE, \hat{OCE} = 90^\circ - \hat{COE} \quad (2) \quad \text{บ.พ. 16}$$

$$\therefore \triangle ACE = \triangle COE \quad \text{อาจพิสูจน์ได้}$$

$$\therefore \hat{AOE} = \hat{COE} \quad \text{ตาม บ.พ. 18}$$

$$\therefore \hat{AOC} = 2 \hat{COE}$$

$$\text{แต่ } \hat{AOC} = 2 \hat{B} \quad \text{บ.พ. 38}$$

$$\therefore \hat{B} = \hat{COE}$$

$$\therefore \hat{E} = \hat{OCE} \quad (1) = (2)$$

$\hat{COE}$ เป็นมุมร่วม

$$\begin{array}{lcl}
 \therefore \hat{ODC} & = & \hat{OCE} \\
 \therefore \Delta^s ODC, OCE & \text{เป็นสามเหลี่ยมทวิมุมนเท่ากันมุมนต่อมุม} & \\
 \therefore \frac{OC}{OE} & = & \frac{OD}{OC} \\
 \text{หรือ } OD \cdot OE & = & OC^2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} \text{บ.พ. 16} \end{array} \right.$$

ข้อ 34/309

โจทย์ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม จาก Y ซึ่งเป็นจุด ๆ หนึ่งบน AB ต่อดออกไปตก YD ให้สัมผัสวงกลมที่ D จาก D ตาก DX ให้ตั้งฉากกับ AB จงพิสูจน์ว่า X และ Y เป็นจุดที่แบ่ง AB ภายนอกและภายในออกตามอัตราส่วนเดียวกัน

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มั้อยู่แล้วในโจทย์

พิสูจน์ ตาก AD, BD

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ต่อ YD ออกไปจนถึงจุด E, } \therefore DX \perp AB & \left| \begin{array}{l} \text{โจทย์} \end{array} \right. \\
 \therefore \hat{A} + \hat{AD}X = 90^\circ \text{ ---- (1)} & &
 \end{array}$$

∴ $\hat{A}DX$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมย่อม น.พ. 41

เท่ากับ 1 L.ด.

$$\therefore \hat{B}DX + \hat{A}DX = 90^\circ \text{ --- (2)}$$

$$\therefore \hat{A} = \hat{B}DX \text{ --- (3) } (1) = (2)$$

$$\text{แต่ } \hat{A} = \hat{B}DY \text{ --- (4) } \text{น.พ. 49}$$

$$\therefore \hat{B}DX = \hat{B}DY \text{ (3) = (4)}$$

∴ BD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม XDY ภายใน

$$\therefore XB : BY = XD : DY \text{ (5) } \text{น.พ. 61}$$

$$\therefore \hat{B}DX + \hat{D}BX = 90^\circ \text{ --- (6) } \therefore DX \perp XB$$

$$\therefore \hat{A}DX = \hat{D}BX \text{ (2) = (6)}$$

$$= \hat{A}DE \text{ น.พ. 49}$$

∴ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม XDE

$$\therefore XA : AY = XD : DY \text{ (7) } \text{น.พ. 61}$$

$$\therefore \frac{XB}{BY} = \frac{XA}{AY} \text{ (5) = (6)}$$

$$\therefore \frac{AY}{YB} = \frac{XA}{XB} \text{ คนทะแยง}$$

∴ X และ Y เป็นจุดที่แบ่ง AB ภายใน
และภายนอกตามอัตราส่วน อันเดียว
กัน

ข้อ 35/309

โจทย์ จงหาจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งทำให้
ระยะทางของเส้นตรงที่ลากจากจุดนั้นไปยังจุดที่สองจุดที่
กำหนดให้ ได้อัตราส่วนเดียวกับอัตราส่วนที่กำหนดให้
พอดี

กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดสองจุดอยู่ในวงกลม ซึ่งมี
O เป็นจุดศูนย์กลาง $m : n$ เป็นอัตราส่วน
จะต้องการหา จุด A เป็นเส้นรอบวง ซึ่งทำให้ $AP : AQ =$
 $m : n$ (2:1)

วิธีหา แบ่ง PQ ภายในและภายนอกตามอัตราส่วน $m : n$
ที่ X และ Y (บ. ถ. 37)

ใช้ XY เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง เขียนวงกลมให้ตัดวง
กลมเดิมที่ A และ B

แล้ว A และ B จะเป็นจุดบนวงกลม (O) ซึ่งทำให้

$AP : AQ = BP : BQ = m : n$ ตามต้องการ

พิสูจน์ . . X และ Y เป็นจุดที่แบ่ง PQ ออก

ตามอัตราส่วน $m : n$

$$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YQ} = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ}$$

. . A และ B เป็นจุดที่ต้องการ

ข้อ 36/309

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดด้านฐานและตำแหน่ง
ของเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดให้

กำหนดให้ BC, PQ เป็นเส้นตรงสองเส้น

จะต้องการสร้าง $\triangle$ ให้มี BC เป็นฐาน และมี PQ เป็นเส้น
แบ่งครึ่งมุม

วิธีสร้าง แบ่งครึ่ง BC ที่ Y

จาก Y ตาก YX ให้ตั้งฉากกับ BC ไป

ตัด PQ ที่ X

เขียนวงกลมล้อมรอบ $\triangle BXC$ ให้ตัด

PQ ที่ A

ข้อ 1

H&S 8/259

บ.ด. 1

บ.ด. 3

พิสูจน์	แต่ ABC จะเป็น $\triangle$ ที่ต้องการ	
	$\therefore XY$ ตัดฉากและแบ่งครึ่ง BC	
	$\therefore BX = XC$	บ.ด. 14
	$\therefore$ าวรค $BX =$ าวรค CX	บ.พ. 44
	$\therefore \hat{BAX} = \hat{CAX}$	บ.พ. 43
	$\therefore AX$ หรือ PQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม	
	ยอด A ของรูป $\triangle ABC$	
	$\therefore ABC$ เป็นรูป $\triangle$ เหลี่ยมที่ต้องการ	

ข้อ 37/309

โจทย์ EA, EA' เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งเขี่ยสัมผัสกับเส้น E ถ้าคอรีค AB ของวงกลมวงที่หนึ่งเมื่อตัดออกไปแล้วจะสัมผัสวงกลมวงที่สองที่ C' และคอรีค $A'B'$ ของวงกลมวงที่สอง เมื่อตัดออกไปแล้วจะสัมผัสวงกลมแรกที่ C จงพิสูจน์ว่า $AB \cdot A'B' = 4 BC' \cdot B'C$

ครูบใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 88

กำหนดให้ และ จะต้องพิสูจน์ มั้อยู่แล้วในโจทย์
สร้าง ให้ O, O' เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ลาก BE และ $C'O'$

$$\text{พิสูจน์} \quad \therefore \hat{A}BE = 1 \text{ ๓.}$$

$$\text{และ } \hat{A}CO = 1 \text{ ๓.}$$

$$\therefore \hat{A}BE = \hat{A}CO$$

$$\therefore \frac{AB}{BC'} = \frac{AE}{EO'}$$

$$\therefore \frac{AB}{2 BC'} = \frac{AE}{2 EO'}$$

$$= \frac{AE}{EA'} \text{ ---- (1)}$$

เช่นเดียวกัน ถ้าจาก CO และ B'E เรา
หาพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{A'B'}{2 B'C} = \frac{EA'}{AE}$$

$$\text{หรือ } \frac{2 B'C}{A'B'} = \frac{AE}{EA'} \text{ ---- (2)}$$

$$\therefore \frac{AB}{2 BC'} = \frac{2 BC'}{AB}$$

$$\therefore AB \cdot A'B' = 4 BC' \cdot BC$$

มุมในครึ่ง

วงกลม

บ.พ. 46

บ.พ. 60

เอา 2 พาร

คูณดัด

(1) = (2)

คูณทะแยง

ข้อ 38/309

โจทย์ จากจุด ๆ หนึ่งภายนอกวงกลม จงลากเส้นตรงให้ตัด
วงกลมที่จุดสองจุด โดยให้อาร์คที่เกิดจากจุดทั้งสองนี้
ทำมุม 90° ที่จุดศูนย์กลางพอดี

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
จะต้องการ ลากเส้นตรง PAB ให้ตัดวงกลมที่จุด A และ B
และให้อาร์ค AB ทำมุม 90° ที่จุดศูนย์กลาง

วิธีสร้าง ลาก OP

บน OP สร้างเส้นตั้งฉากของวงกลม ให้
มีมุมในเส้นตั้งฉาก 45°

บ.ด. 24

ให้วงกลมที่สร้างใหม่ตัดวงกลมเดิมที่ A

ลาก PA ให้ตัดวงกลมเดิมที่ B

แล้ว A และ B จะเป็นจุดสองจุดที่ทำมุม 90°

ที่จุดศูนย์กลางตามต้องการ

พิสูจน์ ลาก AO, BO

$$\therefore \hat{A}$$

$$= \hat{POQ}$$

บ.พ. 49

$$= 45^\circ$$

สร้าง

$$\begin{aligned}
 \therefore OA &= OB \\
 \therefore \hat{A} &= \hat{OBA} \\
 &= 45^\circ \text{ ด้วย} \\
 \therefore \hat{AOB} &= 90^\circ \\
 \therefore A \text{ และ } B &\text{ เป็นจุดที่ต้องการ}
 \end{aligned}$$

รัศมี

บ.พ. 16

ข้อ 39/309

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลม
ที่เขี่ยนอกรูปสามเหลี่ยม ไปยังจุดยอดทั้งสาม ย่อม
ต่างกันได้ฉากกับด้านที่ตรงกันทั้งสาม (CORRESPONDING SIDES) ของสามเหลี่ยมปลายฉาก
(PEDAL TRIANGLE)

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 89

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่เขี่ยนอกรอบรูป
 $\triangle ABC$, DEF เป็นสามเหลี่ยมปลายฉาก (PEDAL TRIANGLE) ของรูป $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า OA, OB, OC ต่างกันได้ฉากกับ EF, FD และ
DE ตามลำดับ

พิสูจน์ ให้ OA ตัด EF ที่ X

$\therefore \hat{BFC}$ และ $\hat{BEC}$ ต่างทาง 1 L น △ปดายนาก

$\therefore B, F, E, C$ วงกลมต่อมได้

$\therefore \hat{AFE} + \hat{BFE} = 2 \text{ L น}$ ป.พ. 2

$= \hat{BFE} + \hat{ACB}$ ป.พ. 40

$\therefore \hat{AFE} = \hat{ACB}$ ---- (1)

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle AFO = \triangle BFO$ ป.พ. 18

$\therefore \hat{AOF} = \hat{BOF}$

หรือ $\hat{AOF} = \frac{1}{2} \hat{AOB}$

แต่ $\hat{ACB} = \frac{1}{2} \hat{AOB}$ ป.พ. 38

$\therefore \hat{AOF} = \hat{ACB}$ ---- (2)

$\therefore \hat{AOF} = \hat{AFE} = \hat{AFX}$ (1) = (2)

ใน $\triangle^s AOF, AFX$

$\therefore OAF$ เป็นมุมร่วม

$\hat{AFX} = \hat{AOF}$ พิสูจน์มาแล้ว

$\therefore$ มุมที่เหลือน $\hat{AXF} = \hat{AFO}$ ป.พ. 16

แต่ $\hat{AFO} = \hat{AFC} = 1 \text{ L น}$ △ปดายนาก

$\therefore \hat{AXF} = 1 \text{ L น ด้วย}$

OA $\perp$ EF

เช่นเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า OB, OC
ตั้งฉากได้ฉากกับ DF, DE ตามลำดับ

ข้อ 40/309

โจทย์ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของ วงกลมที่เขียนล้อม
รอบรูปสามเหลี่ยม ABC จาก P ตาก PD, PE ให้
ตั้งฉากกับ BC, CA จงหาโด่งของจุดศูนย์กลางของ
วงกลมที่เขียนล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม PDE

ดูรูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 89

กำหนดให้ P เป็นจุดเคลื่อนที่อยู่บน วงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
PD, PE เป็นเส้นตรงที่ลากจาก P มาตั้งฉาก
กับ BC, CA ให้ X เป็นจุดศูนย์กลางที่เขียนล้อมรอบ
รูปสามเหลี่ยม PDE

จะต้องการหา โด่งของจุด X

วิธีหา ตาก CP และ OX

$\therefore \angle DEP$ และ $\angle CDP$ ต่างกัน 90°

$\therefore$ จะต้องเป็นมุมในครึ่งวงกลมที่มี CP

เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

จุดศูนย์กลาง X ต้องอยู่บน CP

$\therefore$ OX แบ่งครึ่งคอร์ด CP

$$\therefore \widehat{OXP} = 1 \text{ L.น.}$$

บ.พ. 31

ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า ไม่

ว่า P จะเคลื่อนที่ไปอย่างไรก็ตาม $\widehat{OXC}$

$$= 1 \text{ L.น.}$$

$\therefore$ โดกัศของ X เดินเป็นวงกลมที่มี OC

เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง

ข้อ 41/309

โจทย์ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมที่เขียนล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า มุมที่เกิดจากเส้นซิมสัน (Simson's Line) ของจุด P ทำกับฐาน BC ย่อมเท่ากับมุมที่เกิดจากเส้นตรง AP ทำกับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่ลากผ่าน A

กำหนดให้ P เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ $\triangle ABC$ AX เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง DEF เป็นเส้นซิมสัน

จะต้องพิสูจน์ $\widehat{BDE} = \widehat{PAX}$

พิสูจน์ จาก AP, PX และ PC

$$\therefore \hat{C}EP = \hat{C}DP = 1\text{Lน}$$

$\therefore$ ต้องเป็นมุมในครึ่งวงกลม

C, D, E, P วงกลมล้อมได้

$$\begin{aligned} \therefore \hat{B}DE &= \hat{C}PE \\ &= 90^\circ - \hat{P}CE \text{ ---- (1)} \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } \hat{P}DE = \hat{P}XA$$

$$\therefore \hat{B}DE = 90^\circ - \hat{P}XA \text{ ---- (2)}$$

$$\text{ใน } \triangle APX, \therefore \hat{A}PX = 1\text{Lน}$$

$$\therefore \hat{P}AX = 90^\circ - \hat{P}XA \text{ ---- (3)}$$

$$\therefore \hat{P}AX = \hat{B}DE$$

โจทย์

บ.พ. 41

H&S 5/163

บ.พ. 16

บ.พ. 39

แทนค่าใน(1)

มุมในครึ่ง

วงกลม

บ.พ. 16

(2) = (3)

ข้อ 42/309

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดด้านฐาน มุมยอด และผลต่างของมุมที่ฐานให้

กำหนดให้ BC เป็นเส้นตรง K และ L เป็นมุมสองมุม

จะต้องการสร้าง รูป $\triangle$ ให้มุมยอด $\hat{BAC}$ เท่ากับ K และมี

$$\hat{B} - \hat{C} = \hat{L}$$

วิธีสร้าง บน BC สร้างส่วนของวงกลมให้มุม

เท่ากับ $\hat{K}$

บ.ด. 24

แบ่งครึ่งอาร์ค BC ที่ X

บ.ด. 1

ที่ C ทำมุม BXY = $\frac{\hat{L}}{2}$

บ.ด. 5

จาก X ตาก XA ให้ตั้งฉากกับ CY และ

ให้ตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่ A ตาก

AB, AC แล้ว ABC จะเป็นรูปสาม

เหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ $\therefore \hat{BCY} = \frac{1}{2} (\hat{C} - \hat{B})$

H&S2/138

$\frac{\hat{L}}{2} = \frac{1}{2} (\hat{C} - \hat{B})$

แทนค่า

$\therefore \hat{L} = \hat{C} - \hat{B}$

$\therefore$ ABG เป็นรูป $\triangle$ ที่ต้องการ

ข้อ 43/309

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า วงกลมทั้งสี่ที่เขียนล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม
 ดังรูปที่เกิดขึ้นจากเส้นตรงตัดกันสองคู่ ย่อมพบกันที่
 จุด ๆ หนึ่ง

สรุปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 91

กำหนดให้ $\triangle ACD$, $\triangle AEF$ และ $\triangle BEC$, $\triangle BFD$ เป็นเส้นตรงตัดกัน
 สองคู่ดังรูป ทำให้เกิดสามเหลี่ยมดังรูป คือ $\triangle^s$
 $\triangle ACE$, $\triangle BEF$, $\triangle ADF$, $\triangle BCD$ และให้วงกลมที่เขียนล้อม
 รอบ $\triangle^s \triangle ACE$, $\triangle BEF$ ตัดกันที่จุด P
 จะต้องพิสูจน์ วงกลมที่เขียนล้อมรอบสามเหลี่ยม $\triangle ADF$ และ
 $\triangle BCD$ ต่างผ่าน P

พิสูจน์ จาก PA , PE และ PF

$\therefore A, C, E, P$ วงกลมล้อมได้

$$\therefore \angle PAC + \angle PEC = 2\angle \text{น} \quad \text{ป.พ. 40}$$

$$= \angle PEC + \angle PEB \quad \text{ป.พ. 2}$$

$$\therefore \angle PAC = \angle PEB$$

$$= \angle PFB \quad \text{ป.พ. 39}$$

$$\text{แต่ } \angle PFB + \angle PFD = 2\angle \text{น}$$

$$\therefore \hat{PAC} + \hat{PFD} = 2\angle \text{ด ด้วย}$$

$\therefore A, D, F, P$ วงกลมล้อมได้

นั่นคือ วงกลมที่เขียนล้อมรอบ $\triangle ADF$
ต้องผ่าน P

เช่นเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า วงกลม
ที่เขียนล้อมรอบ $\triangle ABC$ ต้องผ่าน P

ข้อ 44/309

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$
ที่เกิดจากเส้นตรงตัดกันสองคู่ จะตั้งอยู่บนเส้นตรงเส้น
เดียวกัน

วิธีพิสูจน์ ตรีในข้อ 43

จากข้อที่แล้วมา จะเห็นว่าวงกลมที่เขียนล้อมรอบ
วงกลมทั้งสองจะต้องผ่านจุด P จุดเดียวกัน

(ข้อ 43 ข้างบน)

$\therefore$ เส้นสัมผัส ณ จุด P ของสามเหลี่ยมทั้งสองจะต้องทับ
และเป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

(ด H&S ข้อ 3 หน้า 212)

แต่เส้นเชื่อมนี้จะแบ่งเส้นที่ลากจาก P ไปยังเส้นออก-
 โยเซ็นเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่เส้นนั้น

(ดู H&S ข้อ 4 หน้า 212)

... ตามข้อ 9 หน้า 94 ใน H&S จุดออกโยเซ็น-
 เตอร์ทั้งสี่จะตั้งอยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกัน

ข้อสังเกต โจทย์ข้อนี้ให้อ้างโจทย์ฝึกหัดที่แล้ว ๆ มาในหนังสือ
 H&S นักเรียนจำเป็นจะต้องเข้าใจแบบฝึกหัดที่อ้าง
 เหล่านั้น จึงจะพิสูจน์ได้

ข้อ 45/309

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า บรรดารูปหลายเหลี่ยม (กีดกันก็ได้ แล้ว
 แต่กำหนด) ที่บรรจุภายในวงกลม รูปสามเหลี่ยมตรง
 (Regular Polygons) เป็นรูปหลายเหลี่ยมทมนอก
 มากที่สุด และมีเส้นขอบยาวที่สุด

ดูรูปใน “เรขาคณิตสำหรับนักเรียนเตรียมอุดมปีที่ 2” หน้า 91

กำหนดให้ AB, AC เป็นด้านสองด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้าน
 ไม่เท่าที่บรรจุภายในวงกลม ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ
 ของอาร์ค BC จาก BP, CP

จะต้องพิสูจน์ว่า รูปหลายเหลี่ยมมุม BP, PC เป็นด้าน จะ
 ต้องมีเนื้อที่และเส้นรอบ > รูปหลายเหลี่ยมมุม AB,
 AC เป็นด้าน

พิสูจน์ . . . สามเหลี่ยม BPC และ ABC มีฐาน BC ร่วมกันแต่
 ส่วนสูงของสามเหลี่ยม BPC > ส่วนสูงของสามเหลี่ยม
 ABC

. . . เนื้อที่ของสามเหลี่ยม BPC > เนื้อที่ของสาม-
 เหลี่ยม ABC

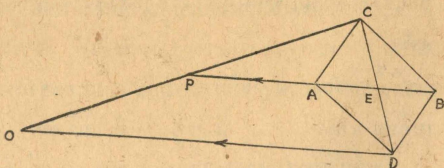
. . . จะเห็นได้ว่ารูปหลายเหลี่ยมมุม PB, PC เป็นด้าน
 จะมีเนื้อที่มากกว่ารูปหลายเหลี่ยมมุม AB, AC เป็น
 ด้านและสำหรับเส้นรอบก็อาจพิสูจน์ได้อย่างเดียวกัน

. . . จะเห็นได้ว่าในวงกลมวงเดียวกัน รูปหลายเหลี่ยม
 ตรงเท่ากันนเป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมเนื้อที่และเส้นรอบ
 มากที่สุด

ข้อ 46/310

โจทย์ บนเส้นตรง PAB กำหนดจุด A และ B ดัง หุนเส้น
 ตรง PAB รอบจุดคงที่ P ถ้า C เป็นจุดคงที่บนพ

ราบที่เกิดขึ้นจาก PAB หมุนไป จึงพิสูจน์ว่า ถ้าลาก CA, CB และประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน CADB ขึ้นแล้ว ไม่ว่า PAB จะหมุนรอบจุด P ไปอย่างไร โดกัศของ D ต้องเดินเป็นวงกลมเสมอ



กำหนดให้ C เป็นจุดอยู่ภายนอกเส้นตรง PAB ให้ CADB เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งทศร่างขึ้นโดยมี AB เป็นเส้นทะแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ ถ้า PAB หมุนไป D ต้องเดินเป็นวงกลม

พิสูจน์ ลาก CD ให้ตัด AB ที่ E

$$\therefore AE = EB$$

$\therefore E$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

จาก D ลาก DO ให้ขนาน AO

ไปตัด CP ต่อออกไปที่ O

บทแทรก -

บ.พ. 21

$$\therefore OC = 2 PC$$

H&S 1/64

$$\text{และ } OD = 2 PE$$

H 23 3/64

แต่ PC คงที่ $\therefore$ OC คงที่ และ O คงที่

และ $\therefore$ PE คงที่ $\therefore$ OD คงที่ด้วย

$\therefore$ ไม่ว่า PAB จะหมุนไปอย่างไรเรา

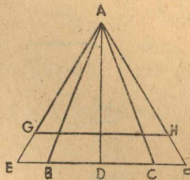
อาจพิสูจน์ได้ว่า O คงที่ และระยะ OD

คงที่เสมอ

$\therefore$ โดกัศรของ D เดินเป็นวงกลม

ข้อ 47/310

โจทย์ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ให้มีเนื้อเท่ากับรูป
สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่กำหนดให้



กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะต้องการสร้าง $\triangle$ ใหม่ให้เหมือนกับ $\triangle ABC$

สร้าง ดา $AD \perp$ ฐาน BC

จาก A' ทำมุม DAE, DAF ให้กามุมละ 30° ให้แขนของมุมตัด BC ที่ E และ F ตามลำดับ

แล้ว AEF จะเป็น $\triangle$ ด้านเท่าที่มีมุมทั้งสามกามุมละ 60°

จาก AG, AH ตัดเอาแต่เพียง AG, AH ให้ยาวเท่ากับปฏิกาดส่วนกลางระหว่าง AE และ BC

แล้ว AGH จะเป็น $\triangle$ ด้านเท่าที่ต้องการ

พิสูจน์ เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle AGH \sim \triangle AEF$

$$\therefore \frac{\triangle AEF}{\triangle AGH} = \frac{AE^2}{AG^2} \quad \text{บ.พ. 72}$$

$$\text{แต่ } AG^2 = AE \cdot BC \quad \text{สร้าง}$$

$$\therefore \frac{\triangle AEF}{\triangle AGH} = \frac{AE^2}{AE \cdot BC}$$

$$= \frac{AE}{BC}$$

$$= \frac{EF}{BC}$$

แทนค่า

ด้านของ $\triangle$
ด้านเท่า

$$= \frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}$$

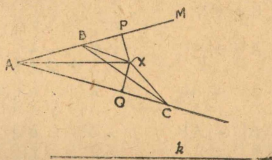
$$\therefore \triangle AGH = \triangle ABC$$

บ.พ. 70

คุณพระแยง

ข้อ 48/310

โจทย์ กำหนดคัตงและขนาดของมุมยอด และผลบวกของ
ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมให้ จงหา
โดกัต์ของจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรอบรูป
สามเหลี่ยม



กำหนดให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ มุมยอด A คงที่ และมีด้าน
 $BA + AC = k$ ที่กำหนดให้ คือ AB, AC ออกไป
ถึง M และ N

จะต้องการหาว่า ถ้า B และ C เคลื่อนไปบน AM, AN โดย
ที่ $BA + AC = k =$ คงที่แล้ว โดกัต์ของจุดของ

จุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ $\triangle ABC$ จะ
 เดินอย่างไร

วิธีหา เอา A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี $\frac{k}{2}$ เขียนวงกลมตัด AM ,
 AN ที่จุด P และ Q
 ที่จุด P และ Q ตากเส้น PX, QX ให้ตั้งฉากกับไป
 ตัดกันที่จุด X ตาก AX
 แล้วโด่งของจุดศูนย์กลาง ของ วงกลมที่เขียนล้อม
 รอบรูป $\triangle$ ดังกล่าวจะเดินอยู่บนเส้นตั้งฉากและแบ่ง
 ครึ่ง AX

พิสูจน์ ตาก BX, CX

$$\therefore AB + AC = k \quad \text{--- (1) ตามสร้าง}$$

$$\text{และ } AP + AQ = k \quad \text{--- (2) ตามสร้าง}$$

$$\therefore AP - AB = AC - AQ \quad (2) - (1)$$

$$\therefore BP = CQ \quad \text{--- (3)}$$

ใน $\triangle APX, \triangle QX$

$$\therefore \begin{cases} AP = AQ \\ \hat{APX} = \hat{AQX} \\ AX \text{ ด้านร่วม} \end{cases}$$

พิสูจน์มาแล้ว
 มุมฉาก

$$\therefore \triangle APX = \triangle QX$$

บ.พ. / 8

$$\therefore PX - QX$$

$$\text{และ } \therefore BP = CQ$$

$$\hat{BPX} = \hat{CQX}$$

$$\therefore \triangle BPX = \triangle CQX$$

$$\therefore \hat{PXQ} = \hat{CXQ}$$

เอา $\hat{PXC}$ บวกทั้งดั่งข้าง

$$\therefore \hat{BXC} = \hat{PXQ} \text{ --- (4)}$$

ในสี่เหลี่ยม $APXQ$

$$\therefore \hat{APX} + \hat{AQX} = 2\text{ ๓}$$

$$\therefore \hat{PXQ} + \hat{PAQ} = 2\text{ ๓}$$

$$\text{แต่ } \hat{PXQ} = \hat{BXC}$$

$$\therefore \hat{BXC} + \hat{PAQ} = 2\text{ ๓ ด้วย}$$

$\therefore X$ เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวงของ
วงกลมที่เขียนล้อมรอบ $\triangle ABC$

และไม่ว่า BAC จะเคลื่อนที่ไปอย่างไร
ก็ตามเราอาจพิสูจน์ได้ว่า วงกลมที่
เขียนล้อมรอบ $\triangle ABC$ ต้องผ่านจุดคง

ด (3)

มุมฉาก

บ.พ. 4

ด ว่าง

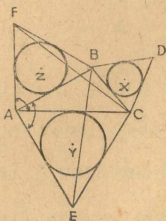
ด (4)

ที่ A และ X เดิม

∴ โลกัต์ของจุดศูนย์กลางของวงกลม
ที่เขย่นดอม $\triangle ABC$ ต้องเดินอยู่บนเส้น
ตรงฉากและแบ่งครึ่ง AX

ข้อ 49/310

โจทย์ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม บนด้านทั้งสามสร้างสาม-
เหลี่ยมด้านเท่าด้านละรูปให้อยู่ภายนอก $\triangle ABC$ ถ้า
 X, Y, Z เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่บรรจุภายใน
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งสาม จะพิสูจน์ว่า XYZ ต้อง
เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วย



กำหนดให้ DBC, ACE, ABF เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่
สร้างอยู่บนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ X, Y, Z

เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่บรรจุภายในรูป สาม-
เหลี่ยมด้านเท่า DBC, ACE และ ABF ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ XYZ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์ จาก BE และ FC

$$\therefore \hat{BAF} = \hat{CAE} = 60^\circ$$

บวกด้วย BAC ทั้งสองข้างจะได้

$$\hat{BAE} = \hat{CAF}$$

$$\text{และ } \therefore BA = AF \text{ และ } AC = AE$$

$$\therefore \triangle BAE = \triangle CAF$$

$$\therefore BE = CF$$

ใน $\triangle^s ZAB, YAC$

$$\hat{AZB} = \hat{F} = 120^\circ$$

$$\hat{AYC} = \hat{E} = 120^\circ$$

$$\therefore \hat{AZB} = \hat{AYC}$$

$$\text{และ } \hat{ZAB} = \frac{1}{2} \hat{BAF} = 30^\circ$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\hat{ABZ}, \hat{CAZ}$ ครึ่ง $\hat{BAF}$

และ $\hat{ACY}$ ต่างเท่ากับ 30° ทั้งหมด

มุมของ $\triangle$ ด้าน
เท่า

ด้านของ $\triangle$
ด้านเท่า

บ.พ. 4

บ.พ. 38

” ”

$\therefore AZ$ แบ่ง

ครึ่ง $\hat{BAF}$

$\therefore \triangle^s AZB, AYC$ เป็น สามเหลี่ยม
 ตรีมุมนุ่เท่ากัน มุมต่อมุม

$$\therefore \frac{AZ}{AY} = \frac{AB}{AC}$$

ป.พ. 62

$$\text{หรือ } \frac{AZ}{AB} = \frac{AY}{AC}$$

คูณทลระแยง

$$\text{” } \frac{AZ}{AF} = \frac{AY}{AC} \quad \text{--- (1)} \quad \therefore AB = AF$$

ใน $\triangle^s ABF, ZAY$

$$\begin{aligned} \angle ZAY &= \angle ZAB + \angle BAC + \angle CAZ \\ &= 30^\circ + \angle BAC + 30^\circ \\ &= \angle BAC + 60^\circ \\ &= \angle FAC \end{aligned}$$

ตรีป

แทนค่า

$$\text{และ } \therefore \frac{AZ}{AF} = \frac{AY}{AC}$$

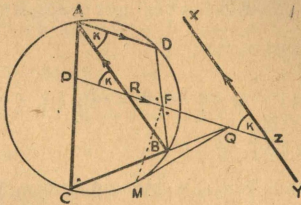
ด (1)

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ZAY$

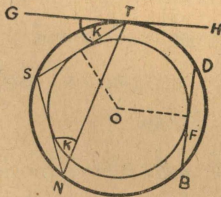
ป.พ. 64

$$\therefore \frac{ZY}{FC} = \frac{AY}{AC} \quad \text{--- (2)}$$

โจทย์



รูป 1



รูป 2

กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดสองจุด ให้ P อยู่ในวงกลมและ
 Q อยู่ภายนอก XY เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งอยู่ภายนอก
 วงกลม

จะต้องการสร้าง เส้นสัมผัสมาบรรจบภายในวงกลม โดยให้
 ด้านตั้งด้านผ่านจุด P และ Q ด้านละจุด และให้ด้าน
 ที่เหลือขนานกับ XY

วิธีสร้าง ลาก PQ และต่อเลยมาพบ XY ที่ Z

$$\text{ให้ } P\hat{Z}X = K$$

จาก Q ลาก QM ให้สัมผัสวงกลมที่ M

จาก M ลาก MF ให้ตั้งฉากกับ PQ ที่ F

∴ ตามบทแทรกของ บ.พ. 66 F เป็นจุดบน PQ
 ซึ่งทำให้ $QM^2 = QP \cdot QP$

ลากคอร์ด BD ให้ผ่าน F โดยให้มีมุมที่เส้นรอบวง
 $B\hat{A}D = K$ พอดี

[วิธีสร้างคอร์ด BD เพื่อมิให้ยุ่งจะยกไปเขียนใหม่
 ดังรูป 2 ให้ T เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมใน
 รูป 2

ลากเส้นสัมผัส GTH และทำมุม $\hat{GTS}$ ให้กางเท่ากับ K ไปตัดเส้นรอบวงที่ S แล้ว ST จะเป็นคอร์ดที่ทำมุม $\angle SNT = \hat{GTS} = K$ ตามบทพิสูจน์ที่ 49 ดังรูป
 เอา O เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมให้สัมผัส ST จาก F ลากเส้นตรงให้สัมผัสวงกลมที่ T และให้
 ค่อยๆไปตัดวงกลมเดิมที่ B และ D

$\therefore$ ตามบทพิสูจน์ที่ 34 คอร์ด $BD =$ คอร์ด ST
 และคอร์ด BD จะมีมุมที่เส้นรอบวงกาง K ด้วย]

พอสร้างคอร์ด BD ให้ผ่าน F แล้วให้กลับไปรูป 1 อีก
 จาก Q ลาก QB และค่อยๆไปพบเส้นรอบวงที่ C

จาก C ลาก CP " " " A

จาก AB ให้ตัด PQ ที่ R

แล้ว ABC จะเป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์	$\therefore$	QM^2	$=$	$QF \cdot QP$	สร้าง บ.พ. 75 ยกมาเขียนใหม่ คุณทေးแยง
			$=$	$QC \cdot QB$	
	$\therefore$	$QF \cdot QP$	$=$	$QC \cdot QB$	
หรือ		$\frac{QP}{QB}$	$=$	$\frac{QC}{QF}$	

และ $\therefore \hat{PQC}$ เป็นมุมร่วม

$$\therefore \triangle PQC \cong \triangle FQB$$

บ.พ. 64

$$\therefore \hat{C} = \hat{BFQ}$$

$$= \hat{PFD}$$

บ.พ. 3

$$\text{แต่ } \hat{PCQ} + \hat{ADB} = 180^\circ$$

บ.พ. 40

$$\therefore \hat{PFD} + \hat{ADB} = 180^\circ \text{ ด้วย}$$

$$\therefore AC \parallel PQ$$

บ.พ. 13

$$\therefore \text{มุมแย้ง } \hat{DAR} = \text{มุมแย้ง } \hat{PRA}$$

$$\text{แต่ } \hat{DAR} = \hat{PZX} = \hat{K}$$

สร้าง

$$\therefore \hat{PRA} = \hat{PZX} = \hat{K} \text{ ด้วย}$$

$$\therefore AB \parallel XY$$

$\therefore ABC$ เป็น สามเหลี่ยมที่ต่อกร

ช.ต.พ

สร้าง ลาก PQ และกำหนดจุด F ตกบน QP โดยให้ $QP \cdot PF$ เท่ากับจตุรัส บนเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด P ไปยัง วงกลม (ตามข้อ 50)

และตามข้อ 50 สร้าง $\triangle$ ดังในวงกลมนี้โดยให้ด้าน ต้องกันผ่านจุด R และจุด F และให้ด้านที่เหลือนาน กับ PQ สมมติให้ $\triangle$ ที่สร้างขึ้นเป็น $\triangle BCD$ ซึ่งมีด้าน CD นานกับ PQ และด้าน BD, CD ลากผ่าน จุด F และ R ตามลำดับ

ลาก PB แล้วต่อเลยออกไปพบเส้นรอบวงที่จุด A ลาก AC $\therefore$ ABC จะเป็น $\triangle$ ที่ต้องการโดยที่ด้าน AC จะผ่านจุด Q ด้วย

พิสูจน์ สมมติว่า AC ไม่ผ่านจุด Q

ลาก AQ แล้วต่อเลยออกไปพบเส้นรอบวงที่ C' ลาก C'D

$$\therefore \triangle QAP \sim \triangle BFP \quad (\text{พิสูจน์เช่นข้อ 50})$$

$$\therefore \hat{QAP} = \hat{BFP}$$

$$\therefore \hat{QAP} = \hat{QFD} \quad (\text{เพราะว่า } \hat{BFP} = \hat{QFD} \text{ ม.พ. 3})$$

$$\therefore \hat{QAP} = 180^\circ - \hat{C'DB} \quad (\text{ม.พ. 41})$$

และ $\therefore \hat{QFD} = 130^\circ - \hat{CDB}$ (เพราะ

$CD \parallel PQ \therefore \hat{CDB} + \hat{QFD} = 180^\circ$ (ป.พ. 14)

$\therefore \hat{C'DB} = \hat{CDB}$

นั่นคือ CD และ $C'D$ เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

$\therefore C$ และ C' ย่อมเป็นจุด ๆ เดียวกัน

นั่นคือถ้าเราลาก AC' ก็เท่ากับเราลาก AB นั่นเอง

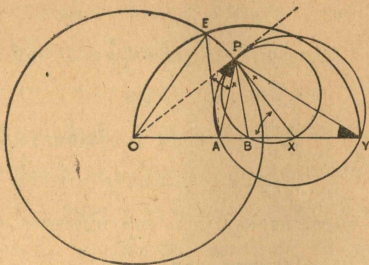
$\therefore AG$ ย่อมผ่านจุด Q ด้วย

$\therefore ABC$ หรือ ABC' เป็น $\triangle$ ที่ต้องการ

ช.ต.พ.

ข้อ 52/310

โจทย์ A, B, X, Y เป็นจุดดีจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน O เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรงนี้ ซึ่งทำให้ $OA \cdot OY = OB \cdot OX$ ถ้าเอา O เป็นจุดศูนย์กลางวัดรัศมียาวเท่ากับปริภาคส่วนกลางระหว่าง OA กับ PY เขียนวงกลมจึงพิสูจน์ว่า ณ จุดทุกจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม AB และ XY จะทำมุมที่จุดนั้นเท่ากันเสมอ



กำหนดให้ O, A, B, X, Y เป็นจุดตั้งจุดทำให้ $OA \cdot OY = OB \cdot OX$ ให้ OE เป็นปฏิภาคส่วนของเส้นตรงระหว่าง OA และ OY (บ.ศ. 38) ให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง บน เส้นรอบวงที่มี OE เป็นรัศมี

จะต้องพิสูจน์ $\angle APB = \angle XPY$

พิสูจน์ เขียนวงกลมล้อมรอบ $\triangle APY$ และ $\triangle BPX$

$$\therefore OE = OP$$

$$\text{และ } \therefore OE^2 = OA \cdot OY = OB \cdot OX$$

$$\therefore OP^2 = OA \cdot OY = OB \cdot OX$$

$$\therefore OP \text{ ตัดขวางกลม } APY \text{ และ } BPX$$

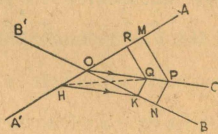
สร้าง

โจทย์

$$\begin{aligned}
 \therefore \hat{OPB} &= \hat{BXP} & \text{ป.พ. 49} \\
 &= \hat{XPY} + \hat{XYP} \dots (1) & \text{ป.พ. 8} \\
 \text{แต่ } \hat{OPA} &= \hat{XYP} & \text{ป.พ. 49} \\
 \therefore \hat{APB} &= \hat{XPY}
 \end{aligned}$$

ข้อ 53/310

โจทย์ จงหาโลโก้ของจุดๆ หนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไป โดยอัตราส่วนของระยะทางจากจุดนั้นไปยัง เส้นตรงตัดกันสองเส้น เท่ากับอัตราส่วนที่กำหนดให้เสมอ



กำหนดให้ AOA' , BOB' เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ O

P เป็นจุดที่เคลื่อนที่ไปโดยที่ $PM:PN = 2:1$ เสมอ

จะต้องการหา โลโก้ของจุด P

วิธีหา จาก OB, OA' ตัดเอาแต่เพียง OK และ OH ให้ยาวเท่ากับ 2 และ 1 ส่วน

จาก O ตลาก $OC \parallel HK$

แล้วโลโก้ของ P จะเดินอยู่บนเส้น OC นี้

พิสูจน์ จาก K ตาก KQ ให้ตั้งฉากกับ OB ไป

พบ OC ที่ Q

จาก Q ตาก QR ให้ตั้งฉากกับ OA ไป

พบ OA ที่ R ตาก HQ

โดยอาศัยสามเหลี่ยมคล้าย เราอาจ

พิสูจน์ได้ว่า $PM:PN = QR:QK$

$\therefore \triangle OHQ, OKQ$ ตั้งอยู่บนฐาน OQ

อันเดียวกัน และอยู่ในระหว่างคู่ขนาน

OQ และ HK อันเดียวกันจะต้องมีเนื้อ

ที่เท่ากัน

บ.พ. 26

$$\therefore \triangle OHQ = \triangle OKQ$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \text{ฐาน OH} \times \text{สูง QR} = \frac{1}{2} \times$$

เนื้อที่

$$\text{ฐาน OK} \times \text{สูง QK}$$

$$\therefore OH \cdot QR = OK \cdot QK$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{QR}{QK} = \frac{OK}{OH}$$

คูณทแยง

$$\text{แต่ } QR \cdot QK = PM \cdot PN$$

พิสูจน์มาแล้ว

$$\text{และ } OK : OH = 2 : 1$$

สร้าง

$$\therefore PM : PN = 2 : 1 \text{ ด้วย}$$

ในทำนองเดียวกันไม่ว่า P จะเคลื่อนไปที่ใดบน OC เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$PM : PN = 2 : 1 \text{ เสมอ}$$

$\therefore$ โดกัศของ P เติมนอยู่บน OC

ข้อ 54/310

โจทย์ ถ้า S, I, I, แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนล้อมรอบ, จุดศูนย์กลางของวงกลมบรรจุภายในและจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เขียนสัมผัสภายนอก (Ex-centre) รูปสามเหลี่ยมตามลำดับ

R, r, r, แทนรัศมีของวงกลมดังกล่าวตามลำดับ

N แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด (Nine-points Circle) จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ก. } SI^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{ข. } SI^2 = R^2 + 2Rr_1$$

$$\text{ค. } NI = \frac{1}{2} R - r \quad \text{ง. } NI_1 = \frac{1}{2} R + r_1$$

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม S, I แทนจุดศูนย์กลาง

R, r แทนรัศมีของวงกลมที่เขียน ล้อมรอบ และบรรจุน
ภายในตามลำดับ

พิสูจน์ ก. ลาก AI และต่อเลยออกไปพบเส้นรอบวงของวง
กลมที่เขียนล้อมรอบที่ X

ลาก XS และต่อเลยออกไปพบเส้นรอบวงกลมที่ Y

ลาก XC และลาก IE ให้ตั้งฉากกับ AC
ต่อ YC

ใน $\triangle^s IAE, XYC$

$$\therefore \begin{cases} \hat{IAE} = \hat{XYC} & \text{ป.พ. 39} \\ \hat{IEA} = \hat{CYX} & \text{” 41} \\ \therefore \text{มุมที่เหลี่ยวย่อมเท่ากัน} & \text{” 16} \end{cases}$$

$\therefore$ ด้านเหลี่ยมทั้งสองเป็นด้านเหลี่ยม
ที่มีมุมเท่ากันมุมต่อมุม

$$\therefore IE : XC = IA : XY \quad \text{ป.พ. 62}$$

$$\therefore IE \cdot XY = XC \cdot IA \quad \text{คูณทะแยง}$$

$$\text{แต่ } IE = r, XY = 2R \text{ และ } XC = XI \quad \text{H\&S16/206}$$

$$\therefore 2Rr = XI \cdot IA$$

ต่อ SI ออกไปทั้งสองข้างไป พบเส้น
รอบวงที่จุด P และ Q

$$\begin{aligned}\therefore XI \cdot IA &= PI \cdot IQ \\ &= (PS+SI) (SQ-SI) \\ &= R^2 - SI^2 \\ \therefore SI^2 &= R^2 - 2 R r\end{aligned}$$

วิธีพิสูจน์ ข. ในทำนองเดียวกัน ถ้า $I_1, I_2,$
 I_3 , เป็นจุดศูนย์กลาง และ r_1, r_2, r_3
เป็นรัศมี ของวงกลมที่เขียนบรรจุนอก
รูปสามเหลี่ยม เราอาจพิสูจน์
ได้ว่า

$$SI_1^2 = R^2 + 2 R r_1, SI_2^2 = R^2 + 2 R r_2$$

$$SI_3^2 = R^2 + 2 R r_3$$

วิธีพิสูจน์ ค. ให้ S และ I เป็นจุดศูนย์กลาง
ของวงกลมที่เขียนล้อมรอบและที่เขียน
บรรจุนอกในรูปสามเหลี่ยม ABC

N. เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
เก่าสุด

O. เป็นจุดออโรเซ็นเตอร์

ต่อ AO ให้ตัด BC ที่ D และต่อเลยไป
ตัดเส้นรอบวงของ วงกลมที่ เขียนล้อม
รอบรูปสามเหลี่ยมที่ G

ลาก SI, IO และ SO

ต่อ SO ออกไป ทั้ง สอง ข้างไป ตัดเส้น
รอบวงที่จุด P และ Q แล้ว N จะเป็น
จุดกึ่งกลางของ SO และ IN เป็น
เส้นมัธยฐานของ $\triangle SIO$

$$\therefore SI^2 + IO^2 = 2IN^2 + 2SN^2$$

$$= 2IN^2 + \frac{1}{2}SO^2 \dots (1)$$

$$\text{แต่ } SI^2 = R^2 - 2Rr \text{ และ } SO^2$$

$$= R^2 - PO \cdot OQ$$

$$= R^2 - AO \cdot OG$$

โดย อาศัย วิชาตรีโกณ มติ เราอาจ
พิสูจน์ได้ว่า

ดู H&S หน้า
211

ป.พ. 53

$$\begin{aligned}\text{ใน } \triangle IAO, IO^2 &= 2r^2 - AO \cdot OD \\ &= 2r^2 - \frac{1}{2} AO \cdot OG \quad \text{H\&S 1/209}\end{aligned}$$

แทนค่าลงใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}2(R^2 - 2Rr) + 4r^2 - AO \cdot OG &= \\ 4IN^2 + R^2 - AO \cdot OG\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore R^2 - 4Rr + 4r^2 &= 4IN^2 \\ (R - 2r)^2 &= (2IN)^2\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{R}{2} - r = IN$$

พึงจำไว้ว่ารัศมีของวงกลมเก่าสุด จะ
ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของวงกลมที่เขย่นต่อม
รอบ และวงกลมเก่าสุดกับวงกลมที่

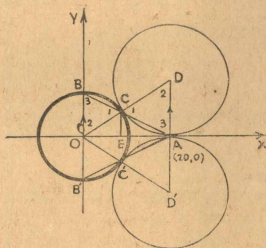
บรรจุกายในจะต้องสัมผัสกัน

วิธีพิสูจน์ ง. ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์
ได้ว่า

$$NI_1 = \frac{R}{-2} + r_1$$

ข้อ 1/313

โจทย์ วงกลมวงหนึ่งที่มีจุดเดิม (Origin) เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมียาว 10 จงเขียนวงกลมให้สัมผัสแกน X ณ จุด $(20, 0)$ และให้สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่า เราอาจจะเขียนวงกลมดังกล่าวได้ต้องวงเท่าๆ กัน. จงคำนวณหารัศมีของวงกลมที่ปรากฏอยู่ในควอดรันต์ (Quadrant) ที่หนึ่ง และจงหาตำแหน่ง (Coordinate) ของจุดที่วงกลมนี้สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ด้วย



กำหนดให้ O (จุดเดิม) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มี
รัศมียาว 10 และเขียนตัดแกน Y ที่จุด B และ B' ตาม
ลำดับ A เป็นจุดมีตำแหน่ง $(20, 0)$

จะต้องการ ก. สร้าง วงกลมต้องวงให้สัมผัส

วงกลม (O) และสัมผัสแกน X ที่จุด A

ข. หา รัศมีและตำแหน่ง ของจุดสัมผัสของวงกลม
ที่สร้างขึ้น

ก. วิธีสร้าง ตาก AB, AB' ให้ตัดวงกลมที่จุด C และ C'

ตาก DAD' ให้ผ่าน A และขนานกับแกน Y

ต่อ OC และ OC' ออกไปพบ DD' ที่ D และ D'

แล้ว D และ D' จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์ ใน $\triangle^s OBC, ACD$

$$\therefore \begin{cases} \hat{1} & = & \hat{1} \\ \hat{2} & = & \hat{2} \\ \hat{3} & = & \hat{3} \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{L.W. } 3 \\ \text{,, } 14 \\ \text{,, } 14 \end{array}$$

$\therefore$ ด้านเหลี่ยมทั้งสองเป็นด้านเหลี่ยม
ที่มุมเท่ากันมุมต่อมุม

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{DA}{DC}$$

$$\text{แต่ } OB = OC$$

$$\therefore DA = DC \text{ ด้วย}$$

$\therefore$ ถ้าเอา A เป็นจุดศูนย์กลาง วงกลมจะ DA หรือ DC เขียนวงกลม วงกลมจะสัมผัสวงกลม (O) ที่ C

และ $\therefore$ DA ตั้งฉากกับ OX

$\therefore$ วงกลม (D) ต้องสัมผัส OX ที่ A ด้วย สำหรับวงกลม (D') ก็อาจพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

บ.พ. 62

รัศมี

เพราะขนาน-
กับแกน Y

ข. วิชาเรขาคณิต ให้ $AD = r$

$$\therefore OD = 10 + r$$

$$\therefore AD^2 = OD^2 - OA^2$$

$$r^2 = (10 + r)^2 - 400$$

$$\therefore r^2 = 100 + 20r + r^2 - 400$$

$$\therefore r = 15$$

รูป

บ.พ. 29

แทนค่า

วิธีหาตำแหน่งของ C จาก C ดัง CE ให้
ตั้งไดนากับ OA

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle OCE \sim \triangle OAD$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{CE}{AD} \quad \text{บ.พ. 62}$$

$$\frac{OE}{20} = \frac{10}{25} = \frac{CE}{15} \quad \text{แทนค่า}$$

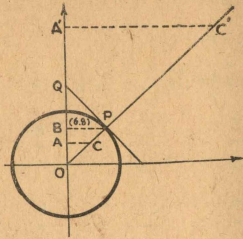
$$\therefore OE = 8 \text{ และ } CE = 6$$

$$\therefore \text{ตำแหน่งของ C เป็น } (8, 6)$$

ข้อ 2/313

โจทย์ วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเดิม และมีรัศมี
ยาว 10 จงสร้างวงกลมให้สัมผัสกับแกน Y และสัมผัส
วงกลมที่กำหนดให้ ณ จุด (6, 8)

จงพิสูจน์ว่า เราอาจเขียนวงกลมชนิดดังกล่าวนี้ได้
ต้องวง จงหาความยาวของรัศมี และจุดที่วงกลม
ที่สร้างใหม่นั้นสัมผัสกับแกน Y ด้วย



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว 10
 $P(6, 8)$ เป็นจุดบนวงกลม

จะต้องการสร้าง ก. วงกลม ต้องวงให้สัมผัสวงกลม (O)
 ที่ P และสัมผัสแกน Y ด้วย

ข. หาคความยาวของรัศมี และตำแหน่งของจุดสัมผัส
 บนแกน Y

วิธีสร้าง ดังต่อไปนี้

∴ จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการต้องอยู่บน OP
 ที่ P ดัง $PQ \perp OP$ ตัดแกน Y ที่ Q

เอา Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี QP เขียนส่วนโค้งตัดแกน
 Y ที่ A และ A'

จาก A, A' เขียนเส้นตรงฉากให้ตัด OP ที่ C และ C'
แล้ว C และ C' จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ตอ
การ (CA, C'A' เป็นรัศมี)

พิสูจน์ ∴ ตามเหลี่ยมมุมฉาก ACO, CPQ บ.พ. 18

$$\therefore CA = CP$$

∴ ถ้าเอา C เป็นจุดศูนย์กลางเขียน
วงกลม วงกลมจะผ่าน P และสัมผัส
แกน Y
และสำหรับวงกลมที่มี C' เป็นจุดศูนย์กลาง
ก็เช่นเดียวกัน

หารัศมี ให้ r แทนรัศมีของวงกลมเล็ก

R " " " ใหญ่

จาก P ตาก PB ให้ตั้งฉากกับแกน Y

∴ จึงอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\triangle AOC \sim \triangle BOP$$

$$\therefore r/BP = OC/OP$$

บ.พ. 62

$$\text{แต่ } OC = (OP - PC) = (10 - r)$$

สรุป

$$\frac{r}{6} = \frac{(10-r)}{10}$$

$$\therefore r = 3\frac{3}{4}$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$R = 15$$

หาจุดสัมผัส A และ A'

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOP$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OP}$$

$$\frac{OA}{8} = \frac{10-r}{10} = \frac{10-15/4}{10}$$

$$\therefore OA = 5$$

$$\therefore \text{ตำแหน่งของจุดสัมผัส } A = (0, 5)$$

เช่นเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\text{ตำแหน่งของจุดสัมผัส } A' = (0, 20)$$

พิสูจน์มาแล้ว

บ.พ. 32

แทนค่า

ข้อ 1/317

โจทย์ กำหนด ความยาวของด้านของด้านของรูปสามเหลี่ยม
ให้ เราจะต้องวางด้านทั้งสองอย่างไรจึงจะทำให้พื้นที่
ของรูป $\triangle$ มีค่ามากที่สุด
จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่ใหญ่ที่สุด ซึ่งมีด้าน $a =$
6.8 cm และ $b = 4.5$ cm

กำหนดให้ ให้ a และ b เป็นความยาวของด้านทั้งสองซึ่ง
 $= 6.8$ และ 4.5 cm ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องการ เราจะ ต้องวาง ด้านทั้งสองอย่างไร จึงจะทำให้
 $\triangle$ มีพื้นที่มากที่สุดและคำนวณหาที่

สร้าง ตาก BC ให้ยาว $= a = 6.8$ ซม. จาก C ตาก CA
ให้ตั้งฉากกับ BC และยาว $= b = 4.5$ cm ตาก AB
 $\therefore \triangle ABC$ จะเป็นรูป $\triangle$ ที่มีพื้นที่มากที่สุด

พิสูจน์ จาก C ตาก CA' กระทำมุมแหลมกับ BC จาก A'
ตาก $A'C'$ ให้ตั้งฉากกับ BC ที่ O' ตาก $A'B$

$\therefore$ พื้นที่ของ $\triangle A'BC$ และ $\triangle ABC = \frac{1}{2} A'C' \times$

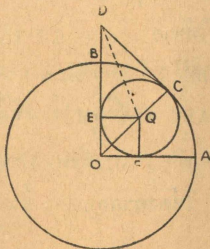
BC และ $\frac{1}{2} AC \times BC$

แต่ $A'C' < AC$ [$\because AC' = AC > A'C'$ (ป.พ.10)]

$\therefore$ พื้นที่ของ $\triangle A'BC <$ พื้นที่ของ $\triangle ABC$

ข้อ 3/413

โจทย์ เขียน Quadrant ของวงกลมรัศมี 2 จงบรรจุวงกลม
 ดังไปใน Quadrant และจงพิสูจน์ว่ารัศมีของวงกลม
 ที่บรรจุอยู่ภายใน Quadrant จะมีค่า = รัศมีของ
 สี่เหลี่ยม $r^2 + 4r - 4 = 0$ และจงหารรัศมีโดยวิธี
 คำนวณและวัด



กำหนดให้ ให้ AOB เป็น Quadrant ของ วงกลม ซึ่งมี
รัศมี = 2

จะต้องการ บรรจุวงกลมลงใน Quadrant และพิสูจน์ว่า
รัศมีของวงกลมที่บรรจุจะมีค่าเป็นรัศมีของมุมการ
 $r^2 + 4r - r = 0$ แล้วจงหารัศมีโดยวิธีคำนวณ
และวัด

สร้าง แบ่งครึ่งมุมฉาก BOA (บ.ด. 1) ด้วยเส้นตรง OC
รวมส่วนโค้ง BCA ที่จุด C

ลาก DC ตั้งฉากกับ OC พบส่วนต่อของ OB ที่จุด D
เอา D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี = DC เขียนส่วนโค้ง
ของวงกลมตัด DO ที่จุด E

จาก EQ ตั้งฉากกับ OD ตัด OC ที่จุด Q

จาก Q ลาก QF ตั้งฉากกับ OA

$\therefore$ Q จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์

$\therefore$ C เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง BCA บ.พ. 42

$\therefore$ วงกลมที่บรรจุอยู่ภายใน วง quad

rant จะสัมผัส ABC BCA ที่ A

จาก DQ

$$\therefore EQ = CQ \quad \text{ป.พ. 18}$$

ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$EQ = QF \quad \text{ป.พ. 18}$$

$$\therefore EQ = CQ = QF$$

$\therefore Q$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ที่บรรจุอยู่ใน Quadrant ที่ต้องการ
ดังนั้นให้ $QE = r$

$$\text{ใน } \triangle \text{มุมฉาก } OFQ \quad OQ^2 = OF^2 = FQ^2 \quad \text{ป.พ. 29}$$

$$\therefore (2-r)^2 = r^2 + r^2$$

$$4 - 4r + r^2 = 2r^2$$

$$\therefore r^2 + 4r - 4 = 0$$

ดังนั้นหาคำของวงกลมที่บรรจุจะมค่า

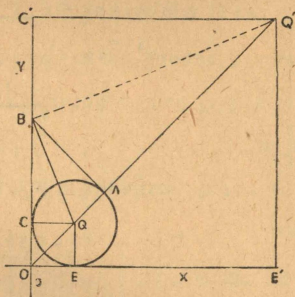
$$= \text{คำตอบของสมการ } r^2 + 4r - 4 = 0$$

$$\text{และ } r = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4 \times 1(-4)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2}$$

$$= -2 + 2.828 = 0.83''$$

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า เราอาจที่จะเขียน วงกลมได้ สองวงโดยให้
 ตั้มัดแกนทั้งสองและผ่านจุด $(2, 2)$ และจง
 พิสูจน์ว่ารัศมี ของ วงกลม ทั้งสองจะมีค่า = รากที่สองของ
 ต้มการ quadratic $r^2 + 4r\sqrt{2} - 8 = 0$ และจง
 หาค่าของรัศมีของวงกลมที่เล็กที่สุดโดยการวัด



กำหนดให้ ให้ A เป็นจุด $(2, 2)$ ของแกน OX และ OY
 จะต้องพิสูจน์ ว่าเราสามารถสร้างวงกลมให้ผ่านจุด $(2, 2)$
 และตัดแกนทั้งสองได้สองวง และรัศมีของวงกลม
 ทั้งสองเท่ากับรากที่สองของต้มการ $r^2 + 4r\sqrt{2} - 8 = 0$
 กับจงหาค่าของรัศมีโดยการวัด

สร้าง ตา OA

จากจุด A ตา AC ให้ตั้งฉากกับ OA ที่จุด A พบ
 OY ที่จุด B

เอา B เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม $= BA$ เขียนส่วนโค้ง
 ของวงกลมตัด OY ที่จุด C และ C'

จาก C และ C' ตา CQ และ $C'Q'$ $\perp$ กับ OY พบ
 OA และ OA ที่ต่อออกไปที่จุด Q และ Q'

จาก Q และ Q' ตา QE และ $Q'E'$ $\perp$ กับ OX ที่
 E และ E'

$\therefore Q$ และ Q' จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่
 ต้องการ

พิสูจน์ ตา BC และ BC'

$$\therefore CQ = QA \text{ และ } C'Q' = Q'A \quad \text{บ.พ. 18}$$

ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$CQ = QE \text{ และ } C'Q' = Q'E' \quad \text{บ.พ. 18}$$

$\therefore Q$ และ Q' จะเป็นจุดศูนย์กลางของ
 วงกลมที่ต้องการ

หาค่าของสมการ $\therefore OA^2 = 2^2 + 2^2$

$$\therefore OA = 2\sqrt{2}$$

ใน $\triangle OQE$ และ $\triangle DQ'E'$

ตั้งสมมติว่าวงกลมทั้งสองมีรัศมี $= r$

$$\therefore OQ^2 = OE^2 + EQ^2 \text{ และ}$$

$$OQ'^2 = OE'^2 + E'Q'^2$$

11.พ. 29

$$\therefore (2\sqrt{2-r})^2 = r^2 + r^2$$

$$(2\sqrt{2+r})^2 = r^2 + r^2$$

$$8 - 4r\sqrt{2+r^2} = 2r^2$$

$$8 + 4r\sqrt{2+r^2} = 2r^2$$

$$r^2 + 4r\sqrt{2-8} = 0$$

$$r^2 - 4r\sqrt{2-8} = 0$$

$\therefore$ ความยาวของรัศมีของวงกลม

วงเล็กจะเท่ากับค่าของรากที่สองของสมการ

$$r^2 + 4r\sqrt{2-8} = 0$$

$$\therefore r = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{32 - 4 \times 1(1-8)}}{2 \times 1}$$

$$2 \times 1$$

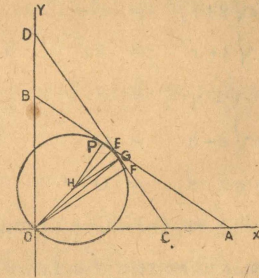
$$= \frac{-4\sqrt{2+8}}{2}$$

$$= -2\sqrt{2+4}$$

$$= -1.172 \quad \text{นว}$$

ข้อ 5/313

โจทย์ เชื่อมจุด $(2'.0)$ และ $(0.3')$ ในทำนองเดียวกัน
เชื่อมจุด $(3''.0)$ และ $(0.2'')$ จงเขียนวงกลม
ให้สัมผัสเส้นตรงทั้งสองและผ่านจุด Origin



กำหนดให้ ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $(3''.0)$
 $(0.2'')$ และ $(2'.0)$, $(0.3')$ ตามลำดับตัดกัน
ที่จุด E ตาก OE

จะต้องการสร้าง วงกลมให้สัมผัสกับ AB และ CD และผ่านจุด O

สร้าง จากจุด O ดึง OF ให้ตั้งฉากกับ CD แบ่งครึ่งมุม

$\angle EOF$ ด้วยเส้นตรง OQ พบ CD ที่จุด G

จาก G ดึง GH ให้ขนานกับ OF พบ OE ที่จุด H

จาก H ดึง $HP \perp$ กับ AB ที่ P

$\therefore H$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

พิสูจน์

ใน $\triangle COD$ และ $\triangle AOB$

$$\therefore \begin{cases} OA = OD = 3'' \\ OB = OC = 2'' \\ \angle AOB = \angle COD \end{cases}$$

กำหนดให้

กำหนดให้

เป็นมุมฉาก

$$\therefore \triangle COD = \triangle AOB$$

บ.พ. 4

$$\therefore \angle OCE = \angle OBE \text{ และ } \angle CAE = \angle BDE$$

ใน $\triangle AEC$ และ $\triangle BED$

$$\therefore \begin{cases} \angle CAE = \angle BDE \\ \angle AEC = \angle BED \\ AC = BD = 1'' \end{cases}$$

พิสูจน์มาแล้ว

บ.พ. 3

กำหนดให้

$$\therefore BE = CE$$

บ.พ. 17

ใน $\triangle OEB$ และ $\triangle OEC$

$$\therefore \begin{cases} OE \text{ เป็นด้านร่วม} \\ OB = OC = 2'' \\ BE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \angle OEB = \angle OEC$$

$$\therefore \angle HOG = \angle GOF = \angle HGO$$

$$\therefore OH = GH = PH$$

นั่นคือ H จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ที่ตัดการ

กำหนดให้
พิสูจน์มาแล้ว

บ.พ. 7

สร้างและบ.พ.14

บ.พ. 6 และ-

บ.ด. 15

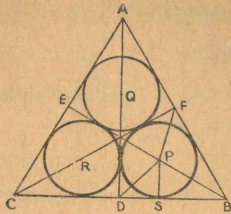
ช ต.พ.

ข้อ 6/313

โจทย์ ภายใต้วงรูป $\triangle$ ด้านเท่าซึ่งมีด้านยาวด้านละ 3.0" จง
เขียนวงกลมที่เท่าๆ กันตามวงให้วงหนึ่งๆ สัมผัสด้าน
ของด้านของ $\triangle$ และวงกลมอีก 2 วง ถ้า r เป็นรัศมี
ของวงกลมวงหนึ่งวงใด จงพิสูจน์ว่า

$$r (\tan 60^\circ + r) = \frac{3}{2}$$

แล้วจงหาค่าของ r ให้ใกล้เคียง และเป็นทศนิยม 2
ตำแหน่งของน



กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูป $\triangle$ ด้านเท่า ซึ่งมีด้านยาวด้านละ 3.0

จะต้องการสร้าง วงกลมที่เท่า ๆ กันบรรจุลงใน $\triangle ABC$ ตามวงและให้วงหนึ่ง ๆ สัมผัสด้านสองด้านของรูป $\triangle$ และสัมผัสวงกลมอีกด้วยวง

ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมที่บรรจุลงไป จะต้องพิสูจน์ว่า $r (\tan 60^\circ + 1) = \frac{3}{2}$

และคำนวณหาค่าของ r เป็นทศนิยมสองตำแหน่งของนิ้ว

สร้าง ลากเส้นตั้งฉาก AD, BE และ CF ไปยังด้านตรงข้ามตัดกันที่จุด O

แบ่งครึ่ง $\angle BFO$ ด้วย PF พบ OB ที่จุด P

เขา O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม $= OP$ ตัด OA และ OC
ที่จุด Q และ R

$\therefore PQ$ และ R จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่
ต้องการ

พิสูจน์

ลาก DP

โดย บ.พ. 18 เราอาจพิสูจน์ได้ว่า AD ,
 BE และ CF เป็นเส้นมัธยฐานของรูป $\triangle$
ใน $\triangle OBD$ และ $\triangle OBF$

$\therefore \hat{BOF} = \hat{BOD}$, $CD = OF$, $\hat{OFB} = \hat{ODB}$ บ.พ. 18

ใน $\triangle OFD$ และ $\triangle ODP$

$\therefore \hat{OFP} = \hat{ODP}$

บ.พ. 4

แต่ $\hat{OFB} = \hat{ODB}$

พิสูจน์มาแล้ว

$\therefore DP$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ODB

$\therefore$ จุด P จะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุม

OFB , ODB , FOD และ FBD

$\therefore P$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม บ.ด. 20

ที่บรรจุอยู่ใน $\square ODBF$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่ง
มุม AFC และ $\angle ODC$ เราอาจพิสูจน์ได้
ว่า $OP = OQ = OR$

$\therefore P, Q, R$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของ
วงกลมที่ต่อข้องการ

จาก P ลาก PS ให้ตั้งฉากกับ BC พบ
BC ที่จุด B

$$\begin{aligned}\therefore \angle BPS &= 90^\circ - \angle PBS \\ &= 90^\circ - \frac{\angle FBS}{2} = (90^\circ) - 30^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

$$\therefore r \tan 60^\circ = BS$$

$$\therefore BD = \frac{3''}{2}$$

$$\text{และ } \therefore BS + SD = BD$$

$$\therefore r (\tan 60'' + 1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore r &= \frac{3}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4} \\ &= 0.55''\end{aligned}$$

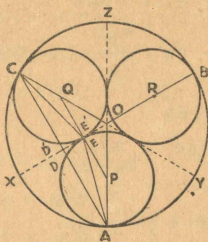
พิสูจน์มาแล้ว

ข้อ 7/313

โจทย์ ภายในวงกลมรัศมี $= 2.0$ จงบรรจุวงกลมที่เท่าๆ กันลงไปตามวงให้วงหนึ่งๆ ตัดสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้และสัมผัสวงกลมอีกสองวง ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมวงใดวงหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า

$$r (1 + \operatorname{cosec} 60^\circ) = 2$$

และจงหาค่าของ r (ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)



กำหนดให้ ให้ ABC เป็นวงกลมซึ่งมีรัศมีเท่ากับ 2.0 และมี O เป็นจุดศูนย์กลาง

จะต้องการหา (1) บรรจุวงกลมที่เท่าๆ กันลงไปในวงกลม ABC ตามวงให้วงหนึ่งๆ ตัดสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้และสัมผัสวงกลมอีก 2 วง

(2) ถ้า r เป็นรัศมีจริงพิสูจน์ว่า $r(1 + \cos 60^\circ) = 2$
 (3) จงหาค่าของ r ให้มีทศนิยมสองตำแหน่งของ r
 สร้าง (1) ลากรัศมี OA จาก A ตัดเส้นรอบวงออกเป็น 6
 ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด Y, B, Z, C, X ลาก $OY, OB,$
 OZ, OC และ OX จากจุด A ลาก AD ให้ตั้งฉากกับ
 OX ที่จุด D แบ่งครึ่ง OA (บ.ด. 1) ด้วยเส้นตรง
 AE พน OX ที่ E จาก E ลาก EP ให้ขนานกับ DA
 พน OA ที่จุด P ในทำนองเดียวกันบน OC, OB หา
 Q และ R

พิสูจน์ (1) $\therefore P, Q, R$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ
 (1) $\therefore \angle PAE = \angle EAD = \angle AEP$ สร้างและบ.พ.14
 $\therefore AP = PE$ บ.พ. 6
 $\therefore OA$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม XOY สร้าง
 $\therefore PE =$ ระยะตั้งฉากจาก P ถึง OY บ.พ. 15
 $= AP$
 $\therefore P$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
 ที่สัมผัสวงกลม AEC ที่ A และสัมผัส OX
 และ OY

ใน $\triangle OCD'$ และ $\triangle OAD$

$$\therefore \begin{cases} OA = OC \\ \angle AOD = \angle COD = 60^\circ \\ \angle ADO = \angle CDO' = 90^\circ \end{cases}$$

$$\therefore OD = OD' \quad \angle OAD = \angle OCD'$$

$$\therefore \angle ADO + \angle CDO' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\therefore CD'$ ต่อเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน
กับ AD

$$\therefore \angle OAD = \angle OCD' \text{ ดังนั้น } \angle OPE = \angle OQE'$$

$\therefore$ ในทำนองเดียวกันเราอาจพิสูจน์
ได้ว่า QE' ต่อเป็นเส้นตรงอันเดียวกัน
กับ EP

นั่นคือวงกลมวงหนึ่งๆ ที่บรรจุลงไป
ในวงกลม ABC และมี P, Q, R เป็นจุด
ศูนย์กลางจะสัมผัสวงกลม ABC และ
สัมผัสวงกลมอีกด้วยวง

$$(2) \therefore OP + PA = 2$$

รัศมีของวงกลม
วงเดียวกัน

สร้าง

สร้าง

บ.พ. 17

$$\therefore PE \operatorname{cosec} \hat{POE} + r = 2$$

$$r (1 + \operatorname{cosec} 60^\circ) = 2$$

$$(3) \quad r = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \cdot 3 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+2}}$$

$$= -2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) = 0.128352$$

$$= 0.93 \text{ นิ้ว (โดยประมาณ)}$$

พิมพ์ที่บริษัทประชาช่างจำกัด (แผนกการพิมพ์)

ถนนสี่พระยา พระนคร

นายแสง เหนือระกูด ผู้พิมพ์โฆษณา ๒๔๕๓

